Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής
Χειμερινό εξάμηνο 2024-2025

2η εργασία στη Μηχανική Ι

---

1. Έστω η μονοδιάστατη κίνηση σώματος μάζας $m = 1$ σε πεδίο $V(x) = -\dfrac{1}{\cosh^2 x}$ (σε κατάλληλες μονάδες).
(α) Σχεδιάστε την $V(x)$, περιγράψτε την κίνηση για διάφορες τιμές της ενέργειας και σχεδιάστε τις αντίστοιχες καμπύλες στο διάγραμμα φάσης.
(β) Βρείτε την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας.
(γ) Βρείτε την θέση συναρτήσει του χρόνου αν το σώμα βρίσκεται αρχικά ακίνητο στη θέση $x = x_0 > 0$. Ποια η περίοδος της κίνησης;
(δ) Βρείτε τη θέση συναρτήσει του χρόνου αν το σώμα έχει ενέργεια $E > 0$.
Υπόδειξη: Τα ολοκληρώματα που θα εμφανιστούν υπολογίζονται με την αντικατάσταση $\sinh x = \xi$ και περαιτέρω ότι $\displaystyle\int \frac{d\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} = \arcsin \frac{\xi}{|A|} +$ σταθερά, $\displaystyle\int \frac{d\xi}{\sqrt{A^2 + \xi^2}} = \text{arcsinh} \frac{\xi}{|A|} +$ σταθερά. Θα χρειαστείτε επίσης την ταυτότητα $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

---

2. Έστω σώμα μοναδιαίας μάζας και μοναδιαίου φορτίου μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = 2x\hat{z}$ (σε κατάλληλες μονάδες). Αρχικά το σώμα βρίσκεται στη θέση $\vec{r}|_{t=0} = 0$ και κινείται με ταχύτητα $\vec{v}|_{t=0} = v_{0x}\hat{x} + 4\hat{y}$.
(α) Δείξτε ότι η κίνηση ανάγεται σε μονοδιάστατη στον άξονα x με εξίσωση κίνησης $\ddot{x} = 8x - 2x^3$ και ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{\dot{x}^2}{2} + \dfrac{x^4 - 8x^2}{2} = \dfrac{v_{0x}^2}{2}$.
Υπόδειξη: Βρείτε τις καρτεσιανές συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα $\vec{a} = \vec{v} \times \vec{B}$ και δείξτε ότι η $\hat{y}$ συνιστώσα ολοκληρώνεται σε $\dot{y} + x^2 =$ σταθερά.
(β) Αιτιολογήστε γιατί το ολοκλήρωμα αυτό είναι ισοδύναμο με την αναμενόμενη (γιατί;) διατήρηση της κινητικής ενέργειας.
(γ) Για ποια v_{0x} το σώμα περνά το $x = -3$;

3.[1] Ένας ταλαντωτής κινείται υπό την επίδραση δύναμης για την οποία η δυναμική ενέργεια είναι $V(x) = A((x/x_0)^2)^n$, όπου A και n θετικοί αριθμοί και x_0 κάποια κλίμακα μήκους. Έστω E η ενέργεια του ταλαντωτή. Να βρεθούν τα όρια της κίνησης του ταλαντωτή και να γραφεί μια έκφραση που να δίνει την περίοδο του ταλαντωτή. Στη συνέχεια αλλάξτε καταλλήλως τη μεταβλητή ολοκλήρωσης στην έκφραση για την περίοδο, έτσι ώστε να βρείτε πως αλλάζει η περίοδος ως συνάρτηση της ενέργειας. Λάβετε (α) το όριο $n \to \infty$, και (β) $n = 1$ και ερμηνεύστε τα αντίστοιχα αποτελέσματα, εξηγώντας γιατί είναι αναμενόμενα (θα χρειαστεί να σχεδιάσετε τα αντίστοιχα γραφήματα των δυναμικών ενεργειών).

4.[1] Δείξτε ότι (α) ο ταλαντωτής με δυναμική ενέργεια

$$V(x) = \begin{cases} 2kx^2, & \text{για } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}kx^2, & \text{για } x < 0 \end{cases}$$

όπου $k > 0$, αν και όχι αρμονικός (δείξτε το), είναι ισοχρονικός, δηλαδή η περίοδος είναι ανεξάρτητη της ενέργειας. (β) Κατασκευάστε ποιοτικά την κίνηση $x(t)$ αυτού του ταλαντωτή. (γ) Μπορείτε να βρείτε άλλους συνδυασμούς των συντελεστών 2 και 1/2 στους δύο κλάδους της δυναμικής ενέργειας έτσι ώστε ο ταλαντωτής να παραμένει ισοχρονικός και να έχει την ίδια περίοδο με τον αρχικό ταλαντωτή του ερωτήματος (α);

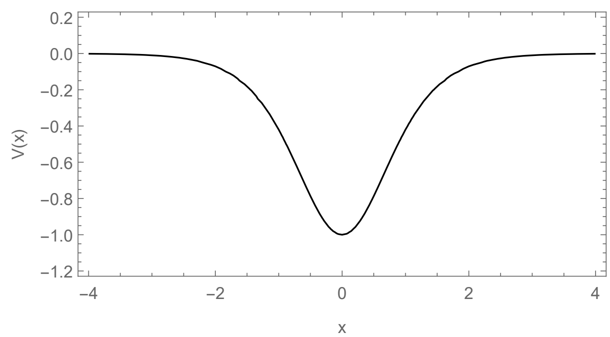
---

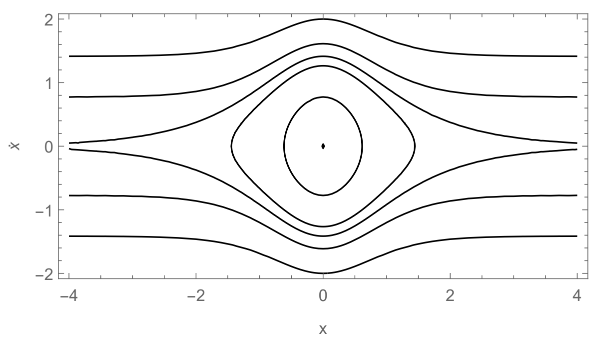
[1] Τα προβλήματα σε έγχρωμο κείμενο είναι αυξημένης δυσκολίας, απαντάτε προαιρετικά.

Λύσεις

---

1. (α) $V'(x) = 2\dfrac{\sinh x}{\cosh^3 x}$ με $V'(x) > 0$ για $x > 0$ και $V(x) < 0$ για $x < 0$, $V''(x) = 2\dfrac{\cosh^2 x - 3\sinh^2 x}{\cosh^4 x}$.
Η $V(x)$ είναι φθίνουσα στο $x \in (-\infty, 0)$ όπου μεταβάλλεται από $V(-\infty) = 0$ σε $V(0) = -1$ και αύξουσα στο $x \in (0, \infty)$ όπου μεταβάλλεται από $V(0) = -1$ σε $V(\infty) = 0$.
Για αρνητικές ενέργειες η κίνηση είναι περατωμένη και οι καμπύλες φάσης είναι κλειστές, ενώ για θετικές ενέργειες το σώμα φτάνει στο $x = +\infty$ ή $-\infty$ χωρίς να αλλάζει η φορά κίνησης και οι καμπύλες φάσης εκτείνονται στο $x \in (-\infty, \infty)$.





(β) Υπάρχει ένα ελάχιστο της $V(x)$ στο $x = 0$. Για $|x| \ll 1$ είναι $V \approx V(0) + \dfrac{1}{2}V''(0)x^2 = -1 + x^2$. Το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{1}{2}\dot{x}^2 + x^2 =$ σταθερά, ή παραγωγίζοντας $\ddot{x} + 2x = 0$, δηλ. η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{2}$ και περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{2}$.
(γ) Το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{1}{2}\dot{x}^2 - \dfrac{1}{\cosh^2 x} = E$ με $E = -\dfrac{1}{\cosh^2 x_0}$ (από αρχικές συνθήκες). Άρα $\dot{x} = \pm\sqrt{2\left(\dfrac{1}{\cosh^2 x} - \dfrac{1}{\cosh^2 x_0}\right)} \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x_0 - \cosh^2 x}}dx = \pm \int \frac{\sqrt{2}}{\cosh x_0}dt$. Με αλλαγή μεταβλητής $\sinh x = \xi$, $\cosh x\, dx = d\xi$ βρίσκουμε $\displaystyle\int \frac{d\xi}{\sqrt{\sinh^2 x_0 - \xi^2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\cosh x_0}t \Leftrightarrow \arcsin\frac{\xi}{\sinh x_0} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\cosh x_0}t + C \Leftrightarrow \frac{\sinh x}{\sinh x_0} = \sin\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{\cosh x_0}t + C\right)$. Από αρχικές συνθήκες η σταθερά υπολογίζεται $C = \dfrac{\pi}{2}$ οπότε η θέση σε κάθε χρόνο δίνεται από $\dfrac{\sinh x}{\sinh x_0} = \cos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\cosh x_0}t\right)$.

Η $\sinh x$ μεταβάλλεται αρμονικά με κυκλική συχνότητα $\omega = \dfrac{\sqrt{2}}{\cosh x_0}$, άρα η περίοδος της κίνησης είναι $T =$

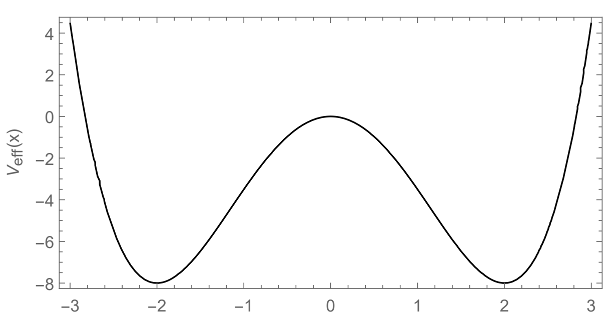
$\dfrac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{2}\,\cosh x_0.$

(δ) Το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{1}{2}\dot{x}^2 - \dfrac{1}{\cosh^2 x} = E$ δίνει $\dot{x} = \pm\sqrt{2E + \dfrac{2}{\cosh^2 x}} \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{\cosh x}{\sqrt{E\cosh^2 x + 1}}dx = \pm\int \sqrt{2}\,dt$. Με αλλαγή μεταβλητής $\sinh x = \xi$, $\cosh x\,dx = d\xi$ βρίσκουμε $\displaystyle\int \frac{d\xi}{\sqrt{1+1/E+\xi^2}} = \pm\sqrt{2E}\,t \Leftrightarrow$ $\operatorname{arcsinh}\dfrac{\xi}{\sqrt{1+1/E}} = \pm\sqrt{2E}\,t + C \Leftrightarrow \dfrac{\xi}{\sqrt{1+1/E}} = \sinh\left(C \pm \sqrt{2E}\,t\right)$, δηλ. η θέση σε κάθε χρόνο δίνεται από $\sinh x = \sqrt{\dfrac{1+E}{E}}\sinh\left(C \pm \sqrt{2E}t\right)$.

Αλλάζοντας μεταβλητή $\sinh x = \xi$, δηλ. θέτοντας $\dot{x}\cosh x = \dot{\xi}$, $\sinh x = \xi$ και $\cosh x = \sqrt{1+\xi^2}$, το ολοκλήρωμα ενέργειας γράφεται $\dfrac{\dot{\xi}^2}{2} - E\xi^2 = 1 + E$. Αυτή είναι εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή για $E < 0$, με κυκλική συχνότητα $\sqrt{-2E}$ και γενική λύση $\xi = \sqrt{\dfrac{1+E}{-E}}\sin(\sqrt{-2E}\,t + C)$, ενώ για $E > 0$ είναι εξίσωση απωστικού παραβολικού δυναμικού με γενική λύση $\xi = \sqrt{\dfrac{1+E}{E}}\sinh(\pm\sqrt{2E}\,t + C)$.

---

2. (α) Οι καρτεσιανές συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα $\vec{a} = \vec{v}\times\vec{B}$, με $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$, $\vec{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$ και $\vec{B} = 2x\hat{z}$, είναι $\ddot{x} = 2x\dot{y}$, $\ddot{y} = -2x\dot{x}$, $\ddot{z} = 0$.
Η τελευταία, σε συνδυασμό με τις αρχικές συνθήκες $z|_{t=0} = 0$ και $\dot{z}|_{t=0} = 0$ σημαίνει ότι $z = 0$ σε κάθε χρόνο, δηλ. το σώμα κινείται στο επίπεδο xy.
Η δεύτερη δίνει ολοκλήρωμα $\dot{y} + x^2 =$ σταθερά και λόγω των αρχικών συνθηκών $x|_{t=0} = 0$ και $\dot{y}|_{t=0} = 4$ βρίσκουμε $\dot{y} = 4 - x^2$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη, καταλήγουμε στην ζητούμενη $\ddot{x} = 8x - 2x^3$.
Η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια είναι $V_{\text{eff}}(x) = -\displaystyle\int (8x - 2x^3)\,dx = -4x^2 + \frac{x^4}{2}$ (μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά), οπότε το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{\dot{x}^2}{2} + \dfrac{x^4 - 8x^2}{2} =$ σταθερά. Από αρχικές συνθήκες $x|_{t=0} = 0$ και $\dot{x}|_{t=0} = v_{0x}$ βρίσκουμε την σταθερά και καταλήγουμε στην ζητούμενη $\dfrac{\dot{x}^2}{2} + \dfrac{x^4 - 8x^2}{2} = \dfrac{v_{0x}^2}{2}$.
(β) Η κινητική ενέργεια διατηρείται γιατί το έργο της δύναμης από το μαγνητικό πεδίο είναι μηδενικό. Άρα $\dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} = \dfrac{v_{0x}^2 + 4^2 + 0}{2}$. Με $\dot{y} = 4 - x^2$ και $\dot{z} = 0$ προκύπτει $\dfrac{\dot{x}^2}{2} + \dfrac{x^4 - 8x^2}{2} = \dfrac{v_{0x}^2}{2}$.
(γ) Η δυναμική ενέργεια είναι $V_{\text{eff}}(x) = \dfrac{x^4 - 8x^2}{2} = \dfrac{(x^2-4)^2}{2} - 8$ και η ενέργεια $\dfrac{v_{0x}^2}{2}$. Από το γράφημα της $V_{\text{eff}}(x)$ συμπεραίνουμε ότι πρέπει να ισχύει $\dfrac{v_{0x}^2}{2} > V_{\text{eff}}(-3) \Leftrightarrow |v_{0x}| > 3$, δηλ. $v_{0x} > 3$ ή $v_{0x} < -3$.



---

3. Από τη διατήρηση της ενέργειας

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + A\left(\frac{x}{x_0}\right)^{2n}$$

βρίσκουμε ότι η κίνηση περιορίζεται στο διάστημα $[-x_1, x_1]$, όπου $x_1 = x_0(E/A)^{1/(2n)}$ από την ααπαίτηση να μηδενίζεται η ταχύτητα στο $x = x_1$. Παράλληλα η περίοδος είναι από την λύση της $dx/dt = \pm\sqrt{(2/m)(E-V)}$:

$$T = 2\sqrt{m/2}\int_{-x_1}^{+x_1}\frac{dx}{\sqrt{E - A(x/x_0)^{2n}}}.$$

Το πρώτο 2άρι οφείλεται στο ότι ο χρόνος μιας περιόδου είναι το 2πλάσιο του χρόνου να μεταβεί από το ένα άκρο στο άλλο. Με την αλλαγή μεταβλητής $\xi = (x/x_0)(A/E)^{1/(2n)} = x/x_1$ το παραπάνω ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο

$$T = \sqrt{2m}x_1\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{\sqrt{E - E\xi^{2n}}} = \sqrt{2m}x_0A^{-1/(2n)}E^{1/(2n)-1/2}I_n. \tag{1}$$

όπου

$$I_n = \int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2n}}}.$$

Επομένως η εξάρτηση της περιόδου από την ενέργεια είναι $\propto E^{1/(2n)-1/2}$. Για $n \to \infty$ (που η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια είναι σαν ένα απειρόβαθο πηγάδι με εύρος $2x_0$) και επομένως το σωματίδιο πηγαινοέρχεται μεταξύ των τοιχωμάτων κινούμενο με σταθερή ταχύτητα σε χρόνο ανάλογο του $1/v = \sqrt{m/(2E)}$) βρίσκουμε από την έκφραση (1): $T \propto E^{-1/2}$ αντίστοιχα για την περίπτωση $n = 1$ (αρμονικός ταλαντωτής η έκφραση (1) οδηγεί σε καμία εξάρτηση από την ενέργεια (ισοχρονικότητα).

---

4. Πρόκειται για μισό και μισό αρμονικό ταλαντωτή. Η περίοδος του 1ου είναι $T_1 = 2\pi\sqrt{m/(4k)}$ και του 2ου $T_2 = 2\pi\sqrt{m/k}$. Επομένως η συνολική περίοδος είναι

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 2\pi\sqrt{m/k}\frac{3}{4}.$$

Η περίοδος, επομένως και η ημιπερίοδος, ενός αρμονικού ταλαντωτή δεν εξαρτάται από την ενέργεια. Ο εν λόγω ταλαντωτής είναι και πάλι ισοχρονικός. Αν θεωρήσουμε ότι ο ταλαντωτής ξεκινάει από το $x = 0$ με ταχύτητα $v_0 > 0$, θα είναι

$$x(t) = \begin{cases} \frac{v_0}{2\omega}\sin(2\omega(t-t_s)), & \text{για } 0 \le 2\omega(t-t_s) < \pi \\ -\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega(t-t_s)), & \text{για } 0 \le \omega(t-t_s) < \pi \end{cases}$$

όπου t_s μετράει το σύνολο των ημιπεριόδων που έχουν προηγηθεί $(0, T_1/2, T_1/2+T_2/2, T_1+T_2/2, T_1+T_2, \ldots)$. Αν οι αρχικές συνθήκες ήταν άλλες θα είχαμε έναν γραμμικό συνδυασμό ημιτόνων και συνημιτόνων κάθε φορά και τα αντίστοιχα διαστήματα θα άλλαζαν έτσι ώστε να εξασφαλίζουν τη μετάβαση όταν μηδενίζεται το x.

Γενικά αν θέσουμε συντελεστές a, b αντί των 4,1 μπροστά από την έκφραση $kx^2/2$ της εκάστοτε δυναμικής ενέργειας θα έχουμε

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 2\pi\sqrt{m/k}\frac{1/\sqrt{a} + 1/\sqrt{b}}{2}.$$

Για να είναι το τελευταίο κλάσμα ίσο με 3/4 θα πρέπει $a > 2/\sqrt{3}$ και το b θα πρέπει να ρυθμιστεί ανάλογα ώστε

$$\frac{1/\sqrt{a} + 1/\sqrt{b}}{2} = 3/4 \Rightarrow b = \frac{1}{(3/2 - 1/\sqrt{a})^2}.$$

Όλα τα παραπάνω ζευγάρια αρμονικών ημιταλαντωτών είναι ισόχρονα με τον δοθέντα ταταντωτή.
