Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, 25 Σεπτεμβρίου 2023
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Θέμα 1^o:

Σώμα μάζας $m = 1$ (σε κατάλληλες μονάδες) κινείται ευθύγραμμα στο ελκτικό πεδίο

$$V = -\frac{1}{|x|^n}, \quad n > 0.$$

(α) Γράψτε το ολοκλήρωμα ενέργειας.
(β) Περιγράψτε την κίνηση για διάφορες ενέργειες.
(γ) Έστω ότι το σώμα πλησιάζει προς το κέντρο, έχοντας ξεκινήσει από πρακτικά άπειρη απόσταση $x = +\infty$ με μηδενική ταχύτητα.
(γ_1) Ποια η ταχύτητά του σε κάθε θέση;
(γ_2) Πόσο χρόνο χρειάζεται για να διανύσει την απόσταση από το σημείο $x_0 > 0$ μέχρι το κέντρο $x = 0$ (έχοντας ξεκινήσει από άπειρη απόσταση);
(δ) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης.

Θέμα 2^o:

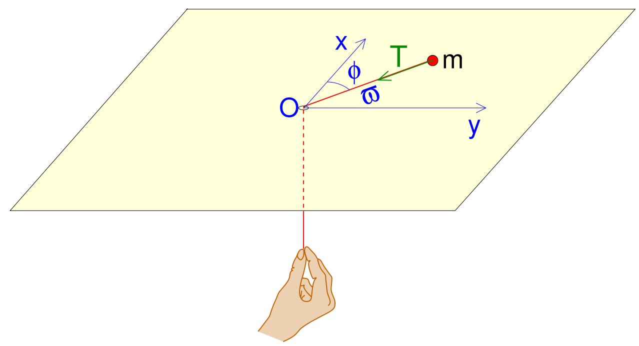
Ένα σωματίδιο μάζας $m = 1$ κινείται στο επίπεδο $x - y$ μέσα στο δυναμικό:

$$V(x, y) = \frac{x^2}{2} + |y|.$$

(α) Ελέγξτε αν η δύναμη που προκύπτει από το δυναμικό αυτό είναι κεντρική.
(β) Το σωματίδιο ξεκινά ακίνητο από τη θέση $x(0) = a$, $y(0) = 0$. Σε πόσο χρόνο θα βρεθεί και πάλι στην ίδια θέση ακίνητο;
(γ) Το σωματίδιο ξεκινά ακίνητο από τη θέση $x(0) = 0$, $y(0) = b$. Σε πόσο χρόνο θα βρεθεί και πάλι στην ίδια θέση ακίνητο; Υπολογίστε την τιμή b_0 του b ώστε ο χρόνος επαναφοράς να συμπίπτει με το χρόνο που βρήκατε στο ερώτημα (β).
(δ) Αν το σωματίδιο ξεκινήσει ακίνητο από τη θέση $x(0) = 2a$, $y(0) = 2b_0$, όπου b_0 η κατάλληλη τιμή του b που υπολογίσατε στο τελευταίο υποερώτημα του (γ), ποια θα είναι η στροφορμή του σωματιδίου όταν αυτό θα διέλθει για πρώτη φορά από τον άξονα y;

Θέμα 3^o:

Σώμα m κινείται χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο τραπέζι, δεμένο σε αβαρές και μη-εκτατό νήμα που περνά από οπή του τραπεζιού και είναι τεντωμένο. Το άλλο άκρο του νήματος κινείται με τρόπο ώστε η απόσταση του σώματος από την οπή O να είναι μια γνωστή συνάρτηση του χρόνου $\varpi(t)$.
Αρχικά (για $t = 0$) το σώμα βρίσκεται σε σημείο $\varpi_0 > 0$ του άξονα x (δηλ. $\varpi|_{t=0} = \varpi_0$, $\phi|_{t=0} = 0$) και έχει ταχύτητα $\omega_0 \varpi_0 \hat{y}$ κάθετη στο διάνυσμα θέσης (δηλ. $\dot{\phi}|_{t=0} = \omega_0$).



(α) Ποια είναι η αρχική στροφορμή του σώματος;
(β) Ποια σχέση καθορίζει τη γωνία ϕ σε κάθε χρόνο; Ζητείται δηλ. η «συνταγή» του πως θα βρούμε την $\phi(t)$ αν ξέρουμε την $\varpi(t)$ και τις σταθερές ϖ_0, ω_0.
(γ) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $\varpi(t)$ ώστε το νήμα να είναι διαρκώς τεντωμένο; Ζητείται δηλ. μια σχέση που εμπεριέχει την $\varpi(t)$ (και τις παραγώγους της) και καμία άλλη συνάρτηση.
(δ) Αν γνωρίζουμε ότι $\varpi = \dfrac{\varpi_0}{1 + \lambda \cos\phi}$ με σταθερό $\lambda \in (0, 1)$ υπάρχει περίπτωση να χαλαρώσει το νήμα;

Δίνεται σε πολικές $\vec{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d(\varpi^2\dot{\phi})}{dt}\hat{\phi}$.

Θέμα 4^o:

Ένα σημειακό σωματίδιο μάζας M βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.
(α) Να γραφεί σε διανυσματική μορφή η ένταση του βαρυτικού πεδίου στη θέση $\vec{r}$.
(β) Να υπολογιστεί η ροή της έντασης του βαρυτικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια κάποιου κυλίνδρου ακτίνας R και μήκους $2L$ (χωρίς τις βάσεις), με άξονα συμμετρίας τον άξονα z και κέντρο την αρχή των αξόνων (ο κύλινδρος εκτείνεται από $z = -L$ ως $z = L$).
(γ) Που τείνει η ροή αυτή, αν ο κύλινδρος έχει άπειρο μήκος ($L \to \infty$);
(δ) Συγκρίνετε τη ροή αυτή με τη ροή από μια κλειστή επιφάνεια που περιβάλλει πλήρως το σωματίδιο και εξηγήστε γιατί υπάρχει ή δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ των δύο αυτών ροών.

Δίδεται το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^A \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}}$.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^o:

(α) $\dot{x}^2/2 - 1/|x|^n = E$.

(β) Μέσω του γραφήματος της $V(x)$ το οποίο φαίνεται στην απάντηση του ερωτήματος (γ) παρακάτω, (στην περιοχή $x > 0$ είναι αύξουσα, μεταβάλλεται από $V(0^+) = -\infty$ σε $V(+\infty) = 0$, ενώ στο $x < 0$ επεκτείνεται άρτια) συμπεραίνουμε τα ακόλουθα:

Για $E > 0$ δεν αλλάζει φορά κίνησης, καταλήγει στο $+\infty$ ή το $-\infty$ ανάλογα με την φορά της ταχύτητας.

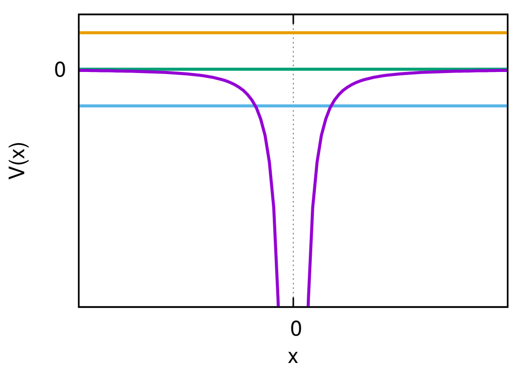
Για $E = 0$ όπως πριν, με τη μόνη διαφορά ότι φτάνει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα.

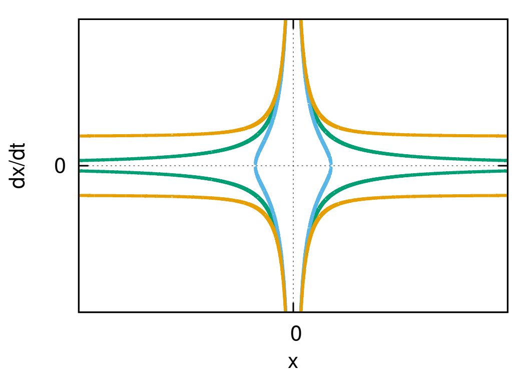
Για $E < 0$ εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των σημείων όπου $E = V(x)$, δηλ. των $x = \pm(-E)^{-1/n}$.

(γ_1) Η ενέργειά του $\dot{x}^2/2 - 1/|x|^n = E$ είναι μηδενική (ώστε $\dot{x} = 0$ για $x = +\infty$). Άρα σε κάθε θέση είναι $|\dot{x}| = \sqrt{2/|x|^n}$. Αφού ξεκίνησε από $x = +\infty$ είναι συνεχώς $\dot{x} < 0$, άρα $\dot{x} = -\sqrt{2/|x|^n}$.

(γ_2) $\Delta t = \displaystyle\int_{x_0}^{0} \frac{dx}{\dot{x}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^{0} x^{n/2} dx = \frac{\sqrt{2}}{n+2} x_0^{n/2+1}$.

(δ) Παρακάτω φαίνονται τρεις καμπύλες φάσης που αντιστοιχούν σε αρνητική, μηδενική και θετική ενέργεια (οι τιμές τις ενέργειας φαίνονται και στο γράφημα της δυναμικής ενέργειας). Στο σημείο $x = 0$ όπου η δυναμική ενέργεια γίνεται $-\infty$ η κινητική ενέργεια, άρα και η ταχύτητα, επίσης απειρίζεται.





Θέμα 2^o:

(α) $$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -x\hat{x} - \mathrm{sign(y)}\hat{\mathrm{y}}$$
sign είναι η συνάρτηση πρόσημο. Η δύναμη δεν είναι κεντρική αφού για παράδειγμα στη θέση $(2, 2)$ η δύναμη είναι $-(2, 1)$ (όχι στην ίδια διεύθυνση με τη θέση).

(β) Εφόσον $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ είναι $y(t) = 0$ (θεωρούμε ότι η δύναμη μηδενίζεται στο σημείο αυτό αφού αν για οποιονδήποτε λόγο κινηθεί εκτός του 0 μια σταθερή δύναμη επαναφοράς θα το επαναφέρει). Επομένως
$$\ddot{x} + x = 0 \to x(t) = a\cos t$$
σύμφωνα με τις δοσμένες αρχικές συνθήκες. Στην ίδια θέση λοιπόν θα βρεθεί την $t_1 = 2\pi$.

(γ) Η κίνηση θα είναι ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση 1, προς το 0 και στη συνέχεια ομαλά επιβραδυνόμενη μέχρι το $-b$. Συνολικός χρόνος επαναφοράς $t_2 = 4t_{b\to 0} = 4\sqrt{2b}$, αφού $0 = b - \frac{1}{2}t_{b\to 0}^2$. Εξισώνοντας τους 2 χρόνους βρίσκουμε $b_0 = \pi^2/8$.

(δ) Όταν χτυπήσει τον άξονα y, θα έχει θέση $x = 0, y = 2b_0 - 1/2T^2$ και ταχύτητα $v_x = -2a, v_y = -T$ με $T = \pi/2$, οπότε $L_z = -yv_x = 2a(2(\pi^2/8) - (\pi/2)^2/2) = a\pi^2/4$. Η μη διατήρηση της στροφορμής είναι συμβατή με τη μη κεντρικότητα της δύναμης. **Προσοχή:** μην συγχέετε την κεντρικότητα με τη συντηρητικότητα (εδώ η δύναμη αν και μη κεντρική είναι συντηρητική).

Θέμα 3^o:

(α) $L = m\varpi_0^2\omega_0$.

(β) Αφού η συνισταμένη δύναμη είναι η τάση του νήματος (το βάρος και η κάθετη αντίδραση αλληλοαναιρούνται), η οποία έχει τη διεύθυνση του $\vec{r}$ και άρα μηδενική ροπή, η στροφορμή διατηρείται. Δηλ. ισχύει $\varpi^2\dot{\phi} = \varpi_0^2\omega_0$ και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τη γωνία $\displaystyle\int_0^{\phi} d\phi = \int_0^t \dot{\phi}\, dt \Leftrightarrow \phi = \int_0^t \frac{\varpi_0^2\omega_0}{[\varpi(t)]^2}\, dt$.

(γ) Πρέπει η τάση του νήματος να έχει φορά προς το O ή να είναι οριακά μηδενική, δηλ. να είναι $\vec{T} = -T\hat{\varpi}$ με $T \geq 0$. Από την ακτινική συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $m(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2) = -T$, ή, αντικαθιστώντας την $\dot{\phi}$ από τη διατήρηση στροφορμής, $m(\ddot{\varpi} - \varpi_0^4\omega_0^2/\varpi^3) = -T$, συμπεραίνουμε ότι πρέπει να ισχύει σε κάθε χρόνο $\varpi^3\ddot{\varpi} \leq \varpi_0^4\omega_0^2$.

Η συνθήκη αυτή γράφεται και σαν $\frac{dv^2}{d\varpi} \le 0$ όπου $v^2 = \dot{\varpi}^2 + \frac{\varpi_0^4\omega_0^2}{\varpi^2}$, δηλ. είναι ισοδύναμη με την απαίτηση η ισχύς της τάσης (που ισούται με το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας) να είναι ετερόσημη της ακτινικής ταχύτητας.

(δ) Όχι, γιατί η τροχιά αυτή είναι ελλειπτική με τη μία εστία στο O, οπότε η δύναμη είναι ελκτική $T = k/\varpi^2$ με $k > 0$.

Αυτό βέβαια προκύπτει και μέσω της ανισότητας $\varpi^3\ddot{\varpi} \le \varpi_0^4\omega_0^2$, η οποία ισχύει λόγω $\dot{\varpi} = \frac{\varpi_0\lambda\dot{\phi}\sin\phi}{(1+\lambda\cos\phi)^2} = \lambda\varpi_0\omega_0\sin\phi$ (από διατήρηση στροφορμής) και $\ddot{\varpi} = \lambda\varpi_0\omega_0\dot{\phi}\cos\phi = \lambda\frac{\varpi_0^3\omega_0^2}{\varpi^2}\cos\phi$. (Η τάση είναι $T = -m(\ddot{\varpi} - \frac{\varpi_0^4\omega_0^2}{\varpi^3}) = \frac{m\varpi_0^3\omega_0^2}{\varpi^2}$.)

Θέμα 4ο:

(α) $\vec{g} = -GM\vec{r}/r^3 = -GM\hat{r}/r^2$.

(β) $\int_{\text{κυλ}} \vec{g}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_{-L}^{+L} -\frac{GM}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{\rho}R dz\, d\phi = -GM2\pi R^2\int_{-L}^{+L}\frac{dz}{(z^2+R^2)^{3/2}} = -4\pi GM\frac{L/R}{\sqrt{1+\frac{L^2}{R^2}}}$

(γ) Η ροή τείνει στο $-4\pi GM$ καθώς $L/R \to \infty$.

(δ) Ο λόγος που συμπίπτει στο ερώτημα (γ) η απάντηση με αυτήν στην περίπτωση κλειστής επιφάνειας είναι ότι, παρότι η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου είναι μη κλειστή, η συμβολή στη ροή των «καπακιών» στο άπειρο είναι μηδενική καθότι η αντίστοιχη στερεά γωνία υπό την οποία φαίνονται αυτά είναι μηδενική (η στερεά γωνία προκύπτει από το γινόμενο της έντασης που πάει σαν $1/r^2$ επί την επιφάνεια που πάει σαν $d\Omega\, r^2$).