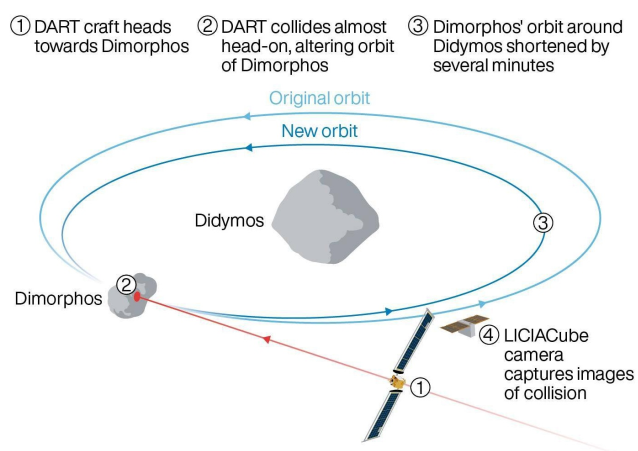
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, 28 Σεπτεμβρίου 2022
Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες, Απαντήστε στα 3 από τα 4 θέματα, Καλή επιτυχία

Θέμα 1ο:

Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται μονοδιάστατα στον ημιάξονα $x > 0$ υπό την επίδραση δύναμης $F = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}$.
(α) Βρείτε τη δυναμική ενέργεια θεωρώντας ότι μηδενίζεται στο άπειρο και σχεδιάστε το γράφημά της.
(β) Σε ποια περιοχή πρέπει να αφήσουμε το σώμα (με μηδενική δηλ. αρχική ταχύτητα) ώστε να αρχίσει μεν να κινείται προς μεγαλύτερα x αλλά στη συνέχεια να επιστρέφει στο σημείο που ξεκίνησε;
(γ) Αν αφήσουμε το σώμα στη θέση $x_1 = 3/2$ σε πόσο χρόνο επιστρέφει στη θέση αυτή;
(δ) Αν αφήσουμε το σώμα πολύ κοντά στη θέση $x_0 = 2$ ποια η περίοδος κίνησης;
Δίνεται $\displaystyle\int_a^b \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{\pi(a+b)}{2}$ για $a < b$.

Θέμα 2ο:

Έστω ένας διπλός αστεροειδής που αποτελείται από ένα αστεροειδή μεγάλης μάζας, τον Δίδυμο, και ένα μικρής μάζας, τον Δίμορφο. Θεωρήστε ότι ο Δίδυμος είναι ακίνητος και ο Δίμορφος κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R γύρω του (αγνοήστε την επίδραση από τον Ήλιο).
(α) Αν M είναι η μάζα του Δίδυμου ποια η ταχύτητα περιστροφής v_0 του Δίμορφου και ποια η περίοδος περιστροφής του T_0;
(β) Ένας τεχνητός δορυφόρος συγκρούεται μετωπικά με τον Δίμορφο με αποτέλεσμα ο Δίμορφος αμέσως μετά την κρούση να έχει ταχύτητα μέτρου λv_0 με $0 < \lambda < 1$.
(β_1) Ποια είναι τα άκρα (απόκεντρο και περίκεντρο) της νέας τροχιάς του Δίμορφου; (Ο Δίδυμος θεωρήστε ότι παραμένει ακίνητος.)
(β_2) Ποιος ο λόγος T/T_0 όπου T η νέα περίοδος περιστροφής του Δίμορφου γύρω από το Δίδυμο;



PA graphic. Source: Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory

Θέμα 3ο:

(α) Σώμα μάζας m ισορροπεί κρεμασμένο στην οροφή ακίνητου ασανσέρ μέσω ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = m\omega^2$ και φυσικού μήκους $\ell_0 > g/\omega^2$, όπου g η επιτάχυνση βαρύτητας. Κάποια στιγμή $t = 0$ το ασανσέρ αφήνεται να εκτελέσει ελεύθερη πτώση. Ποια η θέση της m ως συνάρτηση του χρόνου για παρατηρητή μέσα στο ασανσέρ; Θεωρήστε τη μάζα του σώματος m πολύ μικρότερη από τη μάζα του ασανσέρ.
(β) Επαναλάβατε τον υπολογισμό αν η μάζα m δεν είναι πολύ μικρότερη από τη μάζα του ασανσέρ M.

Θέμα 4ο:

Έστω δύο σωματίδια, μάζας m το καθένα, σε απόσταση $2R$ το ένα από το άλλο.
(α) Να υπολογισθεί το βαρυτικό δυναμικό καθώς και το διάνυσμα της έντασης του βαρυτικού πεδίου, πάνω στην μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τις δύο μάζες, σε απόσταση z από το κέντρο του ευθύγραμμου αυτού τμήματος. [Θεωρήστε την μεσοκάθετο ως τον άξονα z.]
(β) Εξηγήστε γιατί το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος περιγράφει σωστά το βαρυτικό δυναμικό και την ένταση του πεδίου βαρύτητας ενός δακτυλίου μάζας $2m$ και ακτίνας R πάνω στον άξονα συμμετρίας z του δακτυλίου.
(γ) Θεωρώντας τον δακτύλιο σταθερό, ποια είναι η ταχύτητα που θα πρέπει να έχει ένα σωματίδιο μάζας μ για να διαφύγει από τη βαρυτική έλξη του δακτυλίου, αν αρχικά το σωματίδιο βρισκόταν στον άξονα συμμετρίας του δακτυλίου και σε απόσταση z_0 από το κέντρο αυτού; Η ταχύτητα διαφυγής αυτή αφορά μόνο κινήσεις απομάκρυνσης του σωματιδίου από το δακτύλιο επί του άξονα z;
(δ) Αρχικά ο δακτύλιος βρίσκεται ακίνητος πάνω στο επίπεδο x, y με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων και ένα δεύτερο σωματίδιο μάζας m βρίσκεται ακίνητο στη θέση $(0, 0, a)$. Τα δύο σώματα πλησιάζουν το ένα το άλλο λόγω της βαρυτικής τους έλξης. Πού θα βρίσκεται το σωματίδιο, όταν θα διαπερνά το κέντρο του δακτυλίου και ποια η θέση του όταν θα ξαναβρεθεί και πάλι ακίνητο;

<u>ΛΥΣΕΙΣ:</u>

Θέμα 1ο:

(α) $V = -\int_\infty^x F(x)\,dx = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$. $V' = \frac{1}{x^3}(x-2)$, άρα στα θετικά x η $V(x)$ φθίνει στο διάστημα $x \in (0,2)$ από $V(0) = +\infty$ σε $V(2) = -1/4 = V_{\min}$ (αυτή είναι η ελάχιστη τιμή) και μετά αυξάνεται στο διάστημα $x \in (2,\infty)$ από $V_{\min}$ σε $V(\infty) = 0$.
Το δυναμικό είναι ισοδύναμο με το ενεργό δυναμικό του προβλήματος Κέπλερ με $GM = 1$ και $L = \sqrt{2}$.
(β) Για να κινείται προς μεγαλύτερα x πρέπει $F(x_1) > 0$, δηλ. $V'(x_1) < 0$ κάτι που ισχύει στο διάστημα $x \in (0,2)$. Για να ξαναγυρίσει το σώμα στο σημείο αφετηρίας πρέπει κάπου να ανακλαστεί, δηλ. να υπάρχει και δεύτερη λύση x_2 της εξίσωσης $V(x) = E$ με $E = V(x_1)$ αφού στην αρχική θέση η ταχύτητα είναι μηδενική (άρα η μία λύση της εξίσωσης είναι η $x = x_1$). Το γράφημα δείχνει ότι αυτό συμβαίνει για αρνητικές ενέργειες, δηλ. για $V(x_1) < 0 \Leftrightarrow x_1 > 1$. Και οι δύο συνθήκες ικανοποιούνται αν $1 < x_1 < 2$.
(γ) Η μέγιστη θέση x_2 βρίσκεται από $V(x_2) = V(x_1) \Leftrightarrow \frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_1^2} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{x_1}{x_1 - 1} = 3$.
Η περίοδος της κίνησης είναι $T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\dot{x}}$ και η ταχύτητα βρίσκεται από το ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{\dot{x}^2}{2} = V(x_1) - V(x) = \frac{1}{x_1 x_2}\frac{(x-x_1)(x_2-x)}{x^2} \Leftrightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{x_1 x_2}\frac{(x-x_1)(x_2-x)}{x^2}}$ (είναι θετική στην μετάβαση από το x_1 στο x_2), οπότε $T = 2\sqrt{\frac{x_1 x_2}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}} = 2\pi \frac{x_1 + x_2}{2}\sqrt{\frac{x_1 x_2}{2}} = \frac{27\pi}{4}$.
Το δυναμικό είναι ισοδύναμο με το ενεργό δυναμικό του προβλήματος Κέπλερ με $GM = 1$ και $L = \sqrt{2}$, άρα η περίοδος μπορεί να βρεθεί από τον 3ο νόμο Κέπλερ. Ο ημιάξονας είναι $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{9}{4}$ και η περίοδος $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ με $\Omega = \sqrt{\frac{GM}{\alpha^3}}$, δηλ. $T = 2\pi \alpha^{3/2} = \frac{27\pi}{4}$.
(δ) Το σώμα εκτελεί ταλαντώσεις μικρού πλάτους γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας $x_0 = 2$ (όπου το δυναμικό είναι ελάχιστο). Με $q = x - 2$ είναι $V(x) \approx V(2) + \frac{1}{2}V''(2)q^2$ με $V''(2) = \frac{1}{8}$ και η εξίσωση κίνησης είναι $\frac{\dot{q}^2}{2} + \frac{1}{2}V''(2)q^2 =$ σταθερά, ή παραγωγίζοντας $\ddot{q} + V''(2)q = 0$ (εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή). Η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = \sqrt{V''(2)} = 1/\sqrt{8}$ και η περίοδος $T = 2\pi/\omega = 4\pi\sqrt{2}$.
Το ίδιο δίνει και ο ακριβής τύπος $T = 2\pi \frac{x_1 + x_2}{2}\sqrt{\frac{x_1 x_2}{2}}$ που βρέθηκε στο προηγούμενο ερώτημα, στο όριο $x_1 = x_2 = x_0$.

Θέμα 2ο:

(α) $\frac{m v_0^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$.
Από 3ο νόμο Κέπλερ $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$.
(β_1) Μετά την κρούση η στροφορμή είναι $L = \lambda m v_0 R = \lambda m \sqrt{GMR}$ και η ενέργεια $E = \frac{m v_1^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{2-\lambda^2}{2}\frac{GMm}{R}$. (Είναι προφανώς αρνητική, άρα η τροχιά είναι ελλειπτική.) Οι ακτίνες απόκεντρου και περίκεντρου βρίσκονται συνδυάζοντας διατήρηση ενέργειας $\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = -\frac{2-\lambda^2}{2}\frac{GMm}{R}$ και στροφορμής $mvr = \lambda m\sqrt{GMR}$, δηλ. είναι οι ρίζες της $\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E \Leftrightarrow (2-\lambda^2)\,r^2 - 2Rr + \lambda^2 R^2 = 0$. Αυτές είναι $r = R\frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\lambda^2 + \lambda^4}}{2-\lambda^2} = R\frac{1 \pm (1-\lambda^2)}{2-\lambda^2}$, δηλ. στο απόκεντρο $r_a = R$ (η μεγαλύτερη ρίζα που αντιστοιχεί στη στιγμή της κρούσης) και στο περίκεντρο $r_\pi = R\frac{\lambda^2}{2-\lambda^2}$.
(β_2) Ο μεγάλος ημιάξονας είναι $\alpha = \frac{r_a + r_\pi}{2} = \frac{R}{2-\lambda^2}$ και από 3ο νόμο Κέπλερ η νέα περίοδος περιστροφής είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha^3}{GM}}$, άρα $\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\alpha}{R}\right)^{3/2} = \frac{1}{(2-\lambda^2)^{3/2}}$.

Θέμα 3ο:

(α) Στο μη-αδρανειακό σύστημα του ασανσέρ το οποίο επιταχύνεται με $\vec{a}_0 = \vec{g}$ η εξίσωση κίνησης της μάζας είναι (σε άξονα $\hat{x}$ με φορά προς τα κάτω και αρχή την οροφή) $m\ddot{x}\hat{x} = -k(x-\ell_0)\hat{x} + m\vec{g} - m\vec{a}_0 \Leftrightarrow \ddot{x} = -\omega^2(x-\ell_0)$ με γενική λύση $x = \ell_0 + C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)$. Οι αρχικές συνθήκες $x = \ell_0 + mg/k$ και $\dot{x} = 0$ (από $\vec{v}_a = \vec{v}_0 + \vec{v}_\sigma$ με $\vec{v}_\sigma = \dot{x}\hat{x}$ και $\vec{v}_0 = \dot{x}'\hat{x}$) δίνουν $C_1 = 0$ και $C_2 = g/\omega^2$, οπότε $x = \ell_0 + \frac{g}{\omega^2}\cos(\omega t)$.
(β) Η εξίσωση κίνησης του ασανσέρ (μαζί με το ελατήριο) είναι $M\ddot{\vec{R}}_1 = k(x-\ell_0)\hat{x} + M\vec{g}$ και της μάζας $m\ddot{\vec{R}}_2 = -k(x-\ell_0)\hat{x} + m\vec{g}$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

αυτές βρίσκουμε ότι η εξίσωση για τη σχετική θέση $\vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \vec{c} + x\hat{x}$, όπου $\vec{c}$ το σταθερό διάνυσμα από το κέντρο μάζας του ασανσέρ μέχρι την οροφή του, είναι $\ddot{x} = -\omega'^2(x - \ell_0)$ όπου $\omega' = \omega\sqrt{1 + m/M}$. Η λύση βρίσκεται όπως πριν $x = \ell_0 + \dfrac{g}{\omega^2}\cos(\omega' t)$.

Ουσιαστικά έχουμε πρόβλημα δύο σωμάτων. Η εξίσωση κίνησης του 2 (μάζα $m = m_1$) ως προς το 1 (ασανσέρ – μαζί με το ελατήριο – μάζας $M = m_2$) είναι $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2,\varepsilon\sigma\omega\tau} + \dfrac{\mu}{m_2}\vec{F}_{2,\varepsilon\xi\omega\tau} - \dfrac{\mu}{m_1}\vec{F}_{1,\varepsilon\xi\omega\tau}$, όπου $\vec{r} = \vec{c} + x\hat{x}$, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $\vec{F}_{2,\varepsilon\sigma\omega\tau} = -k(x - \ell_0)\hat{x}$, $\vec{F}_{1,\varepsilon\xi\omega\tau} = M\vec{g}$ και $\vec{F}_{2,\varepsilon\xi\omega\tau} = m\vec{g}$.

Θέμα 4^o:

(α) $\Phi = -\dfrac{G\,2m}{\sqrt{R^2 + z^2}}$ και $\vec{g} = -\hat{z}\dfrac{G\,2mz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$ με τον έξτρα γεωμετρικό παράγοντα $z/(R^2 + z^2)^{1/2}$ να προέρχεται από το διανυσματικό άθροισμα δύο δυνάμεων υπό γωνία.

(β) Ένας δακτύλιος αποτελείται από την επαλληλία άπειρων ζευγών σημειακών σωματιδίων που καταλαμβάνουν αντιδιαμετρικές θέσεις στο δακτύλιο. Δεδομένου ότι το δυναμικό είναι βαθμωτό μέγεθος οι συμβολές από όλα αυτά τα ζευγάρια αθροίζονται οδηγώντας στο αποτέλεσμα του δυναμικού του προηγούμενου ερωτήματος. Επίσης δεδομένου ότι κάθε τέτοιο ζεύγος συνεισφέρει στην ένταση του πεδίου βαρύτητας του δακτυλίου κατά ένα απειροστό διάνυσμα στον άξονα z, η επαλληλία όλων των αντιδιαμετρικών ζευγών που έχουν κοινή μεσοκάθετο, θα οδηγήσει στο αποτέλεσμα, και πάλι, του προηγούμενου ερωτήματος.

(γ) $\dfrac{1}{2}\mu v_{\delta\iota\alpha\varphi}^2 + \mu\Phi(z_0) = 0$ με λύση (ανεξάρτητη του μ) $v_{\delta\iota\alpha\varphi} = \sqrt{\dfrac{4Gm}{\sqrt{R^2 + z_0^2}}}$.

(δ) Ως απομονωμένο σύστημα θα διατηρεί την ταχύτητα του ΚΜ του, επομένως το ΚΜ του εν λόγω συστήματος θα είναι σταθερό. Επομένως όταν το σωματίδιο θα διέρχεται από το κέντρο του δακτυλίου, αυτό θα είναι το ΚΜ του συστήματος το οποίο θα βρίσκεται πάντα στο $\vec{R}_{KM} = (0, 0, \dfrac{2m \cdot 0 + ma}{3m}) = (0, 0, a/3)$.

Στη συνέχεια όταν το σωματίδιο διαπεράσει τον δακτύλιο και βρεθεί και πάλι ακίνητο (όπως και ο δακτύλιος) η σχετική τους απόσταση θα είναι και πάλι a αλλά με αντίθετη διάταξη. Αρχικά το σωματίδιο βρισκόταν σε απόσταση $a - a/3$ πάνω από το ΚΜ, τώρα θα βρίσκεται σε απόσταση $2a/3$ κάτω από το ΚΜ, δηλαδή στη θέση $(0, 0, -a/3)$.