Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής
Χειμερινό εξάμηνο 2024-2025

1η εργασία στη Μηχανική Ι

---

1. Σε μία πλάγια βολή προς βορρά από κάποιο τόπο της Γης το σώμα φτάνει σε μέγιστο ύψος z_{max}. Λόγω της ιδιοπεριστροφής της Γης το σώμα αποκλίνει λίγο προς τη δύση κατά δx. Βρείτε μέσω διαστατικής ανάλυσης πως εξαρτάται η απόκλιση αυτή από το z_{max}, θεωρώντας ότι είναι ανάλογη της γωνιακής ταχύτητας ιδιοπεριστροφής της Γης ω.
Υπόδειξη: Ψάχνουμε σχέση της μορφής $\delta x \propto \omega z_{\text{max}}^{\alpha} g^{\beta}$.

---

2. Σώμα κινείται στο επίπεδο και έχει πολικές συντεταγμένες σε κάθε στιγμή

$$\phi = t\,, \qquad \varpi = \begin{cases} \sin t\,, & 0 \le t \le \pi/2\,, \\ 1\,, & t \ge \pi/2\,. \end{cases}$$

Αυτή είναι η τροχιά της τίγρης στο παράδειγμα 2.3 που λύθηκε στο μάθημα, σε κατάλληλες μονάδες.
(α) Βρείτε την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς σε κάθε στιγμή.
Υπόδειξη: Θυμηθείτε πρώτα (δείξτε) ότι ισχύει $\mathcal{R} = \dfrac{v^3}{|\vec{a} \times \vec{v}|}$.
(β) Σε ποια φάση της τροχιάς κουράζεται περισσότερο η τίγρης;

---

3. Από ύψος h πάνω από το έδαφος αφήνουμε σώμα μάζας m στο οποίο εκτός του βάρους ασκείται και αντίσταση $-km\vec{v}$ (με k σταθερά).
(α) Δείξτε ότι στο όριο της μικρής αντίστασης το σώμα θα φτάσει στο έδαφος με ταχύτητα $\sqrt{2gh} - 2kh/3$.
Υπόδειξη: Διαταρακτικά θεωρώντας το k «μικρή» παράμετρο.
(β) Δείξτε ότι «μικρό» k σημαίνει $k \ll \sqrt{g/h}$.

Λύσεις

1. $\delta x \propto \omega z_{\max}^{\alpha} g^{\beta} \Rightarrow [L] = [T]^{-1}[L]^{\alpha}([L][T]^{-2})^{\beta}$, άρα $0 = -1 - 2\beta$ από χρόνους και $1 = \alpha + \beta$ από μήκη, με λύση $\beta = -1/2$, $\alpha = 3/2$. Επομένως $\delta x \propto \omega z_{\max}^{3/2} g^{-1/2}$.

2. Για $t < \pi/2$ είναι $\vec{v} = \cos t\hat{\varpi} + \sin t\hat{\phi}$, $\vec{a} = -2\sin t\hat{\varpi} + 2\cos t\hat{\phi}$, $\mathcal{R} = 1/2$.
Για $t > \pi/2$ είναι $\vec{v} = \hat{\phi}$, $\vec{a} = -\hat{\varpi}$, $\mathcal{R} = 1$.
Η τίγρης κουράζεται λιγότερο στη δεύτερη φάση γιατί ασκεί την μισή δύναμη στο έδαφος σε σχέση με την πρώτη φάση. (Η δύναμη $m\vec{a}$ ισούται με την στατική τριβή που είναι η αντίδραση της δύναμης που ασκεί η τίγρης στο έδαφος. Ακόμα και αν λαμβάναμε υπόψη την αντίσταση του αέρα, αυτή είναι ίδια στις δύο φάσεις αφού το μέτρο της ταχύτητας είναι ίδιο.)

3. (α) Επιλέγω άξονα x με φορά προς τα κάτω και αρχή στην αρχική θέση του σώματος.
Α' τρόπος: Θέτω $x = x_0(t) + kx_1(t)$ στην εξίσωση κίνησης $\ddot{x} = g - k\dot{x}$.
Σε μηδενική τάξη ως προς k (πιο σωστά ως προς μια αδιάστατη παράμετρο ανάλογη του k) έχουμε τη λύση χωρίς αντίσταση $\ddot{x}_0 = g \Leftrightarrow \dot{x}_0 = gt$, $x_0 = gt^2/2$, οπότε $h = gt_0^2/2 \Leftrightarrow t_0 = \sqrt{2h/g}$.
Κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης όρους έχουμε $\ddot{x}_1 = -\dot{x}_0 \Leftrightarrow \dot{x}_1 = -gt^2/2 \Leftrightarrow x_1 = -gt^3/6$.
Άρα $x = gt^2/2 - kgt^3/6$ και $\dot{x} = gt - kgt^2/2$.
Η εξίσωση $x(t) = h$ έχει λύση $t = t_0 + kt_1$. Αντικαθιστώντας και κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης όρους έχουμε $h = g(t_0^2 + 2kt_0t_1)/2 - kgt_0^3/6 \Leftrightarrow t_1 = t_0^2/6$. Η ταχύτητα στο έδαφος είναι $\dot{x} = g(t_0 + kt_1) - kgt_0^2/2 = \sqrt{2gh} - 2kh/3$.
Β' τρόπος: Αφού με ενδιαφέρει η σχέση ταχύτητας – θέσης βρίσκω την αντίστοιχη εξίσωση $v\dfrac{dv}{dx} = g - kv$ (θέτοντας $\ddot{x} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt}$) και την λύνω διαταρακτικά, θέτοντας $v = v_0(x) + kv_1(x)$.
Σε μηδενική τάξη ως προς k έχουμε τη λύση χωρίς αντίσταση $v_0\dfrac{dv_0}{dx} = g \Leftrightarrow \dfrac{v_0^2}{2} = gx$.
Κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης όρους έχουμε $v_0v_1' + v_0'v_1 = -v_0 \Leftrightarrow v_0v_1 = -\displaystyle\int_0^x \sqrt{2gx}\,dx \Leftrightarrow v_1 = -2x/3$.
Άρα $v \approx \sqrt{2gx} - 2kx/3$.
Γ' τρόπος: Λύνω ακριβώς την εξίσωση $v\dfrac{dv}{dx} = g - kv \Leftrightarrow \left(1 + \dfrac{g/k}{v - g/k}\right)dv = -kdx \Leftrightarrow v + \dfrac{g}{k}\ln\left(1 - \dfrac{kv}{g}\right) = -kx$. Αναπτύσσοντας κατά Taylor με $\ln(1+\epsilon) = \epsilon - \dfrac{1}{2}\epsilon^2 + \dfrac{1}{3}\epsilon^3$ βρίσκω $v^2 + \dfrac{2k}{3g}v^3 = 2gx$. Σε μηδενική τάξη $v = \sqrt{2gx}$. Με $v = \sqrt{2gx} + \delta$ βρίσκω $\delta = -2kh/3$.
Δ' τρόπος: Σε πρώτη τάξη ως προς k το έργο της αντίστασης είναι $-\displaystyle\int_0^{t_0} mkv^2dt = -\int_0^{t_0} mkg^2t^2dt = -\dfrac{mkg^2t_0^3}{3}$. Άρα το σώμα θα φτάσει στο έδαφος με κινητική ενέργεια $\dfrac{mv^2}{2} = mgh - \dfrac{mkg^2t_0^3}{3} \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}\sqrt{1 - gkt_0^3/3h} \approx \sqrt{2gh}(1 - gkt_0^3/6h) = \sqrt{2gh} - 2kh/3$.
(β) Στο αποτέλεσμα η διόρθωση είναι μικρή σε σχέση με τον πρώτο όρο αν $k \ll \sqrt{g/h}$.
Ισοδύναμα, η αντίσταση είναι πολύ μικρότερη του βάρους αν $kmv \ll mg$ σε όλη τη διάρκεια της κίνησης, άρα αν $km\sqrt{2gh} \ll mg \Leftrightarrow k \ll \sqrt{g/h}$.
Η αδιάστατη παράμετρος ως προς την οποία αναπτύχθηκε η λύση είναι η $k\sqrt{h/g}$.