Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Πρόοδος στη Μηχανική Ι, 5 Δεκεμβρίου 2023
Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες, Καλή επιτυχία

Πρόβλημα 1: Ένα σωματίδιο μάζας $m = 1$ κινείται σε μία διάσταση στο διάστημα $[-L-a, L+a]$, όπου η δυναμική ενέργεια έχει τη μορφή

$$V(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{για } L+a > |x| > a \\ \frac{1}{2}(x^2 - a^2) & ,\text{για } |x| \leq a \\ \infty & ,\text{για } |x| \geq L+a \end{cases}$$

με $L >> a$, κάποια θετικά μήκη. Το σωματίδιο ξεκινά πάρα πολύ κοντά στο $x(0) = -L-a$, κινούμενο προς τα θετικά x, και επιστρέφει στο ίδιο σημείο αφού ανακλαστεί ελαστικά στο τοίχωμα που βρίσκεται στο $L+a$.

(α) Να σχεδιαστεί το δυναμικό και να ελέγξετε αν υπάρχουν αρχικές ταχύτητες $v(0) > 0$ τέτοιες ώστε το σωματίδιο να μην καταφέρει να επιστρέψει στο αρχικό σημείο $x = -L-a$.

(β) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα φάσης του συστήματος για 3 διαφορετικές ενέργειες. Σημειώστε στο διάγραμμα καθαρά τα σημεία, $x = -L-a, x = -a, x = 0, x = a, x = L+a$.

(γ) Αφού γράψετε την εξίσωση κίνησης στο διάστημα $x \in [-a, a]$ και τη λύσετε με τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες, υπολογίστε το χρόνο κίνησης του σωματιδίου από $x_1 = -a$ έως $x_2 = a$ ως συνάρτηση της αρχικής (όταν αυτό ξεκινά από το $-L-a$) ταχύτητας του σωματιδίου $v(0)$. Θα σας βοηθήσουν οι τριγωνομετρικές ταυτότητες $\cos\phi = 2\cos^2(\phi/2) - 1, \sin\phi = 2\sin(\phi/2)\cos(\phi/2)$.

(δ) Θέλετε να αποκαλύψετε το εύρος της «λακούβας» $(x^2 - a^2)/2$ εκτελώντας μετρήσεις του χρόνου T επιστροφής του σωματιδίου στο αρχικό σημείο ως συνάρτηση της αρχικής ταχύτητας και κατασκευάζοντας το διάγραμμα $v(0)T$ ως συνάρτηση του $v(0)$. Θα εκτελούσατε πειράματα με μεγάλες ή με μικρές ταχύτητες; Εξηγήστε. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσεγγιστική σχέση $\tan^{-1}\theta \simeq \theta - \theta^3/3$ για μικρές γωνίες θ.

(ε) **Bonus:** Θα μπορούσατε, με μετρήσεις του $v(0)T$ ως συνάρτηση του $v(0)$, να διακρίνετε τη διαφορά μεταξύ της δοθείσας «λακούβας» από μια άλλη τετραγωνική, της μορφής $-a^2/2$ στό ίδιο διάστημα δηλαδή στο $[-a, a]$;

Πρόβλημα 2: Ένας αρμονικός ταλαντωτής με ιδιοσυχνότητα $\omega_0 = 1$ και συντελεστή απόσβεσης $\gamma = 0.1$ διεγείρεται από εξωτερική δύναμη $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ τέτοια ώστε $F_0/m = 1$.

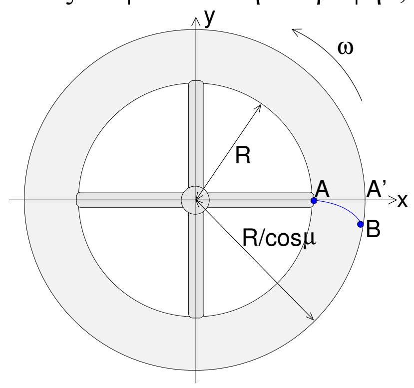
(α) Ένας τέτοιος ταλαντωτής ξεκινά με μηδενικές αρχικές τιμές θέσης–ταχύτητας και μετά από κάποιο χρόνο παρατηρούμε ότι εκτελεί την ίδια ταλάντωση $x(t)$ με έναν άλλο ίδιο ταλαντωτή που ξεκίνησε με αρχική θέση $x(0) = 1$ και αρχική ταχύτητα $v(0) = 1$. Δώστε μια εκτίμηση για το χρόνο t που θα μπορούσε να συμβαίνει αυτό.

(β) Αφότου περάσει ο χρόνος αυτός, το πλάτος της ταλάντωσης του ταλαντωτή είναι μεγαλύτερο για (i) $\omega = 0$, (ii) $\omega = 0.1$, (iii) $\omega = 1$ ή (iv) $\omega = 2$;

(γ) Παρατηρούμε μετά από τον προαναφερθέντα χρόνο, το σωματίδιο να εκτελεί ταλάντωση της μορφής $x(t) = A\sin(\Omega t)$. Να βρεθεί η τιμή των Ω, ω, A. (Δεν χρειάζεται να γνωρίζετε την έκφραση για το πλάτος και για τη φάση υστέρησης του ταλαντωτή).

(δ) Ποια η ενέργεια ταλάντωσης του ταλαντωτή σε αυτή την περίπτωση; Είναι αυτή σταθερή;

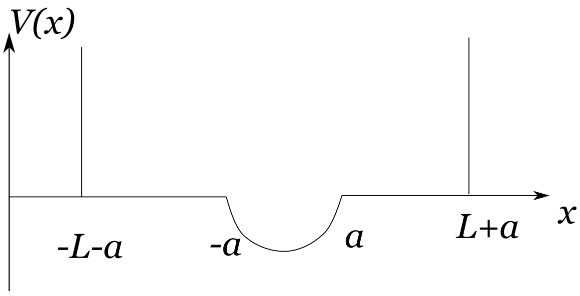
Πρόβλημα 3: Ο διαστημικός σταθμός του σχήματος περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω για να δημιουργεί τεχνητή βαρύτητα (δεν υπάρχει πραγματική βαρύτητα). Σώμα αφήνεται από σημείο της «οροφής» Α που απέχει απόσταση R από τον άξονα.
(α) Προσδιορίστε το σημείο Β του «δαπέδου» που θα πέσει το σώμα αν η εξωτερική ακτίνα του σταθμού είναι $R/\cos\mu$.
Υπόδειξη: Βρείτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες του σώματος σε κάθε χρόνο.
(β) Αν το σώμα ανακλάται ελαστικά στο «δάπεδο» με τι ταχύτητα θα ξαναφτάσει στην «οροφή»;



Λύσεις:

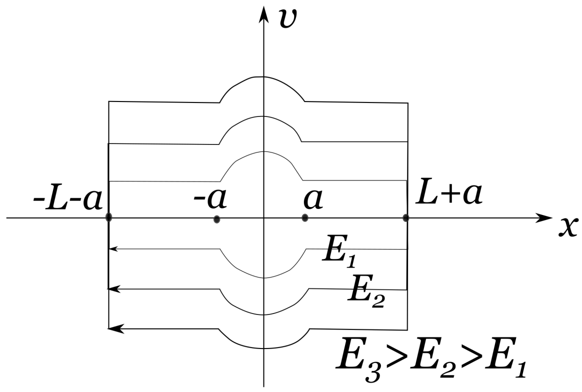
Πρόβλημα 1:

(α)



Το δυναμικό είναι αρνητικό ή 0 οπότε δεν υπάρχει απαγορευμένη περιοχή κίνησης αφού αρχικά λόγω $v(0) >$ έχει θετική ενέργεια.

(β)



(γ) Όταν το σωματίδιο βρίσκεται στο διάστημα $x \in [-a, a]$

$$m\ddot{x} = -dV/dx = -x \Rightarrow \ddot{x} + x = 0 \Rightarrow x(t) = x(0)\cos(1t) + \frac{v(0)}{1}\sin(1t)$$

οπότε λύνοντας βρίσκουμε

$$a = (-a)\cos t + v(0)\sin(t) \Rightarrow (1 + \cos t)a = v(0)\sin t \Rightarrow \frac{a}{v(0)} = \frac{2\sin(t/2)\cos(t/2)}{2\cos^2(t/2)} = \tan(t/2)$$

και επομένως $t_{-a\to a} = 2\tan^{-1}(a/v(0))$. Ο συνολικός χρόνος λοιπόν θα είναι

$$T = 4\frac{L}{v_0} + 4\tan^{-1}(a/v(0))$$

αφού στα διαστήματα προ και μετά λακούβας θα τα διασχύσει 2 φορές με ταχύτητα $v(0)$ και τη λακούβα 2 φορές.

(δ)

$$v(0)T = 4[L + v(0)\tan^{-1}(a/v(0))]$$

Στις μικρές ταχύτητες το δεξί μέλος θα τείνει στο $4[L + v(0)\pi/2]$ οπότε θα χαθεί η πληροφορία για το a. Αντιθέτως στις μεγάλες ταχύτητες θα είναι

$$v(0)T \simeq 4\left[L + v(0)\left(\frac{a}{v(0)} - \frac{1}{3}\frac{a^3}{v(0)^3}\right)\right] \simeq 4L + 4a - \frac{4a^3}{3v(0)^2}.$$

Για αρκούντως μεγάλες ταχύτητες η μετρούμενη ποσότητα $v(0)T$ θα τείνει στο $4L + 4a$.

(ε) Στο αντίστοιχο τετραγωνικό πηγάδι θα απαιτηθεί χρόνος διάσχισης

$$T_{\pi\eta\gamma} = 2\frac{2a}{\sqrt{v(0)^2 + a^2}}$$

οπότε
$$v(0)T = 4\left[L + a\frac{v(0)}{\sqrt{v(0)^2+a^2}}\right] \simeq 4L + 4a - \frac{2a^3}{v(0)^2}.$$
Η διαφορά στο συντελεστή του τελευταίου όρου αποκαλύπτει τη διαφορετικότητα στο σχήμα της λακούβας, αλλά στη χαμηλότερη προσέγγιση το αποτέλεσμα είναι ίδιο $4L + 4a$. Με άλλα λόγια στις πολύ μεγάλες ταχύτητες δεν είναι καν αισθητή η ύπαρξη της λακούβας παρά μόνο το εύρος της σαν να επρόκειτο για ελεύθερη κίνηση με δυναμικό μηδενικό παντού.

Πρόβλημα 2:

(α) Απαιτούνται μερικοί χαρακτηριστικοί χρόνοι, $\simeq 5(1/\gamma) = 50$ μονάδες χρόνου για να ξεχαστούν οι αρχικές συνθήκες και ο ταλαντωτής να κινείται με την διεγειρόμενη ταλάντωση.

(β) Το πλάτος θα είναι μεγάλο κοντά στο συντονισμό αφού $\gamma << \omega_0$, δηλαδή για $\omega = 1$.

(γ) Θέτοντας αυτή τη λύση στην εξίσωση κίνησης βρίσκουμε
$$-\Omega^2 A\sin(\Omega t) + 0.2\Omega A\cos(\Omega t) + A\sin(\Omega t) = \cos(\omega t) \Rightarrow$$
Γνωρίζουμε όμως ότι η κίνηση έχει τη συχνότητα του διεγέρτη, δηλαδή $\Omega = \omega$, οπότε
$$A(1-\Omega^2) = 0\ ,\ 0.2\Omega A = 1$$
οπότε $\Omega = \omega = 1$ και $A = 5$.

(δ) Ο ταλαντωτής γενικά θα έχει χρονοεξαρτώμενη ενέργεια, αλλά στη συγκεκριμένη περίπτωση, $\omega = \omega_0$, θα έχει ενέργεια
$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$
δηλαδή σταθερή.

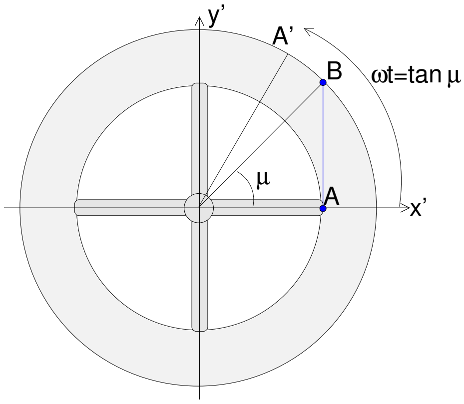
Πρόβλημα 3:

(α) Το πρόβλημα – εξισώσεις και αρχικές συνθήκες – είναι ίδιο με το παράδειγμα 7.2, αρκεί να θέσουμε την αρχική ταχύτητα του κέρματος μηδενική $v_0 = 0$ (η αρχική ακτίνα είναι το «έδαφος» εκεί και η «οροφή» εδώ). Με μία από τις μεθόδους που αναλύονται εκεί καταλήγουμε στο ότι η θέση του σώματος ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς είναι $\frac{x}{R} = \cos(\omega t) + \omega t\sin(\omega t)$, $\frac{y}{R} = -\sin(\omega t) + \omega t\cos(\omega t)$.

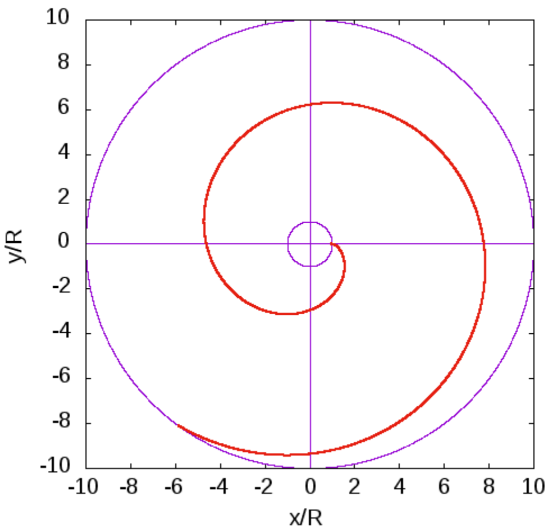
Το σώμα φτάνει στο δάπεδο όταν $x^2 + y^2 = \left(\frac{R}{\cos\mu}\right)^2 \Leftrightarrow \omega t = \tan\mu$. Άρα οι συντεταγμένες του Β είναι
$\frac{x_B}{R} = \cos(\tan\mu) + \tan\mu\sin(\tan\mu) = \frac{\cos(\tan\mu-\mu)}{\cos\mu}$, $\frac{y_B}{R} = -\sin(\tan\mu) + \tan\mu\cos(\tan\mu) = -\frac{\sin(\tan\mu-\mu)}{\cos\mu}$.
(Το Β έχει πολικές συντεταγμένες $\varpi_B = \frac{R}{\cos\mu}$ και $\phi_B = -(\tan\mu - \mu)$, δηλ. το τόξο Α'Β αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $|\phi_B| = \tan\mu - \mu$.)
Η επίλυση σε πολικές συντεταγμένες είναι δυσκολότερη: Η εξίσωση κίνησης $\vec{a}_\sigma = -2\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma + \omega^2\vec{r}$ γράφεται $(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi}\frac{d(\varpi^2\dot{\phi})}{dt}\hat{\phi} = -2\omega\hat{z}\times(\dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi}) + \omega^2\varpi\hat{\varpi}$ και έχει συνιστώσες $\frac{1}{\varpi}\frac{d(\varpi^2\dot{\phi})}{dt} = -2\omega\dot{\varpi}$ στην $\hat{\phi}$ και $\ddot{\varpi} - \dot{\phi}^2\varpi = 2\omega\varpi\dot{\phi} + \omega^2\varpi$ στην $\hat{\varpi}$. Η πρώτη δίνει ολοκλήρωμα $\varpi^2(\dot{\phi} + \omega) =$ σταθερά $= \omega R^2$ (υπολογίστηκε από αρχικές συνθήκες). Αντικαθιστώντας $\dot{\phi} = \frac{\omega R^2}{\varpi^2} - \omega$ στη δεύτερη βρίσκουμε $\ddot{\varpi} = \frac{\omega^2 R^4}{\varpi^3}$, η οποία ισοδυναμεί με ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{\dot{\varpi}^2}{2} + \frac{\omega^2 R^4}{2\varpi^2} =$ σταθερά $= \frac{\omega^2 R^2}{2}$ (υπολογίστηκε από αρχικές συνθήκες). (Το ολοκλήρωμα αυτό θα μπορούσε να προκύψει και από $\frac{v_\sigma^2}{2} - \frac{\omega^2\varpi^2}{2} =$ σταθερά, με το δεύτερο όρο να είναι το δυναμικό της φυγόκεντρου.) Το ολοκλήρωμα αυτό δίνει $\dot{\varpi} = \omega R\sqrt{1 - \frac{R^2}{\varpi^2}}$ οπότε η σχέση ακτίνας–χρόνου είναι $t = \int_0^t dt = \int_R^\varpi \frac{d\varpi}{\dot{\varpi}} = \int_R^\varpi \frac{\varpi\, d\varpi}{\omega R\sqrt{\varpi^2 - R^2}} = \frac{\sqrt{\varpi^2 - R^2}}{\omega R} \Leftrightarrow \varpi = R\sqrt{1 + \omega^2 t^2}$.

Η σχέση $\dot{\phi} = \dfrac{\omega R^2}{\varpi^2} - \omega = \dfrac{\omega}{1+\omega^2 t^2} - \omega$ ολοκληρώνεται σε $\phi = \arctan(\omega t) - \omega t$. Για το σημείο Β είναι $\varpi_B = \dfrac{R}{\cos\mu} \Leftrightarrow R\sqrt{1+\omega^2 t^2} = \dfrac{R}{\cos\mu} \Leftrightarrow \omega t = \tan\mu$ και άρα $\phi_B = \arctan(\tan\mu) - \tan\mu = -(\tan\mu - \mu)$.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να μελετήσουμε την τροχιά στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (βλέπε παρακάτω σχήμα) στο οποίο το σώμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά με ταχύτητα $\vec{v}_a = \omega R\hat{y}'$ (ίση με την αρχική του $\vec{\omega}\times\vec{r}$) και έχει θέση $x' = R$, $y' = \omega R t$ σε κάθε χρόνο. Φτάνει στην εξωτερική ακτίνα όταν $x'^2 + y'^2 = \left(\dfrac{R}{\cos\mu}\right)^2 \Leftrightarrow$ $\omega t = \tan\mu$, άρα στο αδρανειακό σύστημα το σημείο Β έχει συντεταγμένες $x' = R$, $y' = R\tan\mu$, δηλ. η γωνιακή του απόσταση από τον άξονα $\hat{x}'$ είναι μ. Το Α' που περιστρέφεται με ω έχει γωνιακή απόσταση από τον άξονα $\hat{x}'$ ίση με $\omega t = \tan\mu$, επομένως η σχετική γωνιακή απόσταση μεταξύ Α' και Β είναι $\tan\mu - \mu$ (με το Α' να προηγείται γιατί $\tan\mu > \mu$).



Είναι αξιοσημείωτο ότι η τροχιά του σώματος, άρα και η θέση του Β, δεν εξαρτάται από την γωνιακή ταχύτητα! Ο λόγος είναι ότι δεν υπάρχει άλλη χρονική κλίμακα στο πρόβλημα πέραν της περιόδου περιστροφής, οπότε οι συναρτήσεις x, y εξαρτώνται μόνο από τον αδιάστατο συνδυασμό ωt. Για να βρούμε την τροχιά απαλείφουμε το χρόνο, οπότε χάνεται και η εξάρτηση από το ω. Οι συντεταγμένες είναι επίσης ανάλογες της κλίμακας μήκους R, δηλ. έχουν μορφή $x = R\,\mathcal{X}(\omega t)$, $y = R\,\mathcal{Y}(\omega t)$, οπότε η τροχιά προκύπτει μία δεδομένη σχέση μεταξύ των x/R και y/R. Αυτό σημαίνει ότι σε διαφορετικών μεγεθών σταθμούς είναι μεγέθυνση/σμίκρυνση της ίδιας καμπύλης. Το παρακάτω σχήμα δείχνει την τροχιά στο περιστρεφόμενο σύστημα για $R\cos\mu = R/10$ (αν η εξωτερική ακτίνα είναι μικρότερη η τροχιά σταματά νωρίτερα, εκεί που συναντά την εξωτερική ακτίνα).



(β) Για την κίνηση στο περιστρεφόμενο σύστημα υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας (συμπεριλαμβάνει τη δυναμική ενέργεια της φυγόκεντρου) $\dfrac{mv_\sigma^2}{2} - \dfrac{m\omega^2\varpi^2}{2} = E = -\dfrac{m\omega^2 R^2}{2}$ (από αρχικές συνθήκες). Κατά την κρούση αντιστρέφεται η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας αλλά το μέτρο δεν αλλάζει, άρα ισχύει το ίδιο ολοκλήρωμα. Όταν $\varpi = R$ προκύπτει $v_\sigma = 0$, δηλ. το σώμα φτάνει στην οροφή με μηδενική ταχύτητα.

Αν εργαστούμε στο αδρανειακό, η κινητική ενέργεια διατηρείται, δηλ. το μέτρο της $\vec{v}_a$ διατηρείται και είναι ίσο με ωR (από αρχικές συνθήκες). Επίσης διατηρείται η στροφορμή ως προς το κέντρο (δεν αλλάζει κατά την κρούση γιατί η δύναμη είναι κεντρική), οπότε $\varpi v_{a\phi} = \omega^2 R$. Όταν το σώμα φτάσει στην οροφή θα είναι $v_{a\phi} = \omega R$, οπότε $v_{a\varpi} = 0$ (η τροχιά στο αδρανειακό είναι ευθεία εφαπτόμενη στην οροφή). Η σχέση $\vec{v}_a = \vec{v}_\sigma + \vec{\omega}\times\vec{r}$ δίνει $v_\sigma = 0$.