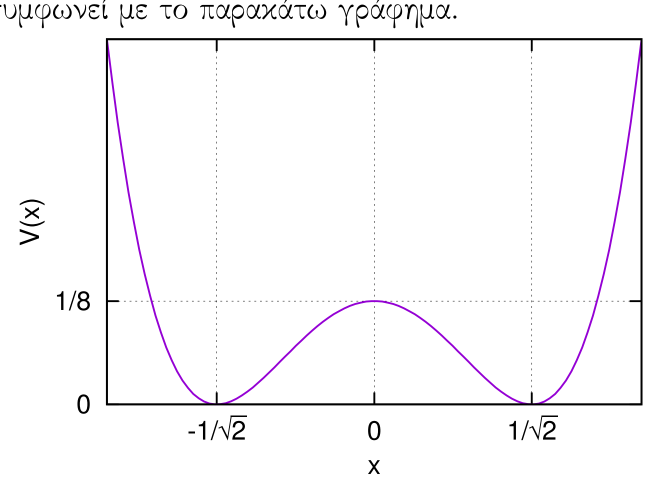
Θέμα 1^o:

Ένας πίθηκος κρατιέται σε σχοινί μήκους r_0 και ταλαντώνεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Η κίνηση θεωρείται ταλάντωση ιδανικού εκκρεμούς. Στο κατώτερο σημείο η γωνιακή ταχύτητα του πίθηκου είναι $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{2r_0}}$.
(α_1) Ποιο το γωνιακό πλάτος της ταλάντωσης;
(α_2) Ποιο ολοκλήρωμα δίνει την περίοδο;
(β) Κάποια στιγμή $t = 0$ που ο πίθηκος βρίσκεται στο κατώτερο σημείο, αρχίζει να ανεβαίνει πάνω στο σχοινί με τρόπο που έχει σαν αποτέλεσμα η γωνία σχοινιού – κατακόρυφου να είναι $\phi = \omega t$ σε κάθε μεταγενέστερο χρόνο t.
(β_1) Ποια η απόσταση του πιθήκου από το σημείο στήριξης σε κάθε χρόνο; Πότε θα φτάσει στην κορυφή;
(β_2) Ποια η τροχιά του πιθήκου;
Δίνεται η έκφραση της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\phi}$.

Θέμα 2^o:

Σώμα μοναδιαίας μάζας κινείται μονοδιάστατα στο πεδίο $F(x) = x - 2x^3$.
(α) Βρείτε τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας που συμφωνεί με το παρακάτω γράφημα.



(β) Αν υπάρχουν σημεία ευσταθούς ισορροπίας βρείτε την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων γύρω από αυτά.
(γ) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης.
(δ) Αν αρχικά το σώμα βρίσκεται στο σημείο $x = 1$ και έχει μηδενική ταχύτητα περιγράψτε την κίνηση.
(ε) Βρείτε την $x(t)$ για τις αρχικές συνθήκες του ερωτήματος (δ).
Δίνεται $\displaystyle\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x^4}} = \operatorname{arccosh}\frac{1}{x}$ για $0 < x < 1$.

Θέμα 3^o:

Δύο ελαστικές ίσες μάζες m αμελητέων διαστάσεων φέρουν αντίθετα φορτία, απέχουν απόσταση r_0 και κινούνται κυκλικά γύρω από το (ακίνητο) κέντρο μάζας τους, υπό την επίδραση της ελκτικής δύναμης Coulomb $\vec{F} = -\dfrac{k}{r^2}\hat{r}$ που ασκεί η μία στην άλλη.
(α) Ποιο το μέτρο της ταχύτητας των μαζών v_0;
(β) Κάποια στιγμή η μία μάζα συγκρούεται κάθετα με ένα μονωτικό πέτασμα και ανακλάται ελαστικά (ακαριαία αλλάζει φορά η ταχύτητά της). Περιγράψτε την κίνηση των δύο μαζών μετά το γεγονός αυτό. Συγκεκριμένα:
(β_1) Βρείτε πως κινείται το κέντρο μάζας τους.
(β_2) Βρείτε τη σχέση που συνδέει την απόσταση μεταξύ τους με το χρόνο.
(γ) Αιτιολογήστε γιατί η Λαγκρανζιανή του συστήματος των σωματιδίων είναι $L = m\dot{\vec{R}}^2 + \dfrac{1}{4}m\dot{\vec{r}}^2 + \dfrac{k}{r}$ όπου $\vec{r}$ η σχετική τους θέση και $\vec{R}$ η θέση του κέντρου μάζας.
Δίνεται για $0 < \xi < 1$ το αόριστο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{d\xi}{\sqrt{1/\xi - 1}} = \arcsin\sqrt{\xi} - \sqrt{\xi}\sqrt{1-\xi}$ + σταθερά.

Θέμα 4^o:

Ένα σημειακό σωματίδιο μάζας m κινείται στο βαρυτικό πεδίο μιας ομογενούς σφαίρας μάζας M και ακτίνας R, χωρίς να ασκείται σε αυτό καμία άλλη δύναμη πέραν της βαρυτικής έλξης από τη μεγάλη μάζα. Η μάζα της σφαίρας είναι τόσο μεγάλη ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ακίνητη. Αρχικά το σωματίδιο βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας και κινείται με ταχύτητα v_0.
(α) Να βρεθεί η ένταση του βαρυτικού πεδίου $\vec{g}(\vec{r})$ ως συνάρτηση της απόστασης $\vec{r}$ από το κέντρο της σφαίρας.
(β) Ποια είναι η στροφορμή του σωματιδίου ως προς το κέντρο της σφαίρας;
(γ) Αν το σωματίδιο σταματά όταν φτάσει σε απόσταση ίση με $r = 2R$, από το κέντρο της σφαίρας, να βρείτε τη μάζα της σφαίρας M συναρτήσει των v_0, R και G.
(δ) Αν το σωματίδιο δεν ξεκινούσε από το κέντρο της σφαίρας, αλλά από την επιφάνεια αυτής κινούμενο εφαπτομενικά στη σφαίρα, τι τροχιά θα διέγραφε το σωματίδιο και σε τι απόσταση μακριά από τη σφαίρα θα έφτανε; Η αρχική ταχύτητα να θεωρηθεί ίση με v_0, όπως προηγουμένως, και η μάζα της σφαίρας M να θεωρηθεί ότι είναι αυτή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^o:

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες σε σύστημα με $\hat{x}$ κατακόρυφο άξονα με φορά προς τα κάτω η ταχύτητα είναι $\vec{v} = r_0\dot{\phi}\hat{\phi}$, η βαρυτική δυναμική ενέργεια $V = -mgr_0\cos\phi$ και η διατήρηση ενέργειας δίνει $\dfrac{mr_0^2\dot{\phi}^2}{2} - mgr_0\cos\phi = \dfrac{mr_0^2\omega^2}{2} - mgr_0 = -\dfrac{3mgr_0}{4}$ (από τις συνθήκες στο κατώτερο σημείο).

(α_1) Ο μηδενισμός της ταχύτητας δίνει το γωνιακό πλάτος $\phi_0 = \arccos\dfrac{3}{4}$.

(α_2) Η ταχύτητα σε κάθε θέση είναι $|\dot{\phi}| = \omega\sqrt{4\cos\phi - 3}$ και η περίοδος $T = 4\displaystyle\int_0^{\phi_0}\frac{d\phi}{\dot{\phi}} = \frac{4}{\omega}\int_0^{\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{4\cos\phi-3}}$.

(β_1) Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $m(2\dot{r}\dot{\phi}+r\ddot{\phi}) = mg\hat{x}\cdot\hat{\phi} = -mg\sin\phi$ με $\phi = \omega t$ δίνει $\dot{r} = -\dfrac{g}{2\omega}\sin(\omega t)$. Ολοκληρώνοντας και θέτοντας $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{2r_0}}$, $r|_{t=0} = r_0$ βρίσκουμε $r = r_0\cos(\omega t)$.

Σε χρόνο $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$ η απόσταση μηδενίζεται.

(β_2) Η τροχιά είναι $r = r_0\cos\phi$.

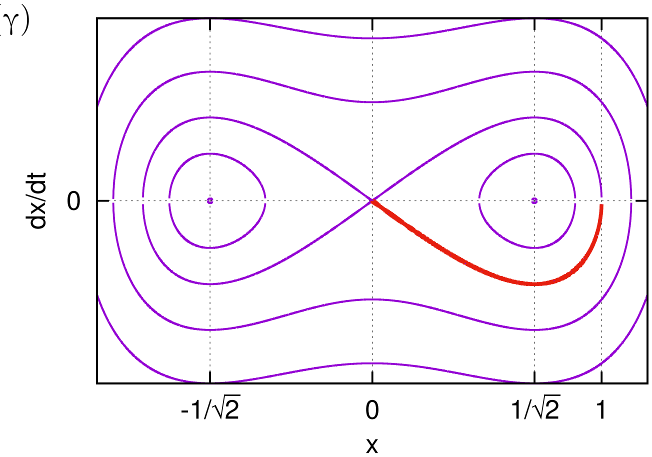
Οι σχέσεις $x = r\cos\phi = r_0\cos^2\phi = r_0\dfrac{1+\cos(2\phi)}{2}$ και $y = r\sin\phi = r\sin\phi\cos\phi = r_0\dfrac{\sin(2\phi)}{2}$ συνεπάγονται, απαλείφοντας τη γωνία, $\left(x - \dfrac{r_0}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{r_0}{2}\right)^2$, δηλ. η τροχιά είναι κυκλική με ακτίνα $\dfrac{r_0}{2}$ και κέντρο το σημείο $x_c = \dfrac{r_0}{2}$, $y_c = 0$.

Θέμα 2^o:

(α) Η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας είναι $V(x) = -\displaystyle\int F(x)\,dx = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + C$. Όπως φαίνεται στο γράφημα ισχύει $V(0) = \dfrac{1}{8}$, άρα η σταθερά είναι $C = \dfrac{1}{8}$ και η συνάρτηση $V(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{(x^2-1/2)^2}{2}$. (Στα σημεία $x^2 = 1/2 \Leftrightarrow x = \pm1/\sqrt{2}$ η συνάρτηση γίνεται ελάχιστη, ίση με μηδέν, όπως επίσης φαίνεται στο γράφημα.)

(β) Τα ελάχιστα $x_0 = \pm1/\sqrt{2}$ είναι ευσταθή σημεία ισορροπίας. Γύρω από αυτά, θέτοντας $q = x - x_0$ είναι $V(x) \approx V(x_0) + V'(x_0)q + \dfrac{1}{2}V''(x_0)q^2$ με $V'(x_0) = 0$ και $V''(x_0) = 2$ (διότι $V'(x) = -x + 2x^3$, $V''(x) = -1 + 6x^2$). Η εξίσωση κίνησης είναι $m\ddot{x} = -V'(x) \Leftrightarrow \ddot{q} + 2q = 0$, οπότε $\omega = \sqrt{2}$ και $T = 2\pi/\omega = \pi\sqrt{2}$.

(γ)



(Η κόκκινη τροχιά αντιστοιχεί στο ερώτημα (δ).)

(δ) $E = 0 + V(1) = 1/8$. Αφού η ενέργεια είναι ίση με το τοπικό μέγιστο της δυναμικής ενέργειας στο $x = 0$ το σώμα θα κινείται επ' άπειρον πλησιάζοντας αυτό το σημείο. Δηλ. θα κινηθεί επιταχυνόμενο από το $x = 1$ μέχρι το ελάχιστο $x = 1/\sqrt{2}$, κατόπιν θα κινείται επιβραδυνόμενο προς μικρότερα x και θα πλησιάζει συνεχώς το σημείο $x = 0$ (χρειάζεται άπειρο χρόνο για να φτάσει σε αυτό).

(ε) Το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{\dot{x}^2}{2} + V(x) = \dfrac{1}{8}$ δίνει $\dot{x} = -\sqrt{x^2 - x^4}$ (η ταχύτητα είναι συνεχώς αρνητική). Άρα $\displaystyle\int_1^x \frac{dx}{-\sqrt{x^2-x^4}} = \int_0^t dt \Leftrightarrow \operatorname{arccosh}\frac{1}{x} = t \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \cosh t \Leftrightarrow x = \frac{2}{e^t + e^{-t}}$.

Θέμα 3^o:

(α) Κάθε μάζα εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας $r_0/2$ με κεντρομόλο την ελκτική δύναμη από την άλλη μάζα, άρα ισχύει $\dfrac{mv_0^2}{r_0/2} = \dfrac{k}{r_0^2} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{k}{2mr_0}}$.

(β_1) Αμέσως μετά την κρούση οι δύο μάζες έχουν ίδια (ομόρροπη) ταχύτητα v_0, κάθετη στην ευθεία που τις ενώνει. Επομένως το κέντρο μάζας τους θα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά με αυτή την ταχύτητα.

Αν x είναι ο άξονας πάνω στις μάζες την στιγμή της κρούσης με το πέτασμα, με αρχή την στιγμιαία θέση του κέντρου μάζας τους, και y ο άξονας κάθετα στο πέτασμα με την φορά της $\vec{v}_0$, η θέση του κέντρου μάζας μετά από χρόνο t είναι $x_{\text{KM}} = 0$, $y_{\text{KM}} = v_0 t$.

(β_2) Στο σύστημα του κέντρου μάζας οι μάζες είναι αρχικά ακίνητες στις θέσεις $\mp r_0/2$ του άξονα x και πλησιάζουν λόγω της έλξης Coulomb κινούμενες ευθύγραμμα. Σε κάθε χρόνο έχουν αντίθετες θέσεις $\mp x\hat{x}$ και ο νόμος Νεύτωνα για την κάθε μία $\mp m\ddot{x} = \pm\dfrac{k}{(2x)^2}$ δίνει την εξίσωση $\dfrac{m}{2}\ddot{r} = -\dfrac{k}{r^2}$ για την

απόσταση μεταξύ τους $r = 2|x|$. Το αντίστοιχο ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\frac{m\dot{r}^2}{4} - \frac{k}{r} = \text{σταθερά} = -\frac{k}{r_0}$ (από αρχικές συνθήκες).
Ένας δεύτερος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε την θεωρία του προβλήματος δύο σωμάτων. Η εξίσωση που καθορίζει το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ της δεύτερης ως προς την πρώτη είναι $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2,\varepsilon\sigma\omega\tau}$ όπου $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \frac{m}{2}$ η ανηγμένη μάζα. Αφού η κίνηση είναι μονοδιάστατη είναι $\frac{m}{2}\ddot{r} = -\frac{k}{r^2}$ με ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{m\dot{r}^2}{4} - \frac{k}{r} =$ σταθερά.
Ένας τρίτος τρόπος βασίζεται στο ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{k}{r} = $ σταθερά, με $\vec{v}_2 = \vec{v}_{\rm KM} + \frac{1}{2}\dot{\vec{r}}$ και $\vec{v}_1 = \vec{v}_{\rm KM} - \frac{1}{2}\dot{\vec{r}}$ (ή $\vec{v}_2 = v_0\hat{y} + \dot{x}\hat{x}$, $\vec{v}_1 = v_0\hat{y} - \dot{x}\hat{x}$ με $|x| = \frac{r}{2}$), το οποίο δίνει $\frac{m\dot{r}^2}{4} - \frac{k}{r} =$ σταθερά.
Λύνοντας ως προς $\dot{r}$ έχουμε $\dot{r} = -\sqrt{\frac{4k}{mr_0}\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)}$ (κρατάμε την αρνητική λύση). Χωρίζοντας τις μεταβλητές και ολοκληρώνοντας έχουμε $t = -\sqrt{\frac{mr_0}{4k}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{r_0/r - 1}}$. Θέτοντας $r = r_0\xi$ προκύπτει $t = \sqrt{\frac{mr_0^3}{4k}}\int_{r/r_0}^{1}\frac{d\xi}{\sqrt{1/\xi - 1}}$ και χρησιμοποιώντας το δοσμένο ολοκλήρωμα βρίσκουμε
$t = \sqrt{\frac{mr_0^3}{4k}}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{r}{r_0}} + \sqrt{\frac{r}{r_0}}\sqrt{1 - \frac{r}{r_0}}\right)$.
Οι μάζες συγκρούονται σε χρόνο $t|_{r=0} = \sqrt{\frac{mr_0^3}{4k}}\frac{\pi}{2}$. (Στην πραγματικότητα ο χρόνος είναι λίγο μικρότερος γιατί η απόσταση κατά την σύγκρουση είναι το διπλάσιο της ακτίνας των μαζών και όχι μηδέν.)
Αφού οι μάζες είναι ελαστικές οι ταχύτητές τους κατά την σύγκρουση μεταξύ τους θα αλλάξουν φορά. Αφού η ενέργεια δεν αλλάζει, μετά την σύγκρουση θα απομακρύνονται σύμφωνα με την $\dot{r} = +\sqrt{\frac{4k}{mr_0}\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)}$, η ολοκλήρωση της οποίας δίνει $\sqrt{\frac{4k}{mr_0^3}}\,(t - t|_{r=0}) = \int_0^{r/r_0}\frac{d\xi}{\sqrt{1/\xi - 1}} = \arcsin\sqrt{\frac{r}{r_0}} - \sqrt{\frac{r}{r_0}}\sqrt{1 - \frac{r}{r_0}}$, ή, $t = \sqrt{\frac{mr_0^3}{4k}}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\sqrt{\frac{r}{r_0}} - \sqrt{\frac{r}{r_0}}\sqrt{1 - \frac{r}{r_0}}\right)$.
Από διατήρηση ενέργειας οι μάζες θα φτάσουν μέχρι τις αρχικές τους θέσεις (στο σύστημα του κέντρου μάζας), μετά θα αρχίσουν να ξαναπλησιάζουν, κ.ο.κ.
(γ) Οι θέσεις των μαζών είναι $\vec{R}_{1,2} = \vec{R} \mp \frac{\vec{r}}{2}$, οι ταχύτητές τους $\dot{\vec{R}}_{1,2} = \dot{\vec{R}} \mp \frac{\dot{\vec{r}}}{2}$ και η ολική κινητική τους ενέργεια $T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{R}}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\vec{R}}_2^2 = m\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{4}m\dot{\vec{r}}^2$.
Η ολική κινητική ενέργεια θα μπορούσε να βρεθεί σαν το άθροισμα της κινητικής ενέργειας του κέντρου μάζας $\frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2$ με την κινητική λόγω της κίνησης των μαζών ως προς το κέντρο μάζας $\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2$, όπου $M = m_1 + m_2 = 2m$ η ολική μάζα και $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \frac{m}{2}$ η ανηγμένη μάζα.
Η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης των μαζών είναι $V = -\frac{k}{r}$. Άρα η Λαγκρανζιανή είναι $L = T - V = m\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{4}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{k}{r}$.

Θέμα 4ο:

(α) Λόγω συμμετρίας είναι $\vec{g} = g(r)\hat{r}$.
Από ολοκληρωτικό νόμο Gauss σε σφαίρα ακτίνας $r < R$ είναι $\oiint \vec{g}\cdot d\vec{a} = -4\pi G M_{\varepsilon\gamma\kappa}(r)$ όπου η ροή είναι $g\,4\pi r^2$ και η μάζα που περικλείει η σφαίρα είναι $M_{\varepsilon\gamma\kappa}(r) = M\frac{r^3}{R^3}$ (αφού η πυκνότητα είναι σταθερή η μάζα στο εσωτερικό σφαίρας ακτίνας r είναι ανάλογη του όγκου, δηλ. του r^3). Έτσι προκύπτει $g = -\frac{GMr}{R^3}$.
Όμοια σε σφαίρα ακτίνας $r > R$ είναι $\oiint \vec{g}\cdot d\vec{a} = -4\pi GM \Leftrightarrow g = -\frac{GM}{r^2}$ (η μάζα που περικλείει η σφαίρα είναι η ολική M).

$$\text{Άρα } \vec{g} = \begin{cases} -\frac{GM}{R^3}\vec{r} & \text{αν } r \le R\,, \\ -\frac{GM}{r^2}\hat{r} & \text{αν } r \ge R\,. \end{cases}$$

(β) Η στροφορμή είναι μηδενική αρχικά (αφού $r = 0$) και παραμένει μηδενική σε κάθε στιγμή γιατί η δύναμη είναι κεντρική. (Η κίνηση είναι προφανώς ευθύγραμμη, γίνεται στη διεύθυνση της $\vec{v}_0$, οπότε σε κάθε στιγμή τόσο η θέση $\vec{r}$ όσο και η ταχύτητα $\vec{v}$ είναι παράλληλες στην $\vec{v}_0$, άρα και μεταξύ τους.)
(γ) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η διατήρηση ενέργειας αφού βρεθεί η συνάρτηση του δυναμικού από $\Phi = -\int \vec{g}\cdot d\vec{r} = -\int g\,dr$.
Για $r > R$ είναι $\Phi = \int \frac{GM}{r^2}dr = -\frac{GM}{r} + D'$. Η αυθαίρετη προσθετική σταθερά μπορεί να επιλεγεί $D' = 0$ ώστε το δυναμικό να μηδενίζεται στο άπειρο.
Για $r < R$ είναι $\Phi = \int \frac{GM}{R^3}r\,dr = \frac{GMr^2}{2R^3} + D$. Η απαίτηση το δυναμικό να είναι συνεχές στην ακτίνα $r = R$

δίνει την σταθερά $D = -\dfrac{3GM}{2R}$.

Άρα $\Phi = \begin{cases} \dfrac{GMr^2}{2R^3} - \dfrac{3GM}{2R} & \text{αν } r \leq R\,, \\ -\dfrac{GM}{r} & \text{αν } r \geq R\,. \end{cases}$

Η διατήρηση ενέργειας $\dfrac{v_0^2}{2} + \Phi(0) = 0 + \Phi(2R) \Leftrightarrow \dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{3GM}{2R} = -\dfrac{GM}{2R}$ δίνει $M = \dfrac{v_0^2 R}{2G}$.

Η μελέτη της κίνησης θα μπορούσε να γίνει ξεχωριστά στο εσωτερικό και στο εξωτερικό. Στο εσωτερικό ισχύει $\ddot{r} = -\dfrac{GM}{R^3} r$ (εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή) και εφαρμόζοντας το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{v^2}{2} + \dfrac{GMr^2}{2R^3} =$ σταθερά στις θέσεις $r = 0$ και $r = R$ βρίσκουμε $v|_{r=R} = \sqrt{v_0^2 - GM/R}$. Στο εξωτερικό, εφαρμόζοντας το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{v^2}{2} - \dfrac{GM}{r} =$ σταθερά στις θέσεις $r = R$ και $r = 2R$ βρίσκουμε $M = \dfrac{v_0^2 R}{2G}$.

(δ) Η δύναμη που δέχεται το σωματίδιο είναι $-\dfrac{GMm}{r^2}\hat{r}$ (κεντρική, ελκτική, με μέτρο αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης). Η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια είναι $V = -\dfrac{GMm}{r}$.

Η ενέργεια του σωματιδίου είναι $E = \dfrac{mv_0^2}{2} - \dfrac{GMm}{R}$. Αντικαθιστώντας την μάζα M από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει $E = 0$. Άρα το σωματίδιο εκτελεί παραβολική τροχιά και φτάνει σε άπειρη απόσταση από τη σφαίρα με μηδενική ταχύτητα.