Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, 23 Ιανουαρίου 2023
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Απαντήστε και στα 4 θέματα, Καλή επιτυχία

Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: _________________

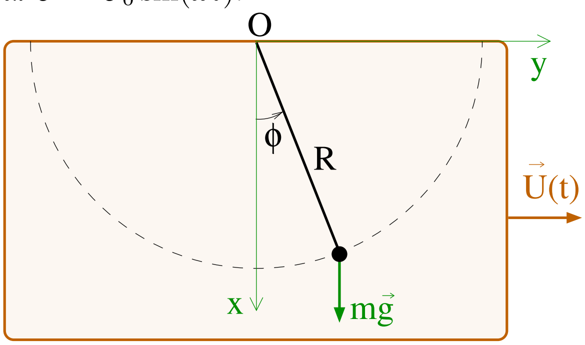
Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 29ης Νοεμβρίου 2022: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐
Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Θέμα 1^o:

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο μονοδιάστατο πεδίο με δυναμική ενέργεια $V(x) = 2m\alpha^2(x-x_0)^2$ με $\alpha > 0$.
(α) Να βρεθούν οι διαστάσεις της παραμέτρου α.
(β) Το σωματίδιο ξεκινά από τη θέση $x(0) = 0$ με ταχύτητα $v(0) = 0$. Σε ποιο διάστημα θα κινείται το σωματίδιο; Τι κίνηση θα κάνει;
(γ) Κατασκευάστε το διάγραμμα φάσης του και περιγράψτε το σχήμα της καμπύλης.
(δ) Στο σωματίδιο δρα επιπλέον μια δύναμη που εξαρτάται από την ταχύτητα αυτού, της μορφής $F(v) = -4m\alpha v$, όπου α η θετική σταθερά του δυναμικού. Να βρεθεί η κίνηση $x(t)$ του σωματιδίου αν οι αρχικές συνθήκες είναι αυτές του ερωτήματος (β).
(ε) Που πιστεύετε ότι θα καταλήξει το σωματίδιο μετά από αρκετό χρόνο; Τι θα νοούνταν ως «αρκετός χρόνος»;

Θέμα 2^o:

Έστω επίπεδο ιδανικό εκκρεμές μέσα σε θάλαμο. Αρχικά ο θάλαμος είναι ακίνητος και το σώμα του εκκρεμούς ακίνητο στην κατώτερη θέση. Το χρόνο $t = 0$ θέτουμε σε οριζόντια ταλαντωτική κίνηση το θάλαμο, ώστε η ταχύτητά του σε κάθε επόμενη στιγμή να είναι $U = U_0 \sin(\omega t)$.



(α) Ποια η ψευδοδύναμη που πρέπει να προστεθεί για να μελετήσουμε την κίνηση του εκκρεμούς στο σύστημα του θαλάμου;
(β) Ποια η εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς, δηλ. η διαφορική εξίσωση που δίνει την $\phi(t)$;
(γ) Επιλύστε την εξίσωση στην περίπτωση ταλαντώσεων μικρού γωνιακού πλάτους ($|\phi| \ll 1$).
(δ) Τι κίνηση προκύπτει αν η συχνότητα ταλάντωσης του θαλάμου είναι πολύ μεγάλη σε σύγκριση τόσο με την ιδιοσυχνότητα του εκκρεμούς όσο και με την ποσότητα U_0/R;
Δίνονται $\hat{x} = \cos\phi\,\hat{r} - \sin\phi\,\hat{\phi}$, $\hat{y} = \sin\phi\,\hat{r} + \cos\phi\,\hat{\phi}$.

Θέμα 3^o:

Σώμα μάζας $m = 1$ (σε κατάλληλες μονάδες) κινείται σε πεδίο κεντρικής δύναμης $\vec{F} = \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)\hat{r}$.
Αρχικά βρίσκεται σε άπειρη απόσταση και κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_\infty = 1/\sqrt{3}$ και παράμετρο κρούσης $b = 2$ ως προς το κέντρο της δύναμης Ο.
(α) Ποια η στροφορμή του ως προς το Ο;
(β) Βρείτε την ενεργό δυναμική ενέργεια και σχεδιάστε το γράφημά της.
(γ) Ποια η ακτίνα του περίκεντρου της τροχιάς του σώματος;
(δ) Με δεδομένο ότι η τροχιά του σώματος έχει μορφή $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos(\lambda\phi)}$ βρείτε την σταθερά λ.
Δίνεται $u'' + u = -\dfrac{mF}{L^2u^2}$.

Θέμα 4^o:

Δύο λεπτοί ομόκεντροι σφαιρικοί φλοιοί, αποτελούμενοι και οι δύο από υλικό συγκεκριμένης επιφανειακής πυκνότητας, βρίσκονται ο ένας τοποθετημένος μέσα στον άλλο. Ο μικρός έχει ακτίνα R_2, και ο μεγάλος ακτίνα R_1. Είναι $R_1 > R_2$.
(α) Να υπολογιστεί η ένταση του βαρυτικού πεδίου $\vec{g}(\vec{r})$ **στο χώρο μεταξύ των δύο φλοιών** ως συνάρτηση του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ ως προς το κέντρο των δύο φλοιών.
(β) Τι θα συμβεί στην ένταση σε κάποιο σημείο μεταξύ των φλοιών, αν μεγαλώσουμε την ακτίνα του μεγάλου φλοιού, χωρίς να αλλάξουμε το κέντρο του; (Θα μεγαλώσει, θα μικρύνει, θα μείνει ίδια;)
(γ) Αν ανοίξουμε στον μεγάλο φλοιό μια πολύ μικρή τρύπα εμβαδού δS, πόση θα είναι η δύναμη που θα αναπτυχθεί στον μικρό φλοιό;
(δ) Αν η σχεδόν σημειακή μάζα της μικρής τρύπας που ανοίξαμε στον μεγάλο φλοιό κολληθεί στον μεγάλο φλοιό στο αντιδιαμετρικό σημείο από το σημείο της τρύπας πόση μεγαλύτερη θα είναι η δύναμη που θα αναπτυχθεί στον μικρό φλοιό;
(ε) Αν ο μεγάλος φλοιός, ολόκληρος χωρίς την τρύπα των προηγούμενων ερωτημάτων, κρατηθεί σταθερός ενώ ο μικρός μετακινηθεί κατά μια μικρή απόσταση έτσι ώστε να παραμείνει εξ' ολοκλήρου εντός του μεγάλου και στη συνέχεια του δοθεί μια μικρή ώθηση προς το κέντρο του μεγάλου φλοιού, τι κίνηση θα εκτελέσει ο μικρός φλοιός μέχρι να χτυπήσει στο εσωτερικό του μεγάλου φλοιού;

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

(α) Οι διαστάσεις του α είναι

$$[\alpha] = \sqrt{\frac{[E]}{[M][L]^2}} = \sqrt{\frac{[ML^2/T^2]}{[ML^2]}} = 1/T \ .$$

δηλαδή μονάδες συχνότητας.

(β) Το δυναμικό είναι αυτό ενός αρμονικού ταλαντωτή με σημείο ισορροπίας το $x_{\iota\sigma o\rho} = x_0$, επομένως θα ξανασταματήσει όταν φτάσει στο συμμετρικό σε σχέση με το σημείο ισορροπίας του αρχικού σημείου, δηλαδή το $2x_0$, έχοντας εκτελέσει μισή ταλάντωση. Εξάλλου

$$E = E_k + V = 0 + 2m\alpha^2(-x_0)^2 \text{ αρχικά, } E = E_k + V = 2m\alpha^2(x - x_0)^2 \text{ τελικά,}$$

οπότε λύνοντας τη σχέση $|x - x_0| = |x_0| \Rightarrow x = 2x_0$. Το σωματίδιο θα ταλαντώνεται στο διάστημα $\{0, 2x_0\}$ ή $\{2x_0, 0\}$ ανάλογα με το αν το x_0 είναι θετικό ή αρνητικό αντίστοιχα.

(γ) Το διάγραμμα φάσης θα είναι μια έλλειψη με κέντρο το $x_0, 0$ ημιάξονα κατά μήκος του x, $|x_0|$, και κατά μήκος του v, $2\alpha|x_0|$ αφού

$$E = E_k + V = 0 + 2m\alpha^2(-x_0)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \ .$$

(δ)
$$m\ddot{x} = -4m\alpha\dot{x} + F = -4m\alpha\dot{x} - V' = -4m\alpha\dot{x} - 4m\alpha^2(x - x_0)$$

και αλλάζοντας την μεταβλητή σε $\xi = x - x_0$:

$$\ddot{\xi} + 4\alpha\dot{\xi} + 4\alpha^2\xi = 0$$

με γενική λύση

$$\xi(t) = Ae^{-2\alpha t} + Bte^{-2\alpha t}$$

(κρίσιμη απόσβεση) αφού το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εκθετικής λύσης $e^{\lambda t}$ είναι

$$\lambda^2 + 4\alpha\lambda + 4\alpha^2 = (\lambda + 2\alpha)^2 = 0 \ .$$

Οι A, B προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες $\xi(0) = -x_0, \dot{\xi}(0) = 0$ και είναι $A = -x_0, B = -2\alpha x_0$.

(ε) Το σωματίδιο λόγω της αντίστασης θα καταλήξει ακίνητο στο σημείο ισορροπίας, το x_0. Αυτό θα συμβεί μετά από μερικούς χαρακτηριστικούς χρόνους $1/\gamma = 1/(2\alpha)$, οπότε μετά από $t >> 1/2\alpha$ το σωματίδιο θα βρίσκεται πρακτικά στο x_0.

Θέμα 2ο:

(α) Η ψευδοδύναμη είναι $-m\vec{a}_0$ όπου $\vec{a}_0 = \dot{U}\hat{y} = U_0\omega\cos(\omega t)\hat{y}$ η επιτάχυνση της αρχής του μη-αδρανειακού συστήματος του θαλάμου.

(β) Στο μη-αδρανειακό σύστημα του θαλάμου ο νόμος Νεύτωνα είναι $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a}_0$, με $\vec{a} = R\ddot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}^2\hat{r}$, $\vec{g} = g\hat{x} = g(\cos\phi\hat{r} - \sin\phi\hat{\phi})$, $\vec{T} = -T\hat{r}$, $\vec{a}_0 = U_0\omega\cos(\omega t)(\sin\phi\hat{r} + \cos\phi\hat{\phi})$. Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα δίνει την εξίσωση κίνησης $\ddot{\phi} + \omega_0^2\sin\phi = -\dfrac{U_0\omega}{R}\cos(\omega t)\cos\phi$, όπου $\omega_0 = \sqrt{g/R}$ η ιδιοσυχνότητα του εκκρεμούς.

(γ) Αν $|\phi| \ll 1$ οπότε $\sin\phi \approx \phi$ και $\cos\phi \approx 1$ η εξίσωση κίνησης γίνεται $\ddot{\phi} + \omega_0^2\phi = -\dfrac{U_0\omega}{R}\cos(\omega t)$, δηλ. γραμμική, μη-ομογενής διαφορική εξίσωση που περιγράφει εξαναγκασμένη ταλάντωση.

Μια μερική της λύση είναι $A\cos(\omega t)$ με την αντικατάσταση να δίνει $A = \dfrac{\omega U_0/R}{\omega^2 - \omega_0^2}$, ενώ η λύση της ομογενούς είναι $C_1\sin(\omega_0 t) + C_2\cos(\omega_0 t)$. Άρα η γενική λύση είναι $\phi = \dfrac{\omega U_0/R}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega t) + C_1\sin(\omega_0 t) + C_2\cos(\omega_0 t)$.

Οι σταθερές C_1 και C_2 καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες $\phi|_{t=0} = 0$ και $\dot{\phi}|_{t=0} = 0$ (αφού αρχικά $U = 0$ τόσο η απόλυτη όσο και η σχετική ταχύτητα του σώματος είναι μηδενική). Έτσι προκύπτει η λύση $\phi = \dfrac{\omega U_0/R}{\omega^2 - \omega_0^2}[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)]$, δηλ. η κίνηση είναι σύνθεση ταλαντώσεων, μίας με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή και μίας με την συχνότητα του διεγέρτη.

(δ) Αν $\omega \gg \omega_0$ η λύση απλοποιείται σε $\phi \approx \dfrac{U_0}{\omega R}[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)]$. Λόγω της $\omega \gg U_0/R$ το γωνιακό πλάτος ταλάντωσης είναι αμελητέο, δηλ. το σώμα πρακτικά μένει ακίνητο ως προς το θάλαμο (το εκκρεμές δεν έχει το χρόνο να αντιδράσει στις πολύ γρήγορες ταλαντώσεις του θαλάμου).

Θέμα 3^o:

(α) Αφού η δύναμη είναι κεντρική η στροφορμή είναι σταθερή και μπορεί να υπολογιστεί την αρχική στιγμή από $\vec{L} = m\vec{r}_\perp \times \vec{v}$. Είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς και έχει μέτρο $L = mbv_\infty = \sqrt{4/3}$.

(β) Η δυναμική ενέργεια είναι $V(r) = -\int F\,dr = -\frac{1}{r} + \frac{1}{2r^2}$ μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά. Η ενεργός δυναμική ενέργεια είναι $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = -\frac{1}{r} + \frac{7}{6r^2}$ και έχει τη μορφή του ενεργού δυναμικού του προβλήματος Κέπλερ.

(γ) Η ενέργεια του σώματος μπορεί να υπολογιστεί την αρχική στιγμή και είναι $E = \frac{mv_\infty^2}{2} + 0 = \frac{1}{6}$.
Στο περίκεντρο ισχύει $V_{\text{eff}}(r) = E \Leftrightarrow r^2 + 6r - 7 = 0$ και προκύπτει μία θετική λύση, η $r = 1$.

(δ) Η τροχιά βρίσκεται από $u'' + u = -\frac{mF}{L^2u^2}$ όπου $u = \frac{1}{r(\phi)}$. Αντικαθιστώντας $F = -u^2 + u^3$ και $L^2 = \frac{4}{3}$ προκύπτει $u'' + \frac{7}{4}u = \frac{3}{4}$. Η γενική λύση είναι το άθροισμα της λύσης της ομογενούς $D\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\phi + C\right)$ και μίας μερικής λύσης, που για την συγκεκριμένη εξίσωση είναι σταθερή και ίση με $\frac{3}{7}$. Επομένως $u = D\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\phi + C\right) + \frac{3}{7} \Leftrightarrow$

$r = \frac{7/3}{1 + \frac{7D}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\phi + C\right)}$. Με κατάλληλη στροφή του συστήματος μπορούμε να διώξουμε τη σταθερά C (στο νέο σύστημα το περίκεντρο, στο οποίο η r γίνεται ελάχιστη, αντιστοιχεί σε $\phi = 0$). Έτσι βρίσκουμε την έκφραση της εκφώνησης με $\lambda = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Η τιμή της λ θα μπορούσε να βρεθεί και αντικαθιστώντας $u = \frac{1 + \varepsilon\cos(\lambda\phi)}{p}$ στην διαφορική εξίσωση $u'' + \frac{7}{4}u = \frac{3}{4}$, οπότε προκύπτει $\frac{\varepsilon}{p}\left(\frac{7}{4} - \lambda^2\right)\cos(\lambda\phi) + \frac{7}{4p} = \frac{3}{4}$. Για να ισχύει η έκφραση αυτή για κάθε ϕ πρέπει ο συντελεστής του συνημιτόνου να μηδενίζεται, δηλ. $\lambda = \frac{\sqrt{7}}{2}$ (η περίπτωση $\varepsilon = 0$ απορρίπτεται γιατί αντιστοιχεί σε κυκλική τροχιά κάτι που δεν συμφωνεί με τις αρχικές συνθήκες).

Θέμα 4^o:

(α) Το βαρυτικό πεδίο στο εσωτερικό του μεγάλου φλοιού θα είναι μηδενικό εξαιτίας του μεγάλου φλοιού. Επομένως αναμεταξύ των δύο φλοιών θα οφείλεται αποκλειστικά στον μικρό, που λόγω σφαιρικής συμμετρίας θα είναι

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM_2}{r^2}\hat{r} = \frac{G\sigma 4\pi R_2^2}{r^2}\hat{r}$$

για $R_2 < r < R_1$.

(β) Θα μείνει ίδια αφού ο μεγάλος δεν συνεισφέρει στο πεδίο.

(γ) Η τρύπα είναι ισοδύναμη με την τοποθέτηση μιας αρνητικής μάζας μεγέθους $m = -\sigma\delta S$. Αφού ο ολόκληρος φλοιός 1 δεν δημιουργεί βαρυτικό πεδίο στο εσωτερικό του η δύναμη που θα δέχεται ο εσωτερικός φλοιός θα οφείλεται αποκλειστικά στην m. Η δύναμη που θα ασκείται από την σχεδόν σημειακή μάζα m στον σφαιρικό φλοιό 2 θα είναι εξαιτίας του 3ου νόμου του Νέυτωνα αντίθετη με αυτήν που ασκεί ο φλοιός 2 στην m, δηλαδή

$$G\frac{\sigma^2 4\pi R_2^2 \delta S}{R_1^2}$$

με φορά προς το αντιδιαμετρικό σημείο της τρύπας (απωστική δύναμη λόγω $m < 0$).

(δ) Προσθέτοντας τη μάζα που αφαιρέσαμε ανοίγοντας την τρύπα στο αντιδιαμετρικό της τρύπας σημείο βρίσκουμε άλλη μια τόση έλξη τώρα (πραγματική και όχι αρνητική μάζα). Έτσι η δύναμη θα είναι 2πλάσια του προηγούμενου ερωτήματος.

(ε) Όπου και να τοποθετήσουμε τον μικρό φλοιό εντός του μεγάλου (χωρίς τρύπες) δεν θα δέχεται δύναμη. Επομένως η κίνηση του μικρού θα είναι ομαλή με την ταχύτητα που του προσέδωσε η ώθηση μέχρι να χτυπήσει στο εσωτερικό του μεγάλου.