Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, 6 Σεπτεμβρίου 2024
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

**Θέμα 1$^{\mathbf{o}}$**: Ένα σωματίδιο μάζας $m = 1$ κινείται στο επίπεδο $x - y$ υπό την επίδραση δύναμης της μορφής:

$$\mathbf{F} = F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}} = -k_1(x)x\hat{\mathbf{x}} - k_2(y)y\hat{\mathbf{y}} \ ,$$

με $k_1(x) = K - \mathrm{sgn}(x)$, $k_2(y) = K - \mathrm{sgn}(y)$ και $\mathrm{sgn}(\xi)$ η συνάρτηση πρόσημο που λαμβάνει τιμή +1 αν $\xi > 0$, -1 αν $\xi < 0$ και 0 αν $\xi = 0$. Δίδεται ότι $K > 1$.

(α) Ελέγξτε αν η δύναμη αυτή είναι κεντρική. Είναι μήπως κεντρική σε κάποιες περιοχές του επιπέδου $x - y$;

(β) Δείξτε ότι το πεδίο είναι συντηρητικό. Ποια είναι η δυναμική ενέργεια;

(γ) Αν το σωματίδιο ξεκινά ακίνητο από το σημείο $(x_0, y_0)$ με τι μέτρο ταχύτητας θα φτάσει στο $(0, 0)$ αν κάποτε περάσει από αυτό;

(δ) Το σωματίδιο ξεκινά από τη θέση $x(0) = a$, $y(0) = 0$ με ταχύτητα $v_x(0) = 0$, $v_y(0) = b$, με $a$, $b$ θετικά, και διασχίζει για πρώτη φορά τον άξονα $x$ στη θέση $(0, 0)$. Να υπολογιστεί η σταθερά $K$ καθώς και η χρονική στιγμή που το σωματίδιο φτάνει στη θέση $(0, 0)$.

**Θέμα 2$^{\mathbf{o}}$**: Σε κάποιο τόπο του Ισημερινού της Γης εκτελούμε πλάγια βολή προς βορρά, στη διάρκεια της οποίας το σώμα φτάνει σε μέγιστο ύψος $z_{\max}$, πολύ μικρότερο από την ακτίνα της Γης. Δείξτε ότι λόγω της περιστροφής της Γης το σημείο πτώσης του σώματος αποκλίνει προς τη δύση κατά $\frac{8\omega}{3}\sqrt{\frac{2z_{\max}^3}{g}}$ ($\omega$ είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης και $g$ η – θεωρούμενη σταθερή – επιτάχυνση βαρύτητας).

Μπορείτε να ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα:

(α) Επιλέξτε κατάλληλο σύστημα αναφοράς και επιλύστε διαταρακτικά τον νόμο Νεύτωνα για να βρείτε την θέση σε κάθε χρόνο, θεωρώντας γνωστή την αρχική ταχύτητα.

(β) Βρείτε το χρόνο ανόδου και κατόπιν την κατακόρυφη αρχική ταχύτητα συναρτήσει του $z_{\max}$.

(γ) Βρείτε τον χρόνο πτώσης και τελικά την απόκλιση στην διεύθυνση ανατολή–δύση.

**Θέμα 3$^{\mathbf{o}}$**: Σώμα μάζας $m$ κινείται σε πεδίο κεντρικής δύναμης με δυναμική ενέργεια $V = -C\cos(kr)$ όπου $C$, $k$ θετικές σταθερές. Μπορείτε για να απλοποιήσετε τις πράξεις να θέσετε $m = 1$, $C = 1$, $k = 1$.

(α) Επιλέξτε μία ακτίνα $r_0$ στην οποία το σώμα μπορεί να κινείται κυκλικά.

(β) Για την κυκλική αυτή κίνηση στην ακτίνα $r_0$ που επιλέξατε ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του σώματος $\omega_0$ και ποια η στροφορμή $L$;

(γ) Ενώ το σώμα κινείται κυκλικά στην ακτίνα που επιλέξατε του δίνουμε μια ακτινική ταχύτητα $v_{r0}$, μικρή σε σχέση με την ταχύτητα της κυκλικής κίνησης. Μελετήστε την ακτινική κίνηση του σώματος. Συγκεκριμένα, αν αυτή είναι ταλαντωτική βρείτε την κυκλική της συχνότητα, ενώ αν δεν είναι, εκτιμήστε το χρόνο μετά τον οποίο δεν μπορούμε να θεωρούμε ότι το σώμα μένει στη γειτονιά της αρχικής κυκλικής τροχιάς.

**Θέμα 4$^{\mathbf{o}}$**: Ένα σημειακό σωματίδιο μάζας $M$ βρίσκεται ακίνητο στο κέντρο ενός σφαιρικού ομογενούς φλοιού μάζας, πάλι $M$, και ακτίνας $R$, ο οποίος είναι και αυτός ακίνητος.

(α) Αν αναπτυχθεί κάποια δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο σωμάτων, η οποία να υπακούει στον 3ο νόμο του Νεύτωνα, ποια θα είναι η σχέση των μετατοπίσεων $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, όπου 1 είναι η σημειακή μάζα και 2 το κέντρο του φλοιού;

(β) Ανοίγουμε πάνω στο σφαιρικό φλοιό μια πολύ μικρή οπή που καταλαμβάνει επιφάνεια $\epsilon S_{\sigma\varphi}$, όπου $S_{\sigma\varphi}$ η επιφάνεια του φλοιού και $0 < \epsilon \ll 1$. Να υπολογιστεί η βαρυτική δύναμη αλληλεπίδρασης που θα αναπτυχθεί μεταξύ των δύο σωμάτων αρχικά.

(γ) Αν $x(t)$ η μετακίνηση του σωματιδίου σε σχέση με την αρχική του θέση, εξαιτίας της βαρυτικής αλληλεπίδρασης που αναπτύσσεται μεταξύ των δύο σωμάτων, να γράψετε (χωρίς να λύσετε) τη διαφορική εξίσωση που διέπει το $x(t)$, ενόσω το σωματίδιο βρίσκεται εντός του σφαιρικού φλοιού.

(δ) Το σωματίδιο προσκρούει στον φλοιό και τον διαπερνά χωρίς καμία απώλεια ενέργειας. Να υπολογίσετε την ταχύτητα εξόδου του σωματιδίου από τον σφαιρικό φλοιό σε σχέση με τον φλοιό.

(ε) Ποια είναι η μέγιστη απόσταση απομάκρυνσης του σωματιδίου από το κέντρο του σφαιρικού φλοιού; [Υποθέστε ότι η οπή είναι σημειακή.]

<u>ΛΥΣΕΙΣ:</u>

**Θέμα 1$^{\mathbf{o}}$**: Από τα δεδομένα συνάγουμε ότι η δύναμη έχει τη μορφή $\mathbf{F} = -(K-1)\mathbf{r}$ στην περιοχή $x, y > 0$, $\mathbf{F} = -(K+1)\mathbf{r}$ στην περιοχή $x, y < 0$, $\mathbf{F} = -((K-1)x, -(K+1)y)$ στην περιοχή $x > 0, y < 0$ και $\mathbf{F} = -((K+1)x, (K-1)y)$ στην περιοχή $x < 0, y > 0$.

(α) Επομένως η δύναμη είναι κεντρική μόνο στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο, αλλά όχι κεντρική στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο αφού για παράδειγμα $\mathbf{r}\times\mathbf{F} = -(x,y)\times((K-1)x,(K+1)y) = -xy((K+1)-(K-1)) = -2xy \neq 0$ στην περιοχή $x > 0, y < 0$.

β) Ο στροβιλισμός του πεδίου εύκολα δείχνεται ότι είναι 0, οπότε το πεδίο είναι συντηρητικό. Η δυναμική ενέργεια είναι

$$\begin{aligned} V(x,y) &= -\int_0^{(x,y)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ &= +\int_0^{(x,y)} [(K-\mathrm{sgn}(x))x dx + (K-\mathrm{sgn}(y))y dy] \\ &= \frac{1}{2}\left[(K-\mathrm{sgn}(x))x^2 + (K-\mathrm{sgn}(y))y^2\right] \qquad (1) \end{aligned}$$

(γ) Από διατήρηση ενέργειας

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left[(K-\mathrm{sgn}(x_0))x_0^2 + (K-\mathrm{sgn}(y_0))y_0^2\right]$$

δηλαδή το αποτέλεσμα εξαρτάται και από το μέτρο των $x_0, y_0$ αλλά και από το πρόσημό τους.

(δ) Κάθε φορά που αλλάζει πρόσημο το $x$ ή το $y$ αλλάζουν τα στοιχεία του εκάστοτε ταλαντωτή. Ξεκινώντας με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες θα έχουμε

$$x_1(t) = a\cos(\omega_1 t)\ ,\ y_1(t) = (b/\omega_1)\sin(\omega_1 t)$$

με $\omega_1 = \sqrt{(K-1)/m} = \sqrt{K-1}$. Η πρώτη αυτή κίνηση διαρκεί χρόνο $t_1 = \pi/(2\omega_1)$, όπου μετά αλλάζει πρόσημο η $x$.

Ακολούθως η $y_1$ συνεχίζεται μέχρι να μηδενιστεί, οπότε και έχουμε την 1η διάσχιση του άξονα $x$, όταν $t = \pi/\omega_1 = 2t_1$. Η όμως αλλάζει μορφή και γίνεται

$$x_2(t > t_1) = (v_1/\omega_2)\sin(\omega_2(t-t_1))$$

με $v_1 = dx_1/dt|_{t=t_1} = -a\omega_1$ και $\omega_2 = \sqrt{K+1}$. Δεδομένου ότι για $t = t_2 = 2t_1$, το σωματίδιο καταλήγει στη θέση $(0,0)$, συμπεραίνουμε ότι

$$0 = x_2(t_2) = -\frac{a\omega_1}{\omega_2}\sin(\omega_2 t_1)$$

οπότε $\omega_2\pi/(2\omega_1) = \pi$ (οι λύσεις $3\pi, 5\pi, \ldots$ δεν είναι αποδεκτές γιατί αν διασχίσει τον άξονα $y$ πριν περάσει από το $(0,0)$ θα πρέπει να εκτελέσει πάλι τουλάχιστον μισή περίοδο με τη συχνότητα 1, αλλά από τη λύση για το $y$ ξέρουμε ότι δεν μπορεί να εκτελέσει παραπάνω από μισή περίοδο με συχνότητα 1). Οπότε

$$\sqrt{\frac{K+1}{K-1}} = 2$$

με αντίστοιχη λύση για το $K = 5/3$.

**Θέμα 2ο**: (α) Στις διαλέξεις έχουμε δείξει ότι για κινήσεις κοντά στην επιφάνεια της Γης η διαταρακτική επίλυση της $\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}$ δίνει θέση σε κάθε χρόνο $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 - \vec{\omega} \times \vec{v}_0 t^2 - \frac{1}{3}\vec{\omega} \times \vec{g}t^3$. Σε ένα σύστημα αναφοράς με αρχή το σημείο βολής ($\vec{r}_0 = 0$), άξονα $\hat{x}$ προς ανατολάς, $\hat{y}$ προς βορρά και $\hat{z}$ προς το ζενίθ του τόπου, είναι $\vec{g} = -g\hat{z}$, $\vec{\omega} = \omega\hat{y}$, $\vec{v}_0 = v_{0y}\hat{y} + v_{0z}\hat{z}$ και η παραπάνω σχέση δίνει $x = -v_{0z}\omega t^2 + \frac{1}{3}\omega g t^3$, $y = v_{0y}t$, $z = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2$.

(β) Στο ανώτερο σημείο $\dot{z} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_{0z}}{g}$ και άρα $z_{\max} = \frac{v_{0z}^2}{2g} \Leftrightarrow v_{0z} = \sqrt{2gz_{\max}}$.

(γ) Στο σημείο πτώσης $z = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2v_{0z}}{g}$ και άρα $x = -v_{0z}\omega\left(\frac{2v_{0z}}{g}\right)^2 + \frac{1}{3}\omega g\left(\frac{2v_{0z}}{g}\right)^3 = -\frac{4\omega v_{0z}^3}{3g^2}$. Αντικαθιστώντας $v_{0z} = \sqrt{2gz_{\max}}$ βρίσκουμε την ζητούμενη απόκλιση $x = -\frac{8\omega}{3}\sqrt{\frac{2z_{\max}^3}{g}}$ (το αρνητικό πρόσημο σημαίνει απόκλιση προς τη δύση).

**Θέμα 3ο**: (α) Πρέπει $F < 0$, δηλ. $-\frac{dV}{dr} = -Ck\sin(kr_0) < 0 \Leftrightarrow \sin(kr_0) > 0$. Η ακτίνα $r_0$ πρέπει να βρίσκεται σε κάποιο διάστημα $\frac{2n\pi}{k} < r_0 < \frac{2n\pi + \pi}{k}$ όπου $n = 0, 1, 2, \ldots$

(β) Η ενεργός δυναμική ενέργεια $V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - C\cos(kr)$ έχει ακρότατο στην κυκλική τροχιά, δηλ. $V'_{\text{eff}}(r_0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{L^2}{mr_0^3} + Ck\sin(kr_0) = 0 \Leftrightarrow L = \pm\sqrt{mCkr_0^3\sin(kr_0)}$ και $\omega_0 = \frac{L}{mr_0^2} = \pm\sqrt{\frac{Ck\sin(kr_0)}{mr_0}}$ (είναι $\vec{\omega}_0 = \omega_0\hat{z}$ και τα δύο πρόσημα της αλγεβρικής τιμής $\omega_0$ αντιστοιχούν στις δύο φορές διαγραφής του κύκλου).

Αλλιώς: Η δύναμη παίζει το ρόλο της κεντρομόλου, δηλ. $m\omega_0^2 r_0 = -F \Leftrightarrow \omega_0 = \pm\sqrt{\frac{Ck\sin(kr_0)}{mr_0}}$ και $L = m\omega_0 r_0^2 = \pm\sqrt{mCkr_0^3\sin(kr_0)}$.

(γ) Η στροφορμή της διαταραγμένης τροχιάς είναι ίδια με της κυκλικής (αφού η διαταραχή της ταχύτητας είναι ακτινική), οπότε $V_{\text{eff}}(r) = \frac{Ckr_0^3\sin(kr_0)}{2r^2} - C\cos(kr)$. Με $r = r_0 + q$ είναι $V_{\text{eff}}(r_0+q) \approx V_{\text{eff}}(r_0) + \frac{1}{2}V''_{\text{eff}}(r_0)q^2$ όπου $V''_{\text{eff}}(r_0) = Ck^2\left[\cos(kr_0) + \frac{3}{kr_0}\sin(kr_0)\right]$. Η εξίσωση για την ακτινική κίνηση $\frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{1}{2}V''_{\text{eff}}(r_0)q^2 =$ σταθερά, ή ισοδύναμα παραγωγίζοντας $\ddot{q} + \frac{V''_{\text{eff}}(r_0)}{m}q = 0$. Αν ισχύει $V''_{\text{eff}}(r_0) > 0 \Leftrightarrow kr_0\cot(kr_0) > -3$ δίνει ταλαντώσεις με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{V''_{\text{eff}}(r_0)/m} = |\omega_0|\sqrt{kr_0\cot(kr_0) + 3}$.

Λόγω των αρχικών συνθηκών $q = 0$, $\dot{q} = v_{r0}$ η λύση είναι $q = \frac{v_{r0}}{\omega}\sin(\omega t)$.

Αν ισχύει $V''_{\text{eff}}(r_0) \leq 0 \Leftrightarrow kr_0\cot(kr_0) \leq -3$ η διαταραχή είναι ασταθής και η ακτινική κίνηση δεν είναι ταλαντωτική.

Αν $kr_0\cot(kr_0) < -3$, όσο το σώμα μένει στη γειτονιά της αρχικής τροχιάς η λύση της εξίσωσης κίνησης είναι $q = C_1 e^{\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t}$ με $\gamma = |\omega_0|\sqrt{-kr_0\cot(kr_0) - 3}$, δηλ. το σώμα μένει κοντά στην αρχική τροχιά για $t \lesssim 5/\gamma$.

Λόγω των αρχικών συνθηκών $q = 0$, $\dot{q} = v_{r0}$ η λύση είναι $q = \frac{v_{r0}}{\gamma}\sinh(\gamma t)$. Είναι $\sinh 5 \approx 74$ και $\left.\frac{q}{r_0}\right|_{t=5/\gamma} \approx 74\frac{v_{r0}}{\gamma r_0}$. Η ακριβής τιμή εξαρτάται και από το πόσο μικρή είναι η $v_{r0}$ σε σχέση με το $\gamma r_0$.

Αν $kr_0\cot(kr_0) = -3$ η λύση είναι $q = v_{r0}t$, δηλ. η ακτίνα μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο και αλλάζει κατά $q = \Delta r$ σε χρόνο $t = \Delta r/v_{r0}$.

**Θέμα 4$^{\mathbf{o}}$**:

(α) Το ΚΜ θα είναι ακίνητο αφού αρχικά τα δύο σώματα είναι ακίνητα. Επομένως $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_2$, λόγω ισότητας μαζών.

(β) Ασκείται μια απωστική δύναμη από την υποτιθέμενη αρνητική μάζα που αντιπροσωπεύει την τρύπα. Η δύναμη αυτή θα είναι $GM(M\epsilon)/R^2$, αρχικά.

(γ) Αν το σωματίδιο μετακινηθεί κατά $x$, ο φλοιός θα υποχωρήσει κατά $x$ επομένως η απόσταση τρύπας-σωματιδίου θα γίνει $R + 2x$. Επομένως

$$M\ddot{x} = \frac{GM^2\epsilon}{(R+2x)^2}$$

(δ) Από διατήρηση ενέργειας του συστήματος θα έχουμε

$$+\frac{GM^2\epsilon}{R} = +\frac{GM^2\epsilon}{2R} + 2 \times \frac{1}{2}Mv^2$$

όπου $v$ η ταχύτητα σωματιδίου και φλοιού στο αδρανειακό σύστημα. (Τα $+$ μπήκαν γιατί έχουμε απωστική δύναμη.) Το ζητούμενο θα είναι

$$2v = \sqrt{\frac{2GM\epsilon}{R}}$$

Το αποτέλεσμα θα μπορούσε να προκύψει και από την εξίσωση του (γ) αν την πολλαπλασιάζαμε με $\dot{x}$.

(ε) Όταν το σωματίδιο βγει έξω από τον φλοιό δέχεται κυρίως τη βαρυτική έλξη του φλοιού και τότε η τρύπα έχει αμελητέα συνεισφορά. Πάλι από διατήρηση ενέργειας

$$2 \times \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{GM^2}{R} = -\frac{GM^2}{d_{\max}}$$

Μετά από πράξεις καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$d_{\max} = \frac{R}{1 - \epsilon/2}$$