



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, 20 Ιανουαρίου 2025

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Απαντήστε και στα 4 θέματα, Καλή επιτυχία

Ονοματεπώνυμο: _____, ΑΜ: _____

Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Θέμα 1^ο:

Σωματίδιο μάζας m κινείται πάνω σε αεροτροχιά, δίχως τριβές, η οποία έχει το σχήμα έλλειψης

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{2y}{a}\right)^2 = 1.$$

Το σωματίδιο είναι επίσης συνδεδεμένο με την αρχή των αξόνων μέσω ελατηρίου μηδενικού φυσικού μήκους και σκληρότητας k .

(α) Διατηρείται η ενέργεια κατά μήκος της κίνησης; Αν ξεκινήσει το σωματίδιο από τη θέση $(a, 0)$ με ταχύτητα σχεδόν μηδενική προς τη θετική φορά του άξονα y με τι ταχύτητα θα φτάσει στο σημείο $(0, a/2)$;

(β) Διατηρείται γενικά η στροφορμή του σωματιδίου;

(γ) Δεδομένου ότι η κίνηση στο επίπεδο υπό την επίδραση αποκλειστικά ενός ελατηρίου μηδενικού φυσικού μήκους είναι μια έλλειψη, μπορείτε να βρείτε κατάλληλη αρχική συνθήκη ταχύτητας στο $(a, 0)$ ώστε το σωματίδιο να διαγράψει την ίδια έλλειψη με την αεροτροχιά χωρίς την ύπαρξη αυτής; [Δουλέψτε σε καρτεσιανές συντεταγμένες.] Αν κινηθεί με αυτή την αρχική συνθήκη πάνω στην αεροτροχιά ποια θα είναι η δύναμη αντίδρασης της αεροτροχιάς;

(δ) Χρησιμοποιήστε τις αρχικές συνθήκες του ερωτήματος (γ) για να υπολογίσετε την ακτίνα καμπυλότητας στο σημείο $A:(a, 0)$. Εξαρτάται το αποτέλεσμα σας από τις αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιήσατε;

Θέμα 2^ο:

Σώμα $m = 1$ κινείται μονοδιάστατα στο πεδίο

$$V(x) = -x - 2 \cos x.$$

(α) Βρείτε τα ευσταθή και ασταθή σημεία ισορροπίας.

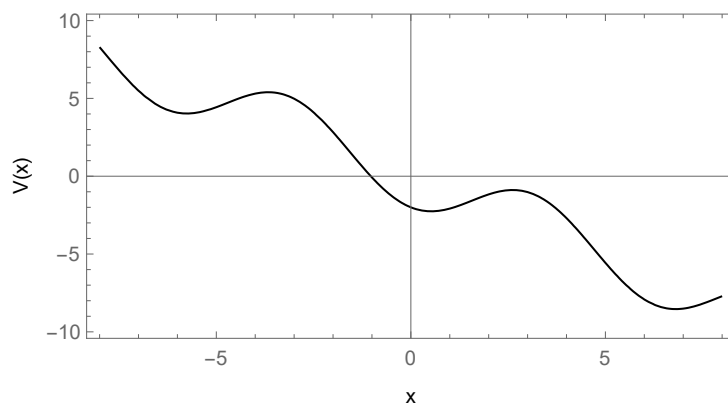
(β) Έστω το σώμα βρίσκεται αρχικά στο $x_i = 0$. Για ποιες τιμές της αρχικής του ταχύτητας $v_i > 0$ διαφεύγει στο άπειρο;

(γ) Σχεδιάστε στο χώρο φάσης τροχιές για την περίπτωση του προηγούμενου ερωτήματος.

(δ) (bonus) Στο σώμα ασκείται επιπλέον αντίσταση μέτρου $\dot{x}^2/2$. Αν αρχικά βρίσκεται στο $x_i = 0$ και έχει ταχύτητα $v_i = 2$ βρείτε το σημείο που θα σταματήσει στιγμιαία. Σε ποιο σημείο θα καταλήξει;

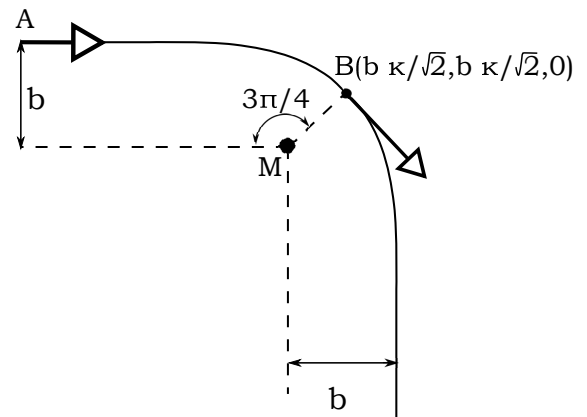
Υπόδειξη: Γράψτε διαφορική για την κινητική ενέργεια συναρτήσει της θέσης και επιλύστε την.

Δίνεται ότι η γενική λύση της $\frac{dT}{dx} + T = 1 - 2 \sin x$ είναι $T = De^{-x} - \sin x + \cos x + 1$.



Θέμα 3^ο:

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο βαρυτικό πεδίο ενός ακλόνητου βαρυτικού κέντρου που έχει μάζα M και βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Αρχικά, όταν το σωματίδιο βρισκόταν σε πολύ μεγάλη απόσταση $r(0) \rightarrow \infty$, η διεύθυνση κίνησής του ήταν η ευθεία $y = b, z = 0$ και κινούνταν προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x . Καθώς το σωματίδιο πλησιάζει στο βαρυτικό κέντρο έλκεται από αυτό και διέρχεται, στην κοντινότερη απόστασή του από το κέντρο, από το σημείο $B : (b\kappa/\sqrt{2}, b\kappa/\sqrt{2}, 0)$, όπου κ κάποιος θετικός αριθμός μικρότερος του 1. Στη συνέχεια απομακρύνεται από το βαρυτικό κέντρο και τελικά κινείται στην ευθεία $x = b, z = 0$ κατά την αρνητική κατεύθυνση του άξονα y .



(α) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα της ενεργού δυναμικής ενέργειας και το επίπεδο της ενέργειας για τη δοσμένη κίνηση. Δείξτε πάνω στο διάγραμμα τα σημεία που αντιστοιχούν στα σημεία της τροχιάς A, B.

(β) Ποιο είναι το πρόσημο της ενέργειας που αντιστοιχεί στη δοσμένη τροχιά και τι είδους τροχιά θα εκτελέσει το σωματίδιο; Ποια είναι η σχέση της τελικής προς την αρχική ταχύτητα;

(γ) Υπολογίστε την αρχική ταχύτητα από τα δεδομένα του προβλήματος, ως συνάρτηση των M, b, κ .

(δ) Κατά τι γωνία στρέφεται το διάνυσμα της ταχύτητας από την αρχική μέχρι την τελική κίνηση;

(ε) (bonus) Η συνολική πολική γωνία της τροχιάς (από την οποία υπολογίζεται η γωνία σκέδασης) δίνεται από το ολοκλήρωμα $\Delta\phi = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} |\dot{\phi}/\dot{r}| dr = \dots = 2 \int_{\xi_1}^{\pi/2} d\xi$, όπου η μεταβλητή ξ συνδέεται με την ακτινική θέση του σωματιδίου r μέσω της σχέσης

$$\frac{b}{r} = \frac{GM}{bv_{\infty}^2} + \sin \xi \sqrt{\left(\frac{GM}{bv_{\infty}^2}\right)^2 + 1}.$$

Δείξτε ότι το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται από το δεύτερο με την παραπάνω αλλαγή μεταβλητής. Στη συνέχεια, δεδομένης της απάντησης που βρήκατε στο ερώτημα (δ) υπολογίστε το ξ_1 που αντιστοιχεί σε άπειρη απόσταση του σωματιδίου (η ολοκλήρωση είναι από τη θέση A ως τη θέση B) και από αυτήν την τιμή της ποσότητας $GM/(bv_{\infty}^2)$. Από το αποτέλεσμα του (γ) βρείτε την τιμή της κ .

Θέμα 4^ο:

Κυκλικός ομογενής δίσκος ακτίνας a έχει επιφανειακή πυκνότητα μάζας σ . Πάνω στον άξονά του z η ένταση του πεδίου βαρύτητας που δημιουργεί δίνεται ότι έχει την ακόλουθη μορφή με A, B και C σταθερές:

$$\vec{g} = \left[A + \frac{B}{(1 + a^2/r^2)^C} \right] \hat{r}.$$

(α) Βρείτε την σταθερά A απαιτώντας στο όριο $a \gg r$ η έκφραση να συμφωνεί με το πεδίο άπειρου φύλλου.

(β) Βρείτε τις σταθερές B και C απαιτώντας στο όριο $a \ll r$ η έκφραση να συμφωνεί με το πεδίο σημειακής μάζας. [Δίνεται το ανάπτυγμα $(1 + \epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$ για $|\epsilon| \ll 1$.]

(γ) Αν ένα σημειακό σώμα αφεθεί με μηδενική ταχύτητα σε σημείο του άξονα του δίσκου που απέχει z_0 από το κέντρο με τι ταχύτητα θα φτάσει στο δίσκο;

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^ο:

(α) Η ενέργεια διατηρείται αφού η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική και η δύναμη αντίδρασης της αεροτροχιάς είναι κάθετη σε αυτήν και επομένως δεν παράγει έργο. Από διατήρηση της ενέργειας $0^+ + \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(a/2)^2 \Rightarrow (3/4)ka^2 = mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{(3/4)(k/m)a}$.

(β) Ενώ η δύναμη του ελατηρίου είναι κεντρική, η δύναμη της αντίδρασης δεν είναι, οπότε δεν διατηρείται η στροφορμή, όπως φαίνεται εξάλλου και από το προηγούμενο αποτέλεσμα, όπου αρχικά η στροφορμή είναι 0 αλλά μετά, στο σημείο $(0, a/2)$ δεν είναι.

(γ) Έστω ότι η κίνηση οφείλεται αποκλειστικά στο ελατήριο. Αναλύοντας τις εξισώσεις κίνησης σε καρτεσιανές συντεταγμένες βρίσκουμε

$$m\ddot{x} = -kx, \quad m\ddot{y} = -ky$$

με αρχικές συνθήκες $x(0) = a, y(0) = 0, v_x(0) = 0, v_y(0) = v_0$, με λύση

$$x(t) = a \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \quad y(t) = \frac{v_0}{\sqrt{k/m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right),$$

που ικανοποιούν την έλλειψη

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y\sqrt{k/m}}{v_0}\right)^2 = 1.$$

Όποτε η απαίτηση για να κινείται στην έλλειψη της αεροτροχιάς είναι $v_0/\sqrt{k/m} = a/2$. Σε αυτή την περίπτωση αφού η κίνηση είναι αυτή της αεροτροχιάς είτε υπάρχει αυτή είτε όχι, η αντίδραση θα είναι μηδενική και τότε θα διατηρείται και η στροφορμή (κεντρικό πεδίο).

(δ) Η ακτίνα καμπυλότητας στο αρχικό σημείο μπορεί να βρεθεί από τον προσδιορισμό της κεντρομόλου δύναμης:

$$m\frac{v_0^2}{\mathcal{R}} = ka \Rightarrow \mathcal{R} = \frac{m(a/2)^2(k/m)}{ka} = a/4.$$

Η ακτίνα καμπυλότητας είναι καθαρά γεωμετρικό χαρακτηριστικό και δεν εξαρτάται από τα κινηματικά χαρακτηριστικά.

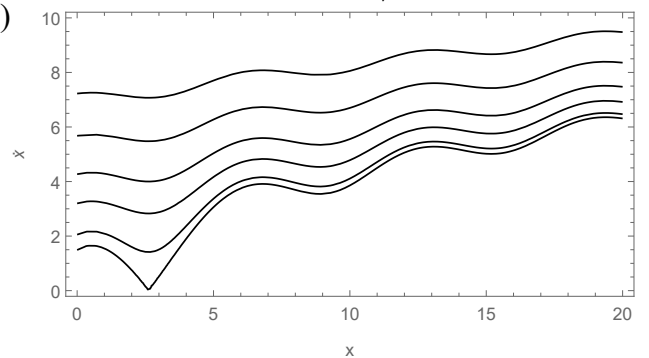
Θέμα 2^ο:

(α) $V'(x) = -1 + 2 \sin x$ μηδενίζεται στα $\sin x = 1/2 \Leftrightarrow x = 2n\pi + \pi/6$ και $2n\pi + 5\pi/6$ με ακέραιο n . Η $V''(x) = 2 \cos x$ είναι θετική στα $x = 2n\pi + \pi/6$, άρα αυτά είναι ευσταθή σημεία

ισορροπίας, στα οποία $V(x) = -2n\pi - \pi/6 - \sqrt{3}$. Όμοια είναι αρνητική στα $x = 2n\pi + 5\pi/6$, άρα αυτά είναι ασταθή σημεία ισορροπίας, στα οποία $V(x) = -2n\pi - 5\pi/6 + \sqrt{3}$.

(β) Πρέπει η ενέργεια να είναι μεγαλύτερη από όλα τα μέγιστα σε θετικά x . Αρκεί να είναι μεγαλύτερη από το πρώτο (τότε θα είναι μεγαλύτερη και από όλα τα επόμενα), δηλ. πρέπει να ισχύει $E > V(5\pi/6) \Leftrightarrow \frac{v_i^2}{2} - 2 > -\frac{5\pi}{6} + \sqrt{3} \Leftrightarrow v_i > \sqrt{4 - \frac{5\pi}{3} + 2\sqrt{3}}$.

(γ)



(δ) Όσο κινείται προς μεγαλύτερα x η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{x} = -V'(x) - \frac{\dot{x}^2}{2} = 1 - 2 \sin x - \frac{\dot{x}^2}{2}$. Αφού μας ενδιαφέρει η σχέση ταχύτητας-θέσης γράφουμε το αριστερό μέλος σαν $\frac{dv}{dx}v = \frac{dT}{dx}$, όπου $T = \frac{v^2}{2}$ η κινητική ενέργεια. Έτσι η εξίσωση κίνησης γράφεται σαν γραμμική, μη-ομογενής διαφορική εξίσωση $\frac{dT}{dx} + T = 1 - 2 \sin x$.

Η λύση της ομογενούς είναι De^{-x} . Μια μερική λύση είναι $T = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3$ με την αντικατάσταση να δίνει $C_1 \cos x - C_2 \sin x + C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 = 1 - 2 \sin x$, δηλ. $C_1 + C_2 = 0$, $-C_2 + C_1 = -2$, $C_3 = 1$ και τελικά $C_1 = -1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1$. Άρα η γενική λύση είναι $T = De^{-x} - \sin x + \cos x + 1$. Αρχικά $x = 0$ και $T = v_i^2/2 = 2$, άρα $D = 0$. Είναι λοιπόν $T = -\sin x + \cos x + 1$. Το σημείο που το σώμα θα σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά θα είναι το $\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin(x - \pi/4) = 1$, δηλ. το $x = \pi/2$.

Το σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση λόγω της αντίστασης και θα καταλήξει στο σημείο ισορροπίας $x = \pi/6$.

Θέμα 3^ο:

(α) Το διάγραμμα είναι αυτό της ενεργού δυναμικής ενέργειας σε βαρυτικό πεδίο

$$V_{\text{ev}} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}.$$

Η ενέργεια είναι θετική και ίση με $(1/2)mv_{\infty}^2$, οπότε το επίπεδο της ενέργειας τέμνει το γράφημα της ενεργού δυναμικής ενέργειας σε μια ελάχιστη απόσταση που αφορά στο σημείο Β. Το σημείο Α αντιστοιχεί σε μεγάλη απόσταση όπου η ενεργός δυναμική ενέργεια είναι αμελητέα.

(β) Το πρόσημο της ενέργειας είναι όπως είδαμε θετικό και επομένως η τροχιά είναι υπερβολή. Όταν το σωματίδιο απομακρυνθεί και πάλι σε άπειρη απόσταση θα έχει κατά μέτρο ταχύτητα v_{∞} .

(γ) Από διατήρηση της ενέργειας θα είναι

$$\frac{1}{2}mv_{\infty}^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GMm}{b\kappa}$$

και από διατήρηση της στροφορμής

$$mv_{\infty}b = mv_Bb\kappa.$$

Λύνοντας τη δεύτερη ως προς v_B και αντικαθιστώντας αυτή την ταχύτητα στην πρώτη βρίσκουμε

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{2GM\kappa}{b(1-\kappa^2)}}.$$

(δ) Όπως φαίνεται η ταχύτητα στρίβει κατά $\pi/2$.

(ε) $\Delta\phi =$

$$\begin{aligned} &= 2 \left| \int_{\pi}^{\pi/4} d\phi \right| = \\ &= 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \left| \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} \right| dr = \\ &= 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \left| \frac{L/(mr^2)}{\sqrt{v_{\infty}^2 + 2GM/r - (L/m)^2/r^2}} \right| dr = \\ &= 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{v_{\infty}b/r^2}{\sqrt{v_{\infty}^2 + 2GM/r - v_{\infty}^2 b^2/r^2}} dr = \\ &= 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(b/r)^2}{\sqrt{1 - (b/r)^2 + (2GM/(bv_{\infty}^2))(b/r)}} d(r/b). \end{aligned}$$

Με την προτεινόμενη αντικατάσταση το ολοκλήρωμα γίνεται απλώς $\int d\xi$ με άνω όριο ολοκλήρωσης: για $r_{\min}$, $b/r_{\min} = 1/\kappa$, η οποία είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει δηλαδή όταν $\xi = \pi/2$. Το κάτω όριο σχετίζεται με την αρχική απόσταση που είναι άπειρη οπότε $\sin \xi_1 = -\alpha/\sqrt{\alpha^2 + 1}$ με $\alpha = GM/(bv_{\infty}^2)$. Δεδομένου ότι η αλλαγή της αζιμουθιακής γωνίας είναι $3\pi/4$ θα πρέπει $\pi/2 - \xi_1 = 3\pi/4$, δηλαδή $\xi_1 = -\pi/4$. Από αυτή τη σχέση καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} = -1/\sqrt{2}$$

δηλαδή $\alpha = 1$. Συμπερασματικά

$$\frac{1}{\kappa} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

Θα μπορούσαμε να πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα αν θέταμε $\alpha = 1$ και αντικαθιστούσαμε την τιμή του v_{∞} που βρήκαμε προηγουμένως στην έκφραση για το α :

$$1 = \alpha = \frac{GM}{b[2GM\kappa/(b(1-\kappa^2))]} = \frac{1-\kappa^2}{2\kappa} \Rightarrow$$

$$\kappa^2 + 2\kappa - 1 = 0 \Rightarrow \kappa = \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

(η άλλη ρίζα απορρίπτεται, όντας αρνητική).

Θέμα 4^ο:

(α) Το πεδίο άπειρου φύλλου είναι (από νόμο Gauss)

$\vec{g} = -2\pi G\sigma \frac{z}{|z|} \hat{z}$. Πάνω στον άξονα z είναι $\vec{g} = -2\pi G\sigma \hat{r}$, άρα πρέπει $A = -2\pi G\sigma$. (Η σταθερά C πρέπει να είναι θετική ώστε στο όριο $a \gg r$ να μηδενίζεται ο δεύτερος όρος μέσα στην αγκύλη και το πεδίο να προκύπτει ανεξάρτητο της απόστασης.)

(β) Για $a \ll r$ είναι $(1 + a^2/r^2)^{-C} \approx 1 - Ca^2/r^2$, άρα $\vec{g} \approx [A + B - BCa^2/r^2] \hat{r}$. Για να συμφωνεί με πεδίο σημειακής μάζας $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}$ με $M = \sigma\pi a^2$,

πρέπει $B = -A = 2\pi G\sigma$ και $C = \frac{1}{2}$.

(γ) Η επιτάχυνση του σώματος σε σημεία του άξονα $\vec{r} = z\hat{z}$ με $z > 0$ είναι $\vec{g} = g\hat{z}$

με $g = -2\pi G\sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/z^2}}\right)$. Η εξίσωση

κίνησής του $\ddot{z} = g$ είναι ισοδύναμη με ολοκλήρωμα ενέργειας (ανά μάζα) $\frac{v^2}{2} + \Phi = E$ με

$\Phi = -\int g dz = 2\pi G\sigma \int \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right) dz = 2\pi G\sigma \left(z - \sqrt{z^2 + a^2}\right)$. Άρα $0 + \Phi(z_0) = \frac{v|_{z=0}^2}{2} +$

$\Phi(0) \Leftrightarrow v|_{z=0} = -\sqrt{4\pi G\sigma(z_0 + a - \sqrt{z_0^2 + a^2})}$.