



Θέμα 1^ο:

Έστω μονοδιάστατη κίνηση (σε άξονα x) ενός ταλαντωτή μάζας $m = 1$ στον οποίο εκτός από τη δύναμη επαναφοράς $-x$ (σε κατάλληλες μονάδες) ασκείται και μικρή δύναμη αντίστασης με μέτρο ανάλογο του τετραγώνου της ταχύτητας εv^2 . Η αρχική θέση είναι $-x_0 < 0$, η αρχική ταχύτητα μηδενική και στα παρακάτω μας ενδιαφέρει η κίνηση μέχρι να ξαναμηδενιστεί η ταχύτητα στη θέση x_1 .

(α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης.

(β) Γράψτε την διαφορική εξίσωση που δίνει την κινητική ενέργεια $T = v^2/2$ σαν συνάρτηση της θέσης x .

(γ) Επιλύστε διαταρακτικά την διαφορική εξίσωση και βρείτε την $T(x)$.

(δ) Πόσο διαφέρει η θέση x_1 από την θέση μηδενισμού της ταχύτητας απουσία αντίστασης;

Θέμα 2^ο:

Ένα σωματίδιο μοναδιαίας μάζας ($m = 1$) κινείται σε 1 διάσταση υπό την επίδραση κάποιας συντηρητικής δύναμης που αντιστοιχεί σε δυναμική ενέργεια $V(x)$. Η ταχύτητά του όταν βρίσκεται στο σημείο x δίνεται από την έκφραση $u(x) = u_0 + ax$, όπου u_0 και a κάποιες σταθερές.

(α) Χρησιμοποιώντας τη σχέση διατήρησης της ενέργειας, να υπολογίσετε την έκφραση της δυναμικής ενέργειας ως συνάρτηση της θέσης $V(x)$.

(β) Αν $u_0 > 0$ και $a < 0$ η ευθεία γραμμή που περιγράφει την κίνηση στον χώρο των φάσεων τέμνει τον άξονα του x στο σημείο $x_{\text{τελ}} = -u_0/a > 0$. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί το σωματίδιο για να φτάσει στο σημείο αυτό ξεκινώντας από το $x = 0$;

(γ) Θα συνεχίσει το σωματίδιο στο 4ο τεταρτημόριο (στην περιοχή $u < 0$, $x > x_{\text{τελ}}$);

(δ) Αν η δυναμική ενέργεια είναι αυτή του ερωτήματος (α) και η ενέργεια του σωματιδίου είναι ίση με $V(0)$ σχεδιάστε ποιοτικά την κίνηση του σωματιδίου στο χώρο των φάσεων.

Θέμα 3^ο:

Δύο ίδια σωματίδια έχουν μάζα m , φορτίο q και ασκούν απωστική δύναμη μέτρου k/r^2 το ένα στο άλλο όταν απέχουν απόσταση r . Αρχικά βρίσκονται μακριά το ένα από το άλλο και το πρώτο είναι ακίνητο.

(α) Έστω ότι το πρώτο κρατείται συνεχώς ακίνητο. Με τι ταχύτητα πρέπει να πετάξουμε το δεύτερο μετωπικά προς το πρώτο αν θέλουμε τα φορτία να πλησιάσουν σε ελάχιστη απόσταση r_0 ;

(β) Όμοια με το ερώτημα (α), αλλά αν η παράμετρος κρούσης είναι $0 < b < r_0$.

(γ) Όμοια με το ερώτημα (α), αλλά αν και το πρώτο φορτίο είναι ελεύθερο να κινηθεί (αρχικά είναι ακίνητο).

bonus (δ) Όμοια με το ερώτημα (γ), αλλά αν η παράμετρος κρούσης είναι $0 < b < r_0$.

Θέμα 4^ο:

Μια ευθυγραμμισμένη αλυσίδα αποτελείται από N σωματίδια, μάζας m το καθένα, που συνδέονται το ένα με το άλλο με αβαρείς ράβδους μήκους L (ολόκληρη η αλυσίδα έχει μήκος $(N-1)L$ και συνολική μάζα Nm).

(α) Ποια η τιμή του βαρυτικού δυναμικού και το μέτρο της έντασης του βαρυτικού πεδίου κατά μήκος της αλυσίδας σε απόσταση L πέρα από το άκρο αυτής;

(β) Αν η αλυσίδα μεγαλώσει απεριόριστα ($N \rightarrow \infty$) το βαρυτικό δυναμικό και το μέτρο της έντασης στο εν λόγω σημείο μεγαλώνουν απεριόριστα; (Θυμηθείτε ότι η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^\rho)$ αποκλίνει για $\rho \leq 1$, αλλά συγκλίνει για $\rho > 1$.)

(γ) Η αντίστοιχη αλυσίδα για $N = 2$, με τη μία ράβδο που ενώνει τα δύο σωματίδια να έχει αντικατασταθεί από ένα αβαρές νήμα ίδιου μήκους, βρίσκεται αρχικά ακίνητη στο εξωτερικό ενός μεγάλης μάζας $M \gg 2m$ σφαιρικού ομογενούς λεπτού φλοιού ακτίνας $R > L$, έτσι ώστε η ευθεία της αλυσίδας να έχει κατεύθυνση προς το κέντρο του φλοιού. Η κοντινή μάζα της αλυσίδας είναι αρχικά σε απόσταση R από το κέντρο του φλοιού και η μακρινή σε απόσταση $R + L$. Όταν η πρώτη μάζα περάσει στο εσωτερικό του φλοιού τι ταχύτητα θα έχει;

(δ) Το νήμα στη συνέχεια θα μείνει τεντωμένο;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ: (δεν χρειάζονται απαραίτητα)

Η διαφορική $\frac{dy}{dx} + Ay = Bx$, με A, B σταθερές, έχει γενική λύση $y = De^{-Ax} + \frac{B}{A}x - \frac{B}{A^2}$.