Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής
Χειμερινό εξάμηνο 2024-2025

3η εργασία στη Μηχανική Ι

---

1. Σώμα $m = 1$ εκτελεί γραμμική εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση. Η δυνάμεις επαναφοράς, απόσβεσης και διέγερσης είναι $-\frac{11}{3}x$, $-2\dot{x}$ και $\frac{100}{3}\cos t$, αντίστοιχα.
(α) Αν αρχικά ($t = 0$) είναι $x = 14$ και $\dot{x} = 0$, ποια η θέση σε κάθε χρόνο;
(β) Μετά από πόσο χρόνο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση;
Ποιο είναι το πλάτος της και ποια η διαφορά φάσης της ταχύτητας με την διέγερση;

---

2. Έστω δένουμε σημειακό σώμα σε κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο μέσα σε ομογενή βαρύτητα g. Στο σώμα ασκείται το βάρος, η δύναμη ελατηρίου και αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας, που αντιστοιχεί σε κρίσιμη απόσβεση. Αν αρχικά το σώμα είναι ακίνητο και το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, ενώ τελικά το σώμα σταματά σε απόσταση x_0 από την αρχική του θέση, ποια η θέση σε κάθε χρόνο;
(Δεδομένα είναι μόνο τα g και x_0.)

3.[1] Ένας ταλαντωτής με μάζα $m = 1$ και ιδιοσυχνότητα $\omega_0 = 1$ και συντελεστή γραμμικής αντίστασης $\gamma = 0.1$ διεγείρεται από αρμονική δύναμη της μορφής $F(t) = \cos(\omega t)$. Αφότου έχει αποκατασταθεί η διεγειρόμενη αρμονική ταλάντωση (έχουν αποσβεστεί οι αρχικές συνθήκες) να υπολογιστεί (α) το έργο W_F της δύναμης για μια περίοδο της διεγείρουσας δύναμης και (β) το έργο της αντίστασης W_T στο ίδιο διάστημα. (γ) Είναι ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται η ενέργεια dW_F/dt από την εξωτερική δύναμη ίδια κατ' απόλυτη τιμή με τον ρυθμό dW_T/dt που καταναλώνει η αντίσταση ενέργεια ανά πάσα χρονική στιγμή; (δ) Η ενέργεια του ταλαντωτή (κινητική+δυναμική) είναι σταθερή;

4.[1] Μια μάζα $m = 1$ βρίσκεται πάνω σε μια οριζόντια αεροτροχιά και μπορεί να κινείται με συντελεστή γραμμικής αντίστασης γ. Η μάζα βρίσκεται στο άκρο ιδανικού ελατηρίου με συντελεστή σκληρότητας $k = 1$ και φυσικό μήκος $l_0 = 0.5$ και το οποίο έχει αμελητέες διαστάσεις οπότε μπορεί να συμπιεστεί μέχρι να φτάσει σε μηδενικό μήκος. Το άλλο άκρο του ελατηρίου βρίσκεται σε κινητό Α αμελητέων διαστάσεων που μέσω μηχανισμού εκτελεί την κίνηση $x_A(t) = 0.1[1 - \cos(\omega t)]$. Το σημείο $x = 0$ είναι το ένα άκρο της αεροτροχιάς που βρίσκεται το κινητό Α τη χρονική στιγμή 0. Το άλλο άκρο Β της αεροτροχιάς βρίσκεται στη θέση $x_B = 1$.
(α) Να γραφεί η εξίσωση κίνησης της μάζας (μετά την αποκατάσταση της διεγειρόμενης ταλάντωσης).
(β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του γ, ώστε η μάζα να μην μπορεί να φύγει ποτέ εκτός της αεροτροχιάς, για οποιαδήποτε επιλογή της ω.
(γ) Η ελάχιστη τιμή του γ που οριακά αποφεύγει να «ρίξει» τη μάζα εκτός αεροτροχιάς, μήπως οδηγεί σε αφύσικη θεώρηση ως προς το ότι αναγκάζει το ελατήριο να λαμβάνει αρνητικό μήκος στην εξίσωση κίνησης;
[Θεωρήστε, όπου χρειάζεται, ότι $\gamma << \omega_0 = \sqrt{k/m}$.]

---

[1] Τα προβλήματα σε έγχρωμο κείμενο είναι αυξημένης δυσκολίας, απαντάτε προαιρετικά.

Λύσεις

---

1. Η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{x} + 2\dot{x} + \frac{11}{3}x = \frac{100}{3}\cos t$.

Η λύση της ομογενούς είναι $e^{\lambda t}$ με $\lambda^2 + 2\lambda + \frac{11}{3} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \pm i\sqrt{\frac{8}{3}}$, δηλ. είναι $C_1 e^{-t}\cos(\omega t) + C_2 e^{-t}\sin(\omega t)$ με $\omega = \sqrt{\frac{8}{3}}$.

Για να βρούμε μια μερική λύση, ένας τρόπος είναι χρησιμοποιώντας μιγαδικούς να σκεφτούμε την εξίσωση κίνησης σαν $\ddot{\zeta} + 2\dot{\zeta} + \frac{11}{3}\zeta = \frac{100}{3}e^{it}$ με $x = \Re\zeta$. Η μερική λύση είναι $\zeta = De^{it}$ με την αντικατάσταση να δίνει $D = \frac{100}{8+6i} = 8 - 6i$, δηλ. η μερική λύση είναι $x = \Re\left[(8-6i)e^{it}\right] = 8\cos t + 6\sin t$.

Επομένως η γενική λύση είναι $x = C_1 e^{-t}\cos(\omega t) + C_2 e^{-t}\sin(\omega t) + 8\cos t + 6\sin t$.

(α) Αν αρχικά ($t = 0$) είναι $x = 14$ και $\dot{x} = 0$ είναι $C_1 = 6$ και $C_2 = 0$, δηλ. η θέση σε κάθε χρόνο είναι $x = 6e^{-t}\cos(\omega t) + 6\sin t + 8\cos t$.

(β) Για $t \gtrsim 5$ το εκθετικό είναι αμελητέο και η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση $x = 6\sin t + 8\cos t$.

Η θέση μπορεί να γραφεί σαν $x = D\cos\phi\sin t + D\sin\phi\cos t = D\sin(t+\phi)$, με $D\cos\phi = 6$ και $D\sin\phi = 8$, δηλ. με $D = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ και ϕ κοινή λύση των $\cos\phi = \frac{3}{5}$ και $\sin\phi = \frac{4}{5}$.

Στην μορφή αυτή φαίνεται ότι το πλάτος της ταλάντωσης είναι $D = 10$.

Η διαφορά φάσης της ταχύτητας $v = \dot{x} = 10\cos(t+\phi)$ με την διέγερση είναι ϕ (η ταχύτητα προηγείται).

---

2. Αν $m\omega^2$ είναι η σταθερά του ελατηρίου η εξίσωση κίνησης είναι $m\ddot{x} = mg - 2m\gamma\dot{x} - m\omega^2 x \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = g$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ομογενούς έχει διπλή λύση αφού η απόσβεση είναι κρίσιμη. Άρα $\gamma = \omega$ και οι λύσεις της ομογενούς είναι $e^{-\omega t}$ και $te^{-\omega t}$. Μια μερική λύση είναι σταθερή και ίση με $\frac{g}{\omega^2}$ (η οποία είναι η θέση ισορροπίας του σώματος), οπότε η γενική λύση είναι $x = \frac{g}{\omega^2} + (C_1 + C_2 t)\,e^{-\omega t}$, $\dot{x} = (C_2 - \omega C_1 - \omega C_2 t)\,e^{-\omega t}$.

Σε μεγάλους χρόνους $x_0 = g/\omega^2 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{g/x_0}$.

Από αρχικές συνθήκες $x = 0$, $\dot{x} = 0$ βρίσκουμε $C_1 = -x_0$, $C_2 = -\omega x_0$ και άρα σε κάθε χρόνο $x = x_0\left[1 - (1+\omega t)\,e^{-\omega t}\right]$ με $\omega = \sqrt{g/x_0}$.

3.

4.
