Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Πρόοδος στη Μηχανική Ι, 29 Νοεμβρίου 2022
Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες, Απαντήστε και στα 3 θέματα, Καλή επιτυχία

Θέμα 1^o:

Σώμα μοναδιαίας μάζας $m = 1$ κινείται σε δεδομένη καμπύλη υπό την επίδραση κάθετης αντίδρασης και δύναμης αντίστασης με μέτρο ίσο με αυτό της ταχύτητας (σε κατάλληλες μονάδες). Η θέση του είναι σε κάθε χρόνο (σε καρτεσιανές συντεταγμένες)

$$x = \frac{\cos t - \sin t}{2} e^{-t}, \quad y = \frac{\cos t + \sin t}{2} e^{-t}, \quad z = 0.$$

(α) Ποιο το μοναδιαίο $\hat{\varepsilon}$ στη φορά κίνησης και ποια η επιτρόχια συνιστώσα της επιτάχυνσης $\vec{a}_\varepsilon$;

(β) Ποια η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης $\vec{a}_\kappa$, ποιο το μοναδιαίο $\hat{n}$ προς το κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς και ποια η ακτίνα καμπυλότητας $\mathcal{R}$;

(γ) Βρείτε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα σαν συνάρτηση του χρόνου και το έργο τους για την κίνηση από $t = 0$ ως $t = \ln 2$.

Θέμα 2^o:

Η κίνηση στο χώρο των φάσεων ενός σωματιδίου μάζας $m = 1$ που κινείται σε μία διάσταση δίνεται από τη σχέση

$$v = \begin{cases} \pm\sqrt{1-x} & \text{για} \quad 0 \le x \le 1 \\ \pm\sqrt{1+x} & \text{για} \quad 0 > x \ge -1 \end{cases}$$

(α) Σχεδιάστε την κίνηση στο χώρο των φάσεων.

(β) Ποια δύναμη ασκείται στο σωματίδιο;

(γ) Υπολογίστε με οποιονδήποτε τρόπο την περίοδο ταλάντωσης του σωματιδίου.

(δ) Αν αρχικά το σωματίδιο που δέχεται αυτή τη δύναμη βρεθεί ακίνητο στη θέση $x = 1/2$, σε πόσο χρόνο θα φτάσει στη θέση $x = 0$;

(ε) Σχεδιάστε την κίνηση $x(t)$ του σωματιδίου που δέχεται αυτή τη δύναμη αν αρχικά $x(0) = 0$ και $v(0) = 1$.

Θέμα 3^o:

Θεωρήστε έναν αρμονικό ταλαντωτή με μάζα $m = 1$ και ελατήριο τέτοιο ώστε η συχνότητά του να είναι ω_0. Ο ταλαντωτής δεν έχει δύναμη αντίστασης.

(α) Αν ο ταλαντωτής διεγείρεται από μια δύναμη της μορφής $F(t) = \cos(2\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)$ και αρχικά ήταν στην κατάσταση $x(0) = v(0) = 0$, να υπολογιστεί η κίνησή του, $x(t)$.

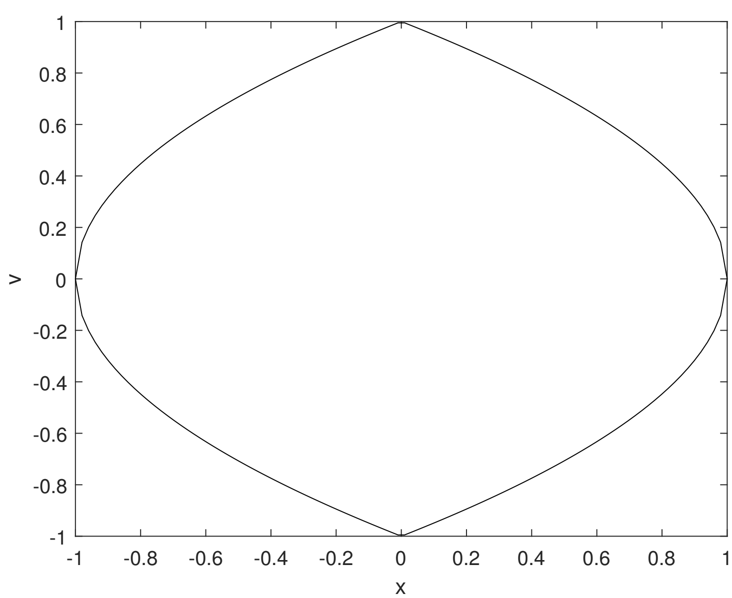
(β) Ο ίδιος αρμονικός ταλαντωτής, χωρίς την δύναμη $F(t)$ του προηγούμενου ερωτήματος, έχει το σημείο στήριξής του σε όχημα που επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση a_0, ενώ οι αρχικές του συνθήκες (στο επιταχυνόμενο σύστημα) είναι πάλι $x(0) = v(0) = 0$. Να υπολογιστεί στο επιταχυνόμενο σύστημα η κίνηση του ταλαντωτή.

(γ) Σχετικά με το ερώτημα (β), ποια αρχική κατάσταση του ταλαντωτή $x(0)$, $v(0)$ στο επιταχυνόμενο σύστημα θα άφηνε τον ταλαντωτή μόνιμα στην κατάσταση αυτή, δηλαδή $x(t) = x(0), v(t) = v(0)$;

<u>ΛΥΣΕΙΣ:</u>

<u>Θέμα 1^o:</u>
$\dot{x} = -\cos t \; e^{-t}$, $\dot{y} = -\sin t \; e^{-t}$, $\ddot{x} = (\cos t + \sin t)e^{-t}$, $\ddot{y} = (\sin t - \cos t)e^{-t}$.
$\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} = e^{-t}(-\cos t \; \hat{x} - \sin t \; \hat{y})$, $\vec{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} = (\cos t + \sin t)e^{-t}\hat{x} + (\sin t - \cos t)e^{-t}\hat{y}$.
(α) $\hat{\varepsilon} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\cos t \; \hat{x} - \sin t \; \hat{y}$, διότι $|\vec{v}| = e^{-t}$.
$\vec{a}_\varepsilon = (\vec{a} \cdot \hat{\varepsilon})\hat{\varepsilon} = e^{-t}(\cos t \; \hat{x} + \sin t \; \hat{y})$.
Αλλιώς: $\vec{a}_\varepsilon = \dfrac{d|\vec{v}|}{dt}\hat{\varepsilon}$ με $\dfrac{d|\vec{v}|}{dt} = -e^{-t}$.
(β) $\vec{a}_\kappa = \vec{a} - \vec{a}_\varepsilon = e^{-t}\,(\sin t \; \hat{x} - \cos t \; \hat{y})$.
$\hat{n} = \dfrac{\vec{a}_\kappa}{|\vec{a}_\kappa|} = \sin t \; \hat{x} - \cos t \; \hat{y}$, διότι $|\vec{a}_\kappa| = e^{-t}$.
$|\vec{a}_\kappa| = \dfrac{v^2}{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \mathcal{R} = \dfrac{v^2}{|\vec{a}_\kappa|} = e^{-t}$.
(γ) Η αντίσταση είναι $\vec{F} = m\vec{a}_\varepsilon = -e^{-t}\hat{\varepsilon} = -\vec{v}$ και η κάθετη αντίδραση $\vec{N} = m\vec{a}_\kappa = e^{-t}\hat{n}$.
Η κινητική ενέργεια $\dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{1}{2}e^{-2t}$ μειώνεται από $\dfrac{1}{2}$ το χρόνο $t = 0$ σε $\dfrac{1}{2}e^{-2\ln 2} = \dfrac{1}{8}$ το χρόνο $t = \ln 2$.
Άρα $W_F = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{8}$.
Αλλιώς: $W_F = \displaystyle\int \vec{F} \cdot \vec{v} dt = -\int_0^{\ln 2} e^{-2t} dt = -\frac{3}{8}$.
Το έργο της κάθετης αντίδρασης είναι μηδενικό.

<u>Θέμα 2^o:</u>
(α) Πρόκειται για δύο αντικρυστές παραβολές. Η φορά είναι ωρολογιακή.



(β) Επειδή η σχέση ταχύτητας-θέσης είναι η δοσμένη

$$\frac{1}{2}v^2 + V(x) = E \Rightarrow \frac{1 - |x|}{2} + V(x) = E$$

θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι $V(x) = \dfrac{|x|}{2} + C$, οπότε

$$F(x) = -V'(x) = \begin{cases} -1/2 & \text{για } 0 \le x \\ +1/2 & \text{για } 0 > x \end{cases}$$

Ο περιορισμός στο διάστημα $[-1, 1]$ σχετίζεται με την επιλογή της τιμής της ενέργειας και μπορούμε να υποθέσουμε ότι η δυναμική ενέργεια είναι ίδια και εκτός αυτού του διαστήματος.
(γ) Η περίοδος είναι αυτή ενός ομαλά επιταχυνόμενου-επιβραδυνόμενου σωματιδίου, με μέτρο επιτάχυνσης $|a| = F/m = 1/2$ μεταξύ των δοσμένων άκρων της κίνησης $x_- = -1, x_+ = 1$ και πίσω.

$$T = 4\frac{v(0)}{a} = 8\,.$$

Το $\frac{v(0)}{a}$ αντιπροσωπεύει το χρόνο μετάβασης από το σημείο ισορροπίας μέχρι κάποιο ακραίο σημείο x_+, x_-, κινούμενο στα θετικά ή στα αρνητικά x, αντίστοιχα.
(δ)

$$T_{1/2\to 0} = \sqrt{2\Delta x/|a|} = \sqrt{2\cdot(1/2)/(1/2)} = \sqrt{2}.$$

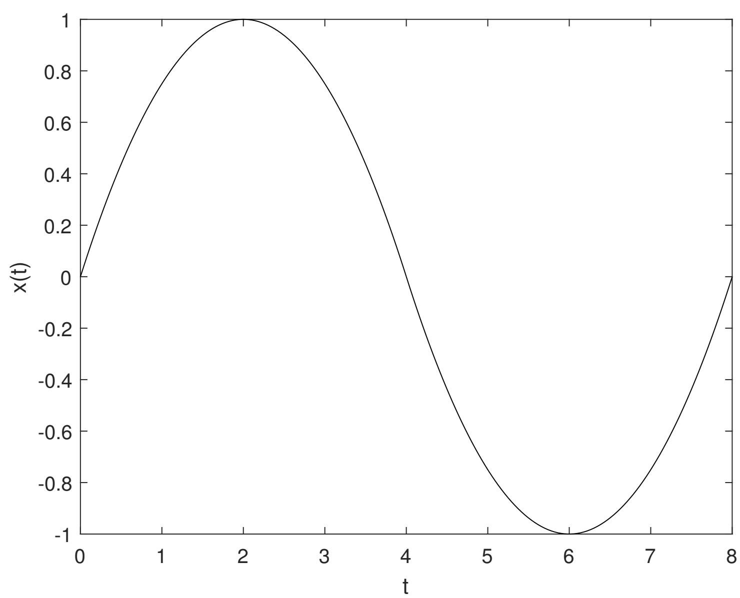
(ε)

$$x(t) = v(0)t + \frac{1}{2}(-1/2)t^2 = t - t^2/4 = t(4-t)/4$$

για το πρώτο κομμάτι της κίνησης $0 \le t \le 4$ που η δύναμη είναι $-1/2$, και

$$x(t) = -v(0)(t-4) + \frac{1}{2}(+1/2)(t-4)^2 = -(t-4) + (t-4)^2/4 = (t-4)(t-8)/4$$

για το δεύτερο κομμάτι και ομοίως για μεγαλύτερους χρόνους. Οι κινήσεις αντιπροσωπεύουν κομμάτια



παραβολών-δεν είναι ημιτονοειδής καμπύλη.

Θέμα 3^o:

(α)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \cos(2\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)\ .$$

Επειδή η δύναμη περιέχει ακριβώς τη συχνότητα του ταλαντωτή θα τη θέσουμε ω και στο τέλος αφού βρούμε τη λύση θα πάρουμε το όριο. Η γενική λύση θα είναι

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t) + S\sin(\omega_0 t) + \frac{\cos(2\omega t)}{\omega_0^2 - 4\omega^2} + \frac{\sin(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} \ .$$

Οι σταθερές C, S θα υπολογιστούν από τις αρχικές συνθήκες:

$$0 = C + \frac{1}{\omega_0^2 - 4\omega^2} \ , \ 0 = S\omega_0 + \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \ ,$$

οπότε η ζητούμενη λύση θα είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\omega\to\omega_0}\left[\frac{1}{\omega_0^2 - 4\omega^2}\left(\cos(2\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right) + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\sin(\omega t) - (\omega/\omega_0)\sin(\omega_0 t)\right)\right] \\ &= \frac{-1}{3\omega_0^2}\left(\cos(2\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t)\right) - \lim_{\omega\to\omega_0}\frac{\omega}{\omega_0 + \omega}\frac{\sin(\omega t)/\omega - \sin(\omega_0 t)/\omega_0}{\omega - \omega_0} \\ &= \frac{-1}{3\omega_0^2}\left(\cos(2\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t)\right) - \frac{1}{2}t^2\left.\left(\sin w/w\right)'\right|_{w=\omega_0 t} \\ &= \frac{-1}{3\omega_0^2}\left(\cos(2\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t)\right) - \frac{1}{2}\frac{\cos(\omega_0 t)\omega_0 t - \sin(\omega_0 t)}{\omega_0^2} \ . \end{aligned}$$

Το πλάτος μεγαλώνει γραμμικά με το χρόνο.
(β)

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - a_0$$

με λύση

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t) + S\sin(\omega_0 t) - \frac{a_0}{\omega_0^2}$$

και λόγω των αρχικών συνθηκών

$$x(t) = -\frac{a_0}{\omega_0^2}(1 - \cos(\omega_0 t)) \ .$$

(γ) Θα έπρεπε $x(t) = x(0)$, $v(t) = v(0)$ δηλαδή θα θέλαμε $C = S = 0$, οπότε

$$x(t) = -\frac{a_0}{\omega_0^2} \ .$$

Με άλλα λόγια θα έπρεπε $x(0) = -\frac{a_0}{\omega_0^2}$, $v(0) = 0$.