ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

πτυχιακές Εξετάσεις Μηχανικής Ι

16 Μαΐου 2022

Να λύσετε 3 από τα 4 προβλήματα.
Όλα τα προβλήματα είναι ισοδύναμα.

Πρόβλημα Α

Ένας μετεωρίτης ξεκινά σε πολύ μεγάλη απόσταση από τη Γη με σχεδόν μηδενική ταχύτητα και εκτελεί, ελκόμενος βαρυτικά από τη Γη, μια παραβολική τροχιά, περνώντας ξυστά πάνω από την επιφάνειά της. Δίδονται η μάζα της Γης M και η ακτίνα αυτής R. [Θεωρήστε τη μάζα του μετεωρίτη πολύ μικρή σε σχέση με αυτή της Γης, δηλαδή θεωρήστε τη Γη ακίνητη, και μελετήστε το πρόβλημα στο σύστημα αναφοράς της Γης.]

1. Κατασκευάστε το διάγραμμα του ενεργού δυναμικού $V_{εν}(r)$ για το μετεωρίτη, σημειώνοντας πάνω σε αυτό την ενέργεια ανά μονάδα μάζας του μετεωρίτη καθώς και το σημείο αναστροφής της ακτινικής ταχύτητας.
2. Υπολογίστε τη στροφορμή ανά μονάδα μάζας του μετεωρίτη, ως συνάρτηση των G, M, R.
3. Σε ποια απόσταση από τη Γη, ο μετεωρίτης θα πλησιάζει τη Γη με τη μέγιστη δυνατή ακτινική ταχύτητα;

Η βαρυτική σταθερά G θεωρείται γνωστή.

Πρόβλημα Β

Ένα σωματίδιο μάζας $m = 1$ κινείται στο μονοδιάστατο δυναμικό

$$V(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\,, & \text{για } x \geq 0\,. \\ \infty\,, & \text{για } x < 0\,. \end{cases}$$

Το ∞ σημαίνει ότι το σωματίδιο δεν επιτρέπεται να περάσει στο αρνητικό κομμάτι του άξονα x.

1. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα φάσης του σωματιδίου, εξηγώντας τι μορφή έχουν οι καμπύλες που σχεδιάσατε. Να σημειώσετε κάποιες χαρακτηριστικές τιμές πάνω στους άξονες της καμπύλης που αντιστοιχεί σε ενέργεια $E = 1$.
2. Γράψτε την εξίσωση κίνησης του σωματιδίου και σχεδιάστε τη λύση της για αρχικές συνθήκες $x(0) = 1, v(0) = 0$.
3. Ποια είναι η περίοδος της ταλάντωσης του σωματιδίου;

Πρόβλημα Γ

Ένα σωματίδιο κινείται στο βαρυτικό πεδίο μεταξύ δύο λεπτών ακλόνητων ομόκεντρων σφαιρικών φλοιών ίδιας μάζας M και ακτίνων R και $2R$ αντίστοιχα.

1. Να υπολογιστεί το βαρυτικό πεδίο μεταξύ των δύο σφαιρικών φλοιών.
2. Αν αρχικά το σωματίδιο ξεκινήσει από την εσωτερική επιφάνεια του εξωτερικού φλοιού με ταχύτητα 0, με τι ταχύτητα θα φτάσει στον εσωτερικό φλοιό;
3. Αν το σωματίδιο του προηγούμενου ερωτήματος, διαπεράσει τον εσωτερικό φλοιό, χωρίς να ασκηθεί επάνω του κάποια άλλη δύναμη εκτός της βαρυτικής, πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να διασχίσει ολόκληρο τον εσωτερικό φλοιό (από το σημείο εισόδου μέχρι το αντιδιαμετρικό σημείο);

Η βαρυτική σταθερά G θεωρείται γνωστή.

Πρόβλημα Δ

Μια μπάλα μάζας M αφήνεται από ύψος H πάνω από το δάπεδο. Αν, εκτός του βάρους της, ασκείται και «μικρή» αντίσταση μέτρου

$$F_A = \frac{Mv^2}{200H}\,,$$

όπου v η ταχύτητα της μπάλας, σε πόσο ύψος θα αναπηδήσει η μπάλα για πρώτη φορά;

Θεωρήστε τη κρούση με το δάπεδο ελαστική.

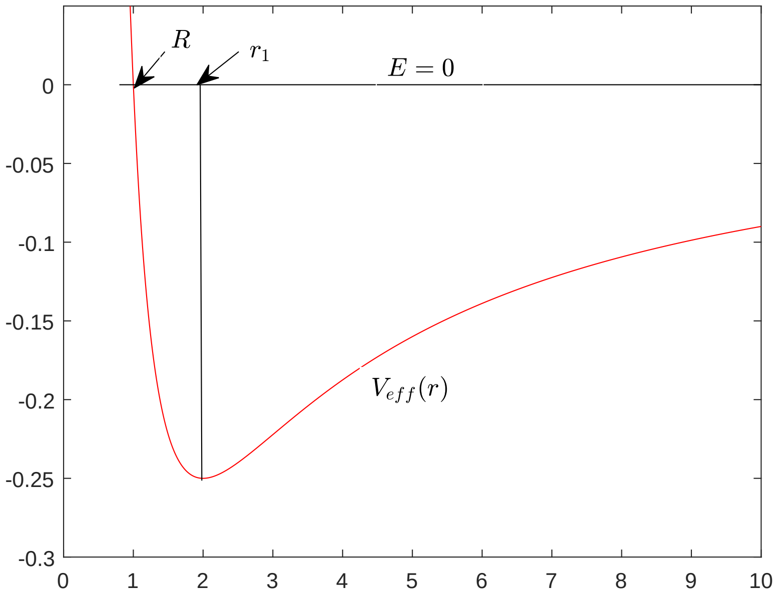
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσεγγιστική έκφραση για μικρό ϵ: $\ln(2 - e^{-\epsilon}) \approx \epsilon - \epsilon^2$.

Λύσεις

Πρόβλημα Α

1. Αφού η τροχιά είναι παραβολική είναι $E = 0$. Η δε ακτίνα αναστροφής της ακτινικής ταχύτητας είναι η R αφού στο σημείο αυτό η τροχιά εφάπτεται στην επιφάνεια της Γης. Το ενεργό δυναμικό είναι

$$V_{\varepsilon\nu}(r) = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} \ .$$



2. Από το $V_{\varepsilon\nu}(R) = E = 0$ βρίσκουμε $l = \sqrt{2GMR}$.
3. Αφού ζητάμε $|\dot{r}| = \max$ και

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{\varepsilon\nu}(r) = E = 0$$

η ακτινική ταχύτητα θα αποκτά τη μέγιστη (απολύτως) τιμή στο σημείο που $V_{\varepsilon\nu}(r) = \min$. Όμως

$$V'_{\varepsilon\nu} = 0 \Rightarrow -\frac{l^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0 \ .$$

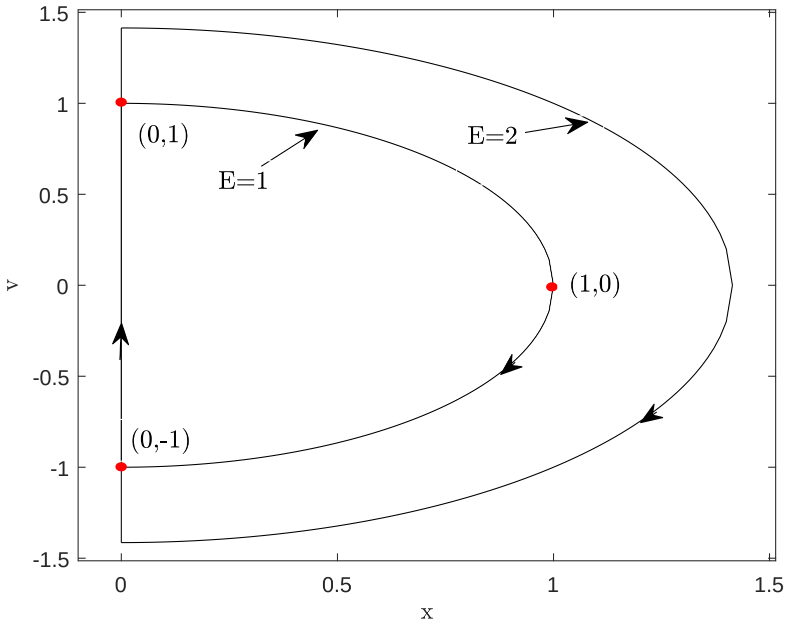
Η λύση αυτής δίνει $r_1 = 2R$. Η μέγιστη ταχύτητα προσέγγισης θα επιτυγχάνεται σε ακτίνα ίση με $2R$.

Πρόβλημα Β

1. Οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων έχουν τη μορφή ημικυκλίων

$$\frac{x^2}{2} + \frac{v^2}{2} = E$$

για τα θετικά x. Το σωματίδιο δεν μπορεί να περάσει στα αρνητικά x, οπότε τα ημικύκλια κλείνουν στον άξονα των ταχυτήτων (η ταχύτητα αλλάζει ακαριαία πρόσημο).



2. Αφού $V = x^2/2$ θα είναι

$$\ddot{x} = -\frac{V'(x)}{m} = -x$$

ενόσω $x > 0$, οπότε η κίνηση είναι

$$x(t) = \cos(t)$$

για $t \in [0, \pi/2]$. Στη συνέχεια το σωματίδιο αλλάζει αστραπιαία ταχύτητα (από -1 σε +1) και ακολουθεί πάλι ημιτονοειδή κίνηση

$$x(t) = \sin(t - \pi/2) = -\cos(t)$$

για $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$ κ.ο.κ. Συνολικά η κίνηση θα είναι

$$x(t) = |\cos(t)|\ ,$$

για όλους τους χρόνους.

3. Η κίνηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.

Πρόβλημα Γ

1. Το βαρυτικό πεδίο μεταξύ των δύο φλοιών θα οφείλεται στον εσωτερικό μόνο φλοιό και θα είναι

$$\mathbf{g}(r) = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

αφού στο εσωτερικό του εξωτερικού φλοιού ο εξωτερικός φλοιός έχει μηδενικό πεδίο.
2. Από διατήρηση ενέργειας

$$0 - \frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{2R} = \frac{1}{2}m(v(r))^2 - \frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{r}$$

όπου m η μάζα του σωματιδίου. Ο πρώτος όρος δυναμικής ενέργειας είναι η σταθερή δυναμική ενέργεια στο εσωτερικό του εξωτερικού φλοιού, ενώ ο δεύτερος όρος είναι ο όρος της μεταβλητής δυναμικής ενέργειας στο εξωτερικό του εσωτερικού φλοιού. Επομένως

$$v(R) = \sqrt{\frac{GM}{R}}\,.$$

3. Στο εσωτερικό και των δύο φλοιών το βαρυτικό πεδίο μηδενίζεται, επομένως όταν θα εισέλθει στον εσωτερικό φλοιό θα κινείται ομαλά με όση ταχύτητα απέκτησε κατά την κίνησή του στο διάκενο μεταξύ των δύο φλοίων που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Επομένως

$$T = \frac{2R}{v} = 2\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\,.$$

Πρόβλημα Δ

*Προσεγγιστική λύση:*Σε μηδενική τάξη (αγνοώντας τη μικρή δύναμη της αντίστασης) $v^2 = 2gs$ και το έργο της δύναμης αντίστασης είναι $-2\int_0^H \frac{Mv^2}{200H}ds = -\frac{MgH}{100}$. Το 2 οφείλεται στο ότι η διαδρομή διαγράφεται 2 φορές - μία κατά την κάθοδο και μία κατά την άνοδο. Άρα $MgH_1 = MgH - \frac{MgH}{100} \Leftrightarrow H_1 = 0.99H$.

Ακριβής λύση: Κάθοδος $Mv\frac{dv}{ds} = Mg - k\frac{Mv^2}{2}$ με $k = \frac{1}{100H}$. Ολοκληρώνοντας από το μέγιστο ύψος μέχρι το έδαφος βρίσκουμε $\int_0^v \frac{v\,dv}{g - kv^2/2} = \int_0^H ds \Leftrightarrow v^2 = \frac{2g}{k}\left(1 - e^{-kH}\right)$.

Άνοδος $Mv\frac{dv}{dz} = -Mg - k\frac{Mv^2}{2}$. Ολοκληρώνοντας από το έδαφος μέχρι το μέγιστο ύψος βρίσκουμε $-\int_v^0 \frac{v\,dv}{g + kv^2/2} = \int_0^{H_1} dz \Leftrightarrow H_1 = \frac{1}{k}\ln\left(1 + \frac{kv^2}{2g}\right)$ και αντικαθιστώντας την ταχύτητα $H_1 = \frac{1}{k}\ln\left(2 - e^{-kH}\right)$.

Ανάπτυγμα $\ln\left(2 - e^{-\epsilon}\right) \approx \epsilon - \epsilon^2$, άρα $\frac{H_1}{H} \approx 1 - kH = 0.99$.