Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, 27 Μαΐου 2024
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Θέμα 1^{o}:

Δαχτυλίδι κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου v περασμένο σε οριζόντιο σύρμα που έχει σχήμα $\varpi = 2R\cos\phi$, όπου R θετική σταθερά. Αρχικά $\phi|_{t=0} = 0$ και $\dot{\phi}|_{t=0} > 0$.
(α) Δείξτε ότι η γωνία ϕ αυξάνεται σαν $\phi = \dfrac{vt}{2R}$.
(β) Ποια η δύναμη που ασκεί το σύρμα στο δαχτυλίδι; Η μάζα και το βάρος του δαχτυλιδιού θεωρούνται γνωστά.
(γ) Ποια η ακτίνα καμπυλότητας του σύρματος;
bonus (δ) Σχεδιάστε το σύρμα και την συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο δαχτυλίδι σε μια τυχαία θέση.
Δίνεται η έκφραση της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες $\vec{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + (2\dot{\varpi}\dot{\phi} + \varpi\ddot{\phi})\hat{\phi}$.

Θέμα 2^{o}:

Σωματίδιο μάζας $m = 1$ κινείται σε μια διάσταση εξαιτίας μιας δύναμης η οποία περιγράφεται από δυναμική ενέργεια με ένα τοπικό (και ολικό) ελάχιστο και ένα τοπικό (και ολικό) μέγιστο, ενώ σε μεγάλες αποστάσεις $x \to \pm\infty$ η δυναμική ενέργεια τείνει ασυμπτωτικά στο 0. Οι αντίστοιχες τιμές ελαχίστου-μεγίστου της δυναμικής ενέργειας είναι $V(x_1) = -2$ και $V(x_2) = 2$, με $x_1 = -2, x_2 = 2$ τα σημεία ελαχίστου-μεγίστου.
(α) Να σχεδιάσετε ποιοτικά τη δυναμική ενέργεια $V(x)$ και τη δύναμη $F(x)$, σημειώνοντας τα σημεία x_1, x_2.
(β) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας που πρέπει να έχει το σωματίδιο όταν βρίσκεται στη θέση ελαχίστου $x_1 = -2$ για να καταφέρει να φτάσει στο $+\infty$;
(γ) Το ίδιο σωματίδιο αν ξεκινήσει από το σημείο ελαχίστου $x(0) = -2$ με μια πολύ μικρή ταχύτητα $v(0) = \epsilon \ll 1$ αρχίζει να εκτελεί αρμονικές ταλαντώσεις γύρω από το x_1 που περιγράφονται από τη σχέση $x(t) = -2 + a\sin(2\pi t)$. Ποια θα είναι η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου αν υποδιπλασιάσουμε την αρχική ταχύτητα, $v(0) = \epsilon/2$;
(δ) Από τα παραπάνω δεδομένα μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι για ένα μικρό διάστημα γύρω από το $x_1 = -2$ η μορφή της δυναμικής ενέργειας (θεωρώντας ότι η $V(x)$ και όλες οι παράγωγοι αυτής είναι συνεχείς) περιγράφεται προσεγγιστικά από τη συνάρτηση $V(x) = -2 + b(x+2)^2$. Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου b.

Θέμα 3^{o}:

Η κίνηση σώματος μάζας m γύρω από μια μελανή οπή Schwarzschild μάζας M περιγράφεται από τις διατηρήσεις στροφορμής $L = mr^2\dot{\phi}$ και ενέργειας $E = \dfrac{m\dot{r}^2}{2} + \dfrac{L^2}{2mr^2} - \dfrac{GMm}{r} - \dfrac{L^2GM}{mc^2r^3}$, δηλ. είναι ισοδύναμη στη Νευτώνεια θεώρηση με κίνηση σε κεντρικό πεδίο $V = -\dfrac{GMm}{r} - \dfrac{L^2GM}{mc^2r^3}$ (όπου c είναι η ταχύτητα φωτός).
(α) Βρείτε την στροφορμή αν το σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_c.
(β) Δείξτε ότι κυκλικές τροχιές υπάρχουν μόνο αν $r_c > 3GM/c^2$. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την έκφραση που βρήκατε για την στροφορμή.
(γ) Δείξτε ότι οι κυκλικές τροχιές είναι ευσταθείς μόνο αν $r_c > 6GM/c^2$.
bonus (δ) Υπάρχουν κυκλικές τροχιές που αν τις διαταράξουμε δίνοντας μία απειροστά μικρή θετική $\dot{r} = \epsilon$ το σώμα καταλήγει στο άπειρο;

Θέμα 4^{o}:

Μια σειρά από N σφαιρικούς λεπτούς ομόκεντρους φλοιούς με ακτίνες R, $2R$, $3R$, $\ldots$, NR δημιουργούν ένα βαρυτικό πεδίο στο χώρο. Όλοι οι φλοιοί αποτελούνται από υλικό με επιφανειακή πυκνότητα μάζας σ.
(α) Να υπολογιστεί η ένταση του πεδίου βαρύτητας σε απόσταση $r = 3R/2$ από το κοινό κέντρο των φλοιών και να γραφεί το αντίστοιχο διάνυσμα.
(β) Να υπολογιστεί το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην εξωτερική επιφάνεια του k-στου φλοιού με $k < N$. Εξαρτάται αυτό από την ακτίνα R; [Δίδεται ότι $1^2 + 2^2 + \ldots + N^2 = \dfrac{N(2N+1)(N+1)}{6}$.]
(γ) Αν γνωρίζουμε ότι το βαρυτικό δυναμικό στην εξωτερική επιφάνεια του τελευταίου φλοιού είναι Φ_0 (με $\Phi_\infty = 0$) καθώς και την τιμή του σ και τη σταθερά της παγκόσμιας έλξης, μπορούμε να ξέρουμε την ακτίνα R; Το πλήθος των φλοιών; Κάποιο συνδυασμό αυτών;

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα $1^{\text{ο}}$:

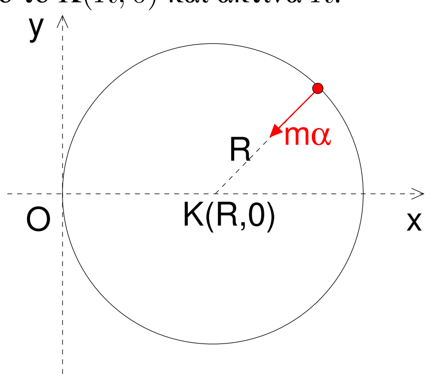
(α) Είναι $\vec{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi} = 2R\dot{\phi}(-\sin\phi\hat{\varpi} + \cos\phi\hat{\phi})$, διότι $\varpi = 2R\cos\phi$, $\dot{\varpi} = -2R\dot{\phi}\sin\phi$. Από $|\vec{v}| = v$ βρίσκουμε $2R|\dot{\phi}| = v$. Αφού $\dot{\phi} > 0$ και $\phi|_{t=0} = 0$ η σχέση αυτή ολοκληρώνεται και δίνει την ζητούμενη.

(β) Αντικαθιστώντας $\varpi = 2R\cos\phi$, $\dot{\varpi} = -2R\dot{\phi}\sin\phi = -v\sin\phi$, $\ddot{\varpi} = -v\dot{\phi}\cos\phi = -\frac{v^2}{2R}\cos\phi$ στην έκφραση της επιτάχυνσης βρίσκουμε $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}(\cos\phi\hat{\varpi} + \sin\phi\hat{\phi})$.

Ο νόμος Νεύτωνα δίνει $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$ όπου $m\vec{g}$ το βάρος του δαχτυλιδιού και $\vec{N}$ η δύναμη που του ασκεί το σύρμα. Άρα $\vec{N} = -\frac{mv^2}{R}(\cos\phi\hat{\varpi} + \sin\phi\hat{\phi}) - m\vec{g}$.

(γ) Η επιτάχυνση που βρήκαμε είναι μόνο κεντρομόλος (η επιτρόχια είναι μηδέν αφού το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό). Άρα $|\vec{a}| = \frac{v^2}{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \mathcal{R} = R$.

(δ) Αφού η ακτίνα καμπυλότητας είναι σταθερή το σύρμα έχει κυκλικό σχήμα (ακτίνας R). Πράγματι, οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι $x = \varpi\cos\phi = 2R\cos^2\phi = R + R\cos(2\phi)$, $y = \varpi\sin\phi = 2R\sin\phi\cos\phi = R\sin(2\phi)$ και απαλείφοντας την γωνία δίνουν $(x-R)^2 + y^2 = R^2$, εξίσωση κύκλου με κέντρο το $\text{K}(R, 0)$ και ακτίνα R.

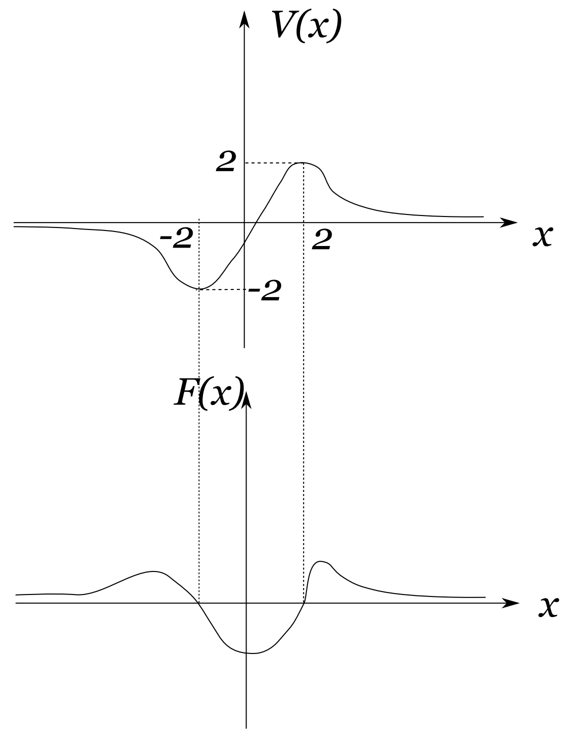


Το δαχτυλίδι εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και η συνισταμένη των δυνάμεων παίζει το ρόλο της κεντρομόλου, η οποία έχει μέτρο mv^2/R και φορά προς το κέντρο του κύκλου.

Χρησιμοποιώντας τις $x = R + R\cos(2\phi)$, $y = R\sin(2\phi)$ με $\phi = \frac{vt}{2R}$ προκύπτει ότι η θέση σε καρτεσιανές είναι $x = R + R\cos(\omega t)$, $y = R\sin(\omega t)$ με $\omega = v/R$. Είναι προφανές ότι η κίνηση είναι ομαλή κυκλική με κέντρο στη θέση $\vec{r}_{\text{K}} = R\hat{x}$ και γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$. Η επιτάχυνση είναι $\vec{a} = -\omega^2(\vec{r} - \vec{r}_{\text{K}})$, όπου $\vec{r} - \vec{r}_{\text{K}} = R\cos(\omega t)\hat{x} + R\sin(\omega t)\hat{y}$ είναι η θέση ως προς το κέντρο. Από $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$ η δύναμη που ασκεί το σύρμα στο δαχτυλίδι προκύπτει $\vec{N} = -m\omega^2(\vec{r} - \vec{r}_{\text{K}}) - m\vec{g} = -m\omega^2 R[\cos(\omega t)\hat{x} + \sin(\omega t)\hat{y}] - m\vec{g}$.

Θέμα $2^{\text{ο}}$:

(α) Δίδεται ένα σχεδιάγραμμα δυναμικής ενέργειας που πληρεί τα δοθέντα χαρακτηριστικά και η αντίστοιχη δύναμη ($F = -dV/dx$).



(β) Η ενέργεια πρέπει να ξεπερνά την τιμή μεγίστου για να μπορέσει να φτάσει από το x_1 στο $+\infty$. Επομένως $E > 2$ και $V(x_1) + mv(0)^2/2 > 2$. Με απλές πράξεις $v(0) > \sqrt{8}$.

(γ) Δεδομένου ότι η ενέργεια πάνω από την ελάχιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας ($V_{\text{min}} = -2$) είναι πολύ μικρή, αν η αρχική ταχύτητα υποδιπλασιαστεί, θα υποτετραπλασιαστεί η ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή και επομένως θα υποδιπλασιαστεί και το πλάτος: $x' = -2 + (a/2)\sin(2\pi t)$.

(δ) Η συχνότητα του ταλαντωτή είναι $\omega = 2\pi = \sqrt{V''(x_1)/m}$. Επομένως $V''(x_1) = 4\pi^2$ και $b = V''(x_1)/2 = 2\pi^2$.

Θέμα 3^{o}:

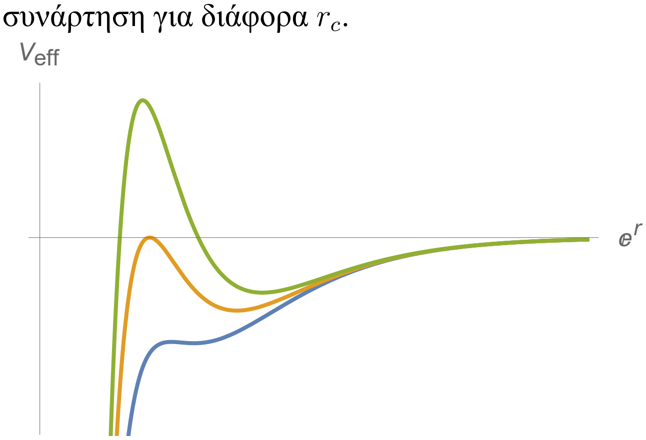
$V_{\text{eff}}(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2} - \dfrac{GMm}{r} - \dfrac{L^2GM}{mc^2r^3}$,
$V'_{\text{eff}}(r) = -\dfrac{L^2}{mr^3} + \dfrac{GMm}{r^2} + \dfrac{3L^2GM}{mc^2r^4}$,
$V''_{\text{eff}}(r) = \dfrac{3L^2}{mr^4} - \dfrac{2GMm}{r^3} - \dfrac{12L^2GM}{mc^2r^5}$.

(α) Αν r_c η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς η στροφορμή βρίσκεται από $V'_{\text{eff}}(r_c) = 0 \Leftrightarrow L^2 = \dfrac{GMm^2r_c}{1-3GM/c^2r_c}$.
Το ίδιο εξισώνοντας την δύναμη $F = -V'$ με την κεντρομόλο, δηλ. από $\dfrac{L^2}{mr_c^3} = -F(r_c)$.

(β) Η έκφραση της στροφορμής, λόγω $L^2 > 0$, συνεπάγεται ότι πρέπει να ισχύει $1 - 3GM/c^2r_c > 0 \Leftrightarrow r_c > 3GM/c^2$.

(γ) Η τροχιά είναι ευσταθής αν $V''_{\text{eff}}(r_c) > 0$. Αντικαθιστώντας την στροφορμή βρίσκουμε $V''_{\text{eff}}(r_c) = \dfrac{GMm}{r_c^3}\dfrac{1-6GM/c^2r_c}{1-3GM/c^2r_c}$. Επομένως $V''_{\text{eff}}(r_c) > 0 \Leftrightarrow r_c > 6GM/c^2$.

(δ) Καταρχάς πρέπει οι τροχιές αυτές να είναι ασταθείς, δηλ. να ισχύει $3GM/c^2 < r_c < 6GM/c^2$. Για να βρούμε τα όρια της ακτινικής κίνησης πρέπει να μελετήσουμε τη συνάρτηση $V_{\text{eff}}(r) = \dfrac{GMm}{1-3GM/c^2r_c}\left(\dfrac{r_c}{2r^2} - \dfrac{1}{r} + \dfrac{3GM}{c^2r_cr} - \dfrac{GMr_c}{c^2r^3}\right)$. Η $V'_{\text{eff}}(r) = \dfrac{GMm}{r^4}(r-r_c)\left(r - \dfrac{3GM/c^2}{1-3GM/c^2r_c}\right)$ είναι θετική εκτός των ριζών και αρνητική ανάμεσα. Για $3GM/c^2 < r_c < 6GM/c^2$ η μικρότερη ρίζα είναι r_c και η μεγαλύτερη $\dfrac{3GM/c^2}{1-3GM/c^2r_c}$. Επομένως η $V_{\text{eff}}(r)$ έχει μέγιστο στην ακτίνα r_c της κυκλικής τροχιάς, μετά μειώνεται μέχρι το τοπικό ελάχιστο και κατόπιν αυξάνεται μέχρι να μηδενιστεί στο άπειρο. Το παρακάτω γράφημα δείχνει την συνάρτηση για διάφορα r_c.



Για να καταλήξει το σώμα στο άπειρο μετά τη διαταραχή πρέπει η ενέργεια της κυκλικής τροχιάς $E = V_{\text{eff}}(r_c)$ να είναι θετική ή οριακά μηδενική (ώστε η εξίσωση $V_{\text{eff}}(r) = E + \delta E$ όπου $\delta E = m\epsilon^2/2$ να μην έχει λύση ακόμα και για απειροστά μικρές ϵ). Είναι $V_{\text{eff}}(r_c) = -\dfrac{GMm}{2r_c}\dfrac{1-4GM/c^2r_c}{1-3GM/c^2r_c}$, άρα πρέπει να ισχύει $V_{\text{eff}}(r_c) \geq 0 \Leftrightarrow 3GM/c^2 < r_c \leq 4GM/c^2$.
Η συνθήκη $V_{\text{eff}}(r_c) \geq 0$ είναι αναγκαία λόγω του μηδενισμού της $V_{\text{eff}}(r)$ στο άπειρο, αλλά όχι ικανή γενικά, γιατί θα μπορούσε να υπάρχει κάποιος λόφος δυναμικού με θετικό μέγιστο μεταξύ της αρχικής ακτίνας και του άπειρο. Η μελέτη της $V_{\text{eff}}(r)$ εξασφαλίζει ότι δεν υπάρχει τέτοιος λόφος.

Θέμα 4^{o}:

(α) $\vec{g} = -\hat{r}GM_{\text{inc}}/r^2 = -\hat{r}4\pi G\sigma/(9/4)$

(β) $g = GM_{\text{inc}}/r^2 = 4\pi G\sigma(1 + 2^2 + \ldots + k^2)R^2/(k^2R^2) = 4\pi G\sigma(2k+1)(k+1)/(6k)$.

(γ) $\Phi = -\displaystyle\int_{\infty}^{NR} \vec{g}\cdot d\vec{r} = -4\pi G\sigma[N(2N+1)(N+1)]R^2/(6NR) = -\dfrac{2\pi G\sigma}{3}(2N+1)(N+1)R$. Επομένως αν ξέρουμε το Φ δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ξεχωριστά το R και το N, παρά μόνο τον παραπάνω συνδυασμό τους. Το αποτέλεσμα θα μπορούσε να παραχθεί και από την απλή έκφραση $\Phi = -GM_{\text{inc}}/r$ εφόσον αναζητούμε το δυναμικό στο εξωτερικό σφαιρικά συμμετρικής κατανομής μαζών.