



Θέμα 1^ο:

Σωματίδιο μάζας $m = 1$ κινείται σε μια διάσταση.

Για τα πρώτα 2 ερωτήματα θεωρήστε ότι η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι αυτή ενός αρμονικού ταλαντωτή με συχνότητα ω .

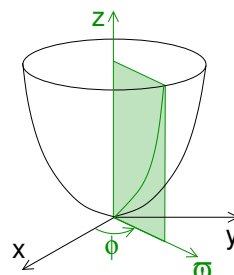
- (α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης του σωματιδίου (όχι τη λύση).
- (β) Αν το σωματίδιο αυτό έχει αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0, u(0) = u_0$, αφού γράψετε τη συνάρτηση που περιγράφει την κίνησή του, βρείτε το όριο αυτής στην περίπτωση που $\omega \rightarrow 0$ και εξηγήστε αν το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο βάσει του ερωτήματος (α).

Θεωρήστε στη συνέχεια ότι η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι άγνωστη.

- (γ) Αν η ταχύτητα της παρατηρούμενης κίνησης του σωματιδίου δίνεται από μια φθίνουσα συνάρτηση του x της μορφής $u(x)$, βρείτε τη δυναμική ενέργεια $V(x)$ που περιγράφει το πεδίο δύναμης που ασκείται στο σωματίδιο.
- (δ) Για $u(x) = \sqrt{1 - x^2}$ (με $x \in [0, 1]$) βρείτε ποια είναι η δύναμη $F(x)$ που ασκείται στο σωματίδιο και πόσο χρόνο θα χρειαστεί να φτάσει αυτό στο $x = 1$ ξεκινώντας από το $x(t = 0) = 0$. Επαναλάβετε τις απαντήσεις σας αν $u(x) = 1 - x$ (με $x \in [0, 1]$).

Θέμα 2^ο:

Σημειακό σώμα μάζας m κινείται στο εσωτερικό λείου μπολ με κυκλικό παραβολοειδές σχήμα, δηλ. σε επιφάνεια με εξίσωση $z = \lambda \varpi^2$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες, όπου λ θετική σταθερά και z ο κατακόρυφος άξονας με φορά προς τα πάνω (η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $\vec{g} = -g\hat{z}$).



- (α) Αν αφήσουμε ακίνητο το σώμα από σημείο του μπολ με ακτίνα ϖ_i με ποια ταχύτητα v_i θα φτάσει στο κατώτερο σημείο $\varpi = 0$;
- (β) Αν από το ίδιο σημείο του μπολ (με ακτίνα ϖ_i) βάλλουμε το σώμα οριζόντια με ταχύτητα $\vec{v}_i = v_i \hat{\phi}$ (ίδιου μέτρου με αυτή που βρέθηκε στο προηγούμενο ερώτημα) δείξτε ότι θα εκτελέσει οριζόντια κυκλική κίνηση.
- (bonus) Η τυχαία κίνηση της μάζας γίνεται μεταξύ των ακραίων υψών z_1, z_2 (και των αντίστοιχων ακτίνων ϖ_1, ϖ_2), όπου η ταχύτητα είναι οριζόντια με μέτρο v_1, v_2 , αντίστοιχα. Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια $mv_1^2/2$ στο σημείο 1 ισούται με την δυναμική ενέργεια mgz_2 στο σημείο 2 και αντίστροφα.

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι, χρησιμοποιώντας την διατήρηση της ενέργειας E και της $\hat{z}$ στροφορμής L_z , η κίνηση ανάγεται σε μονοδιάστατη με ολοκλήρωμα $\underbrace{\frac{m}{2}(1 + 4\lambda^2 \varpi^2) \dot{\varpi}^2}_{T_{\text{eff}}} + \underbrace{\frac{L_z^2}{2m\varpi^2} + mg\lambda \varpi^2}_{V_{\text{eff}}(\varpi)} = E$. Κατόπιν σχεδιάστε την γραφική παράσταση της $V_{\text{eff}}(\varpi)$.

Θέμα 3^ο:

Δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $R = 4R_{\oplus}$ γύρω από τη Γη. Ξαφνικά διασπάται σε δύο τμήματα με μάζες m_1 και m_2 . Αμέσως μετά τη διάσπαση τα δύο τμήματα κινούνται ομόρροπα, αλλά με διαφορετικές ταχύτητες, τέτοιες ώστε το m_1 μόλις που διαφεύγει του βαρυτικού πεδίου της Γης.

- (α) Ποια η ταχύτητα του δορυφόρου πριν την διάσπαση;
- (β) Ποια η ταχύτητα του m_1 αμέσως μετά την διάσπαση;
- (γ) Τι είδους τροχιά διαγράφει το m_2 ;

Θεωρήστε στη συνέχεια ότι η εκκεντρότητα της τροχιάς του m_2 είναι $1/2$.

- (δ) Ποιος είναι ο λόγος των μαζών m_2/m_1 ;

(bonus) Σχεδιάστε τις τρεις τροχιές (αρχική του δορυφόρου, τροχιά του m_1 , τροχιά του m_2).

Η μάζα της Γης M , η ακτίνα της $R_{\oplus}$ και η σταθερά G θεωρούνται γνωστές.

Τα m_1, m_2 δέχονται μόνο την βαρυτική έλξη από τη Γη (η βαρυτική έλξη μεταξύ τους είναι αμελητέα).

Ίσως χρειαστούν κάποιες από τις σχέσεις $V = -\frac{k}{r}, r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\phi - \phi_{\pi})}, p = \frac{L^2}{mk}, \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$.

Θέμα 4^ο:

Θεωρήστε έναν ομογενή λεπτό σφαιρικό φλοιό ακτίνας R και συνολικής μάζας M .

- (α) Να γραφεί το διάνυσμα της έντασης του βαρυτικού πεδίου στη θέση $\mathbf{r}$ μετρούμενη από το κέντρο του φλοιού.
- (β) Αφαιρούμε από τον σφαιρικό φλοιό έναν λεπτό δακτύλιο που καταλαμβάνει τον «Ισημερινό» της σφαίρας, χωρίς όμως να μετακινήσουμε τα δύο εναπομείναντα ημισφαίρια από την αρχική τους θέση. Αν ο δακτύλιος αυτός καταλαμβάνει εύρος σφαιρικών συντεταγμένων $\theta \in [\pi/2 - \delta\theta, \pi/2 + \delta\theta]$ με $\delta\theta \ll \pi$, τι ποσοστό μάζας αφαιρέθηκε;
- (γ) Υπολογίστε για τον νέο σφαιρικό φλοιό από τον οποίο «λείπει» ο Ισημερινός, το βαρυτικό δυναμικό κατά μήκος του άξονα z , θεωρώντας ότι αυτός είναι ο άξονας του δακτυλίου και σχεδιάστε το.
- (δ) Από ποιο σημείο πάνω στο z εκτός του φλοιού ($z(0) = R + \eta$) πρέπει να αφήσουμε ακίνητο ένα σωματίδιο μάζας m , ώστε αυτό αφού διαπεράσει τον φλοιό να φτάσει οριακά στο κέντρο της σφαίρας; Θεωρούμε ότι η διάσχιση του φλοιού δεν παρουσιάζει κάποια αντίσταση. [Αν δεν μπορείτε να το υπολογίσετε γράψτε απλώς την εξίσωση που πρέπει να λυθεί.]

(bonus) Δώστε μια προσεγγιστική λύση για το η , που σχετίζεται με την μικρότητα του $\delta\theta$.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^ο:

(α) $\ddot{x} = -\omega^2 x$.

(β) $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + (u_0/\omega) \sin(\omega t)$. Αν $\omega \rightarrow 0$, $x(t) \rightarrow x_0 + u_0 t$, που περιγράφει μια ομαλή κίνηση αφού στην περίπτωση αυτή η εξίσωση κίνησης (του α) είναι αυτή ελεύθερου σωματιδίου.

(γ) $\dot{u} = u'(x)u(x) = F(x) = -V'(x)$. Συνεπώς $V(x) = -\int u' u dx = -u(x)^2/2 + C$.

(δ) (i) Αν $u(x) = \sqrt{1-x^2}$, $F(x) = -V' = uu' = -x$. Σύμφωνα με το (α) $x_0 = 0$, $u_0 = 1$, οπότε $x(t) = (v_0/1) \sin(1t) = \sin(t)$. Το σωματίδιο φτάνει στο $x = 1$ σε χρόνο $t = \pi/2$.

(ii) Αν $u(x) = 1-x$, $F(x) = -V' = uu' = -(1-x) = x-1$. Τώρα η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{x} = x-1$ με λύση $x(t) = 1 + (x_0 - 1) \cosh t + v_0 \sinh t = (1 - \cosh t) + \sinh t = 1 - e^{-t}$. Επομένως θα χρειαστεί άπειρος χρόνος για να φτάσει το σωματίδιο στο $x = 1$.

Θέμα 2^ο:

(α) Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι συντηρητικές, το βάρος αντιστοιχεί σε δυναμική ενέργεια $V = mgz$, ενώ η αντίδραση ως κάθετη στην κίνηση δεν παράγει έργο. Άρα υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{mv^2}{2} + V = E$. Εξισώνοντας την αρχική ενέργεια $0 + mgz_i = mg\lambda\varpi_i^2$ με την τελική $mv_i^2/2 + 0$ βρίσκουμε $v_i = \varpi_i \sqrt{2g\lambda}$.

(β) Το ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{mv^2}{2} + V = E$, αντικαθιστώντας $V = mgz$ και $\vec{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$, με $z = \lambda\varpi^2$ και $\dot{z} = 2\lambda\varpi\dot{\varpi}$, δίνει $\frac{m}{2}(1 + 4\lambda^2\varpi^2)\dot{\varpi}^2 + \frac{m}{2}\varpi^2\dot{\phi}^2 + mg\lambda\varpi^2 = E = \text{σταθερά}$.

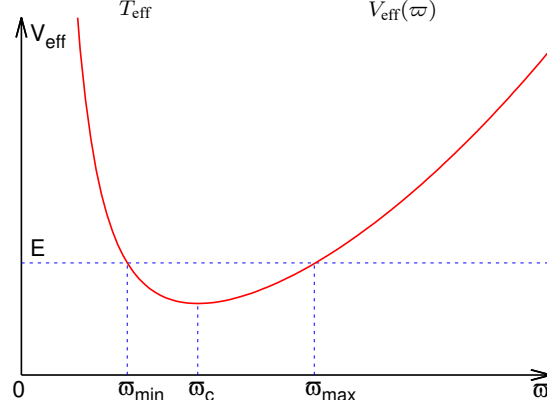
Αφού δεν υπάρχει αζιμουθιακή δύναμη, η $\hat{z}$ στροφορμή διατηρείται, δηλ. ισχύει $m\varpi^2\dot{\phi} = L_z = \text{σταθερά}$. Λύνοντας την τελευταία ως προς $\dot{\phi}$ και αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα ενέργειας, η κίνηση ανάγεται σε μονοδιάστατη ως προς θέση ϖ με ολοκλήρωμα ενέργειας $\underbrace{\frac{m}{2}(1 + 4\lambda^2\varpi^2)\dot{\varpi}^2}_{T_{\text{eff}}} + \underbrace{\frac{L_z^2}{2m\varpi^2} + mg\lambda\varpi^2}_{V_{\text{eff}}(\varpi)} = E$.

Το γράφημα της ενεργού δυναμικής ενέργειας δίνει τις επιτρεπτές περιοχές κίνησης στην ακτινική κατεύθυνση μέσω της ανισότητας $V_{\text{eff}}(\varpi) \leq E$.

Η συνάρτηση $V_{\text{eff}}(\varpi) = \frac{L_z^2}{2m\varpi^2} + mg\lambda\varpi^2$ έχει

παράγωγο $V'_{\text{eff}}(\varpi) = \frac{2mg\lambda}{\varpi^3}(\varpi^4 - \varpi_c^4)$, όπου

$\varpi_c = \left(\frac{L_z^2}{2m^2g\lambda}\right)^{1/4}$, άρα έχει ελάχιστο στην ακτίνα ϖ_c ίσο με $E_c = V_{\text{eff}}(\varpi_c) = 2mg\lambda\varpi_c^2$.



Για κάθε ενέργεια E και στροφορμή L_z η επιτρεπτή περιοχή κίνησης είναι $\varpi_{\min} \leq \varpi \leq \varpi_{\max}$, όπου $\varpi_{\min}$, $\varpi_{\max}$ οι δύο λύσεις της $V_{\text{eff}}(\varpi) = E$. Στα σημεία αυτά η ακτινική ταχύτητα μηδενίζεται (μηδενίζεται και η κατακόρυφη, αλλά υπάρχει αζιμουθιακή, δηλ. η τροχιά τοπικά είναι οριζόντια κυκλική).

Αν η ενέργεια είναι ίση με την ελάχιστη τιμή $E_c = V_{\text{eff}}(\varpi_c)$ η επιτρεπτή ακτινική περιοχή εκφυλίζεται σε σημείο, δηλ. η κίνηση είναι κυκλική ακτίνας ϖ_c . (Το ελάχιστο είναι σημείο ισορροπίας μόνο για την ακτινική κίνηση.) Αυτό συμβαίνει για τις δεδομένες αρχικές συνθήκες, για τις οποίες $L_z = m\varpi_i v_i = m\varpi_i^2 \sqrt{2g\lambda}$ και $E = \frac{mv_i^2}{2} + mg\lambda\varpi_i^2 = 2mg\lambda\varpi_i^2$, δηλ. πράγματι ισχύουν οι $\varpi_i = \varpi_c$ και $E = E_c$.

Η απάντηση θα μπορούσε να δοθεί μελετώντας τις δυνάμεις, όπως στο βιβλίο Βλαχάκης, Ν. (2024). Κλασική Μηχανική. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <https://dx.doi.org/10.57713/kallipos-338>, σελ. 101.

(bonus) Στα άκρα ισχύει $V_{\text{eff}}(\varpi_1) = V_{\text{eff}}(\varpi_2) \Leftrightarrow \frac{L_z^2}{2m\varpi_1^2} + mg\lambda\varpi_1^2 = \frac{L_z^2}{2m\varpi_2^2} + mg\lambda\varpi_2^2$.

Αντικαθιστώντας $L_z = m\varpi_1 v_1$ προκύπτει $\frac{mv_1^2}{2} \left(1 - \frac{\varpi_1^2}{\varpi_2^2}\right) = mg\lambda\varpi_2^2 \left(1 - \frac{\varpi_1^2}{\varpi_2^2}\right)$, άρα ισχύει $\frac{mv_1^2}{2} = mgz_2$.

Όμοια, αντικαθιστώντας $L_z = m\varpi_2 v_2$ προκύπτει $\frac{mv_2^2}{2} = mgz_1$.

Αλλιώς: Οι ακραίες θέσεις αντιστοιχούν σε λύσεις της $V_{\text{eff}}(\varpi) = E \Leftrightarrow mgz^2 - Ez + \frac{\lambda L_z^2}{2m} = 0$. Οι λύσεις του

τριωνύμου έχουν άθροισμα $z_1 + z_2 = \frac{E}{mg}$. Αντικαθιστώντας $E = \frac{mv_1^2}{2} + mgz_1$ προκύπτει $\frac{mv_1^2}{2} = mgz_2$. Εναλ-

λακτικά, οι λύσεις του τριωνύμου έχουν γινόμενο $z_1 z_2 = \frac{\lambda L_z^2}{2m^2 g}$. Αντικαθιστώντας $L_z^2 = m^2 \varpi_1^2 v_1^2 = \frac{m^2 z_1 v_1^2}{\lambda}$

προκύπτει $\frac{mv_1^2}{2} = mgz_2$.

Θέμα 3^ο:

(α) Πριν την διάσπαση η τροχιά είναι κυκλική, άρα $\frac{GM}{R^2} = \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$.

(β) Το m_1 μόλις διαφεύγει, άρα έχει μηδενική ενέργεια, δηλ. $\frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{GMm_1}{R} = 0 \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$.

(γ) Από διατήρηση ορμής αφού η ταχύτητα του m_1 αυξάνεται, αυτή του m_2 θα μειώνεται.

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v \Leftrightarrow m_1 \left(\sqrt{\frac{2GM}{R}} - \sqrt{\frac{GM}{R}} \right) = m_2 \left(\sqrt{\frac{GM}{R}} - v_2 \right)$, άρα $v_2 < \sqrt{\frac{GM}{R}}$.

Αφού $v_2 < v_1$ και το m_1 μόλις που διαφεύγει, το m_2 εκτελεί ελλειπτική τροχιά.

Αυτό φαίνεται και από το πρόσημο της ενέργειας. Αφού η ταχύτητα του m_2 μειώνεται, μειώνεται και η ενέργειά του, άρα παραμένει αρνητική. Το ίδιο από $v_2 < \sqrt{\frac{GM}{R}}$ οπότε $E_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{GMm_2}{R} < -\frac{GMm_2}{2R} < 0$.

(δ) Για το m_2 το αρχικό σημείο είναι απίδα, απόγειο ή περίγειο, οπότε ισχύει αντίστοιχα $R = \frac{p_2}{1 \mp \varepsilon_2} =$

$\frac{L_2^2/m_2^2 GM}{1 \mp \varepsilon_2} = \frac{(m_2 v_2 R)^2/m_2^2 GM}{1 \mp 1/2}$, δηλ. $v_2 = \sqrt{\frac{GM(1 \mp 1/2)}{R}}$.

Το ίδιο προκύπτει από τη σχέση $\varepsilon_2 = \sqrt{1 + \frac{2E_2 L_2^2}{m_2 (GMm_2)^2}}$. Θέτοντας $L_2 = m_2 R v_2$, $E_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{GMm_2}{R}$

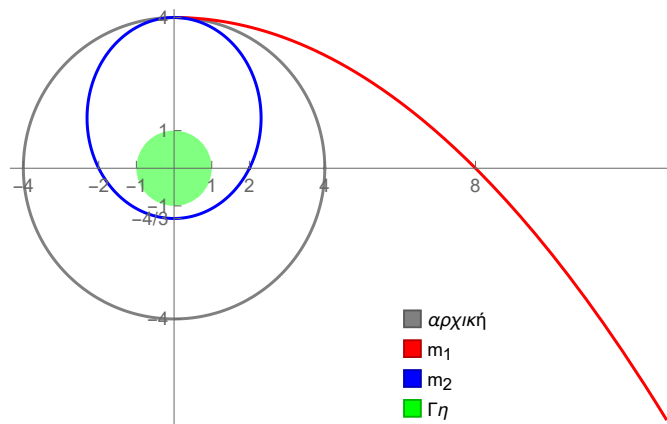
και $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ δίνει τριώνυμο $\frac{(v_2^2)^2}{2} - \frac{GM}{R}(v_2^2) + \frac{3G^2 M^2}{8R^2} = 0$.

Η διατήρηση ορμής δίνει $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v \Leftrightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{1 - \sqrt{1 \mp 1/2}}$. Μόνο το πάνω πρόσημο είναι δεκτό (δίνει θετική τιμή του λόγου μαζών) και προκύπτει $\frac{m_2}{m_1} = \sqrt{2}$.

(bonus) Το m_1 εκτελεί παραβολική τροχιά με περίγειο το αρχικό σημείο $R = 4R_\oplus$ και $p_1 = \frac{(m_1 v_1 R)^2}{m_1^2 GM} = 8R_\oplus$.

Για το m_2 το αρχικό σημείο αντιστοιχεί στο απόγειο, αφού $R = \frac{p_2}{1 - \varepsilon_2}$. Άρα

$p_2 = \frac{R}{2} = 2R_\oplus$ και η ακτίνα του περιγείου είναι $\frac{p_2}{1 + \varepsilon_2} = \frac{4}{3}R_\oplus$.

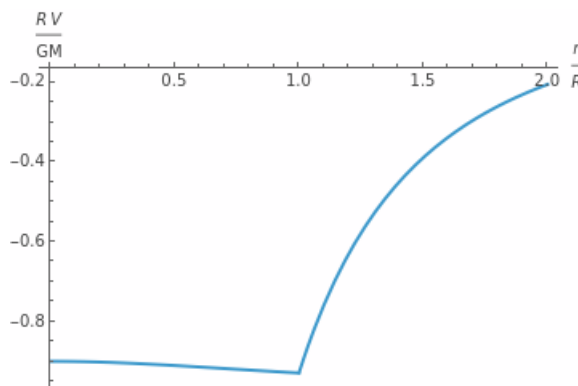


Θέμα 4^ο:

(α) $\mathbf{g}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ αν $r < R$ και $\mathbf{g}_0(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ αν $r > R$. Στο $r = R$ δεν ορίζεται (ασυνεχής).

(β) $\mu = \frac{2\pi^2\delta\theta}{4\pi} M = \delta\theta M$. Το ποσοστό είναι $\delta\theta$.

(γ) Η ένταση του πεδίου είναι $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_{\text{δακτ}}$ με $\mathbf{g}_{\text{δακτ}} = -\frac{G(-\mu)z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$ ως το κλασικό πεδίο δακτυλίου. Το δε βαρυτικό δυναμικό είναι $V(r) = -GM/R + G\mu/\sqrt{R^2+z^2}$ αν $r < R$ και $V(r) = -GM/r + G\mu/\sqrt{R^2+z^2}$ αν $r \geq R$. Το (-) στο βαρυτικό δυναμικό του δακτυλίου είναι λόγω ελλείπουσας μάζας. Η ένταση και το δυναμικό σχετίζονται μέσω της σχέσης $\mathbf{g} = -\nabla V$. (Στο σχήμα φαίνεται το γράφημα της V για $\mu/M = 0.1$.)



(δ) Από διατήρηση της ενέργειας

$$V(R + \eta) + 0 = V(0) + 0$$

οπότε χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε

$$-\frac{GM}{R + \eta} + \frac{GM\delta\theta}{\sqrt{R^2 + (R + \eta)^2}} = -\frac{GM}{R} + \frac{GM\delta\theta}{\sqrt{R^2}}.$$

αν στην παραπάνω σχέση διαγράψουμε τον κοινό όρο GM/R και αναπτύξουμε τις εκφράσεις για μικρό η/R (αλλά αγνοήσουμε τον εις διπλούν μικρό όρο $\delta\theta(\eta/R)$ θα λάβουμε

$$-(1 - \eta/R) + \delta\theta/\sqrt{2} = -1 + \delta\theta$$

οπότε λύνοντας βρίσκουμε

$$\eta = R\delta\theta(1 - 1/\sqrt{2}).$$