

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ



Τμήμα Φυσικής Εξέταση 25 Σεπτεμβρίου 2025 στις Βασικές Μαθηματικές Μεθόδους

Σύνολο μορίων στα 10 ερωτήματα=12.5 μόρια. Φροντίστε να είναι εμφανείς οι υπολογισμοί σας.

1. (α) Ποια είναι η σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\vec{b}, \vec{c}$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{c}$ για κάποιο τυχαίο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a}$; (β) Ποια είναι η αντίστοιχη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\vec{b}, \vec{c}$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$ για κάποιο τυχαίο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a}$; **[0.5+0.5 μόρια]**

Απ: (α) Είτε τα $\vec{b}, \vec{c}$ είναι τυχαία διανύσματα του επιπέδου του κάθετου στο $\vec{a}$, είτε ισχύει ότι $\vec{b} = \pm \vec{c}$. (β) Είτε τα $\vec{b}, \vec{c}$ είναι τυχαία διανύσματα του επιπέδου του κάθετου στο $\vec{a}$, είτε $\vec{b} = \lambda \vec{c}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ (συγγραμικά).

2. Έστω δύο μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ με αντίστοιχες σφαιρικές συντεταγμένες $\theta_1 = \pi/3, \phi_1 = \pi/2$ και $\theta_2 = \pi/3, \phi_2 = \pi$. Να βρεθούν οι ποσότητες (α) $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2$ και (β) $\hat{e}_1 + \hat{e}_2$. **[0.5+0.5 μόρια]**

Απ: (α) $1/4$, (β) $(-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2, 1)$.

3. Υπολογίστε τη στερεά γωνία υπό την οποία φαίνεται η παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου με ύψος $H = 2R$ και ακτίνα R από το κέντρο αυτού. **[1.5 μόριο]**

Απ: $2\sqrt{2}\pi$.

4. Πάνω σε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R σχεδιάζουμε την καμπύλη $\phi = \kappa\theta$ (σφαιρικές συντεταγμένες) με $\theta \in [0, \pi/2]$. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του κ αν ο μεσημβρινός (ημικύκλιο) ($\phi_M = 0, \theta_M \in [0, \pi]$) τέμνει την καμπύλη αυτή σε 5 σημεία; **[1 μόριο]**

Απ: $\kappa \in [16, 20)$.

5. Αν ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{pmatrix}$$

έχει ως ιδιοάνυσμα το $(2, 1)^T$ ποια είναι η τιμή του x και ποια η ιδιοτιμή αυτού του ιδιοανύσματος; **[1+0.5 μόρια]**

Απ: $x = -1, \lambda = 2$.

6. Έστω ο μιγαδικός αριθμός z με $\Re(z) = a$ και $\tan(\arg(z)) = b/a$ με $a, b \in \mathbb{R}$ και $a > 0, b > 0$. Να σχεδιαστούν στο μιγαδικό επίπεδο οι αριθμοί $z_1 = z, z_2 = z^*, z_3 = (-z)^*, z_4 = -z$ και να υπολογιστεί ο αριθμός $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$. **[1+0.5 μόρια]**

Απ: Αφού $z = a + ib$, είναι οι κορυφές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές $2a, 2b$ παράλληλες στους άξονες και κέντρο την αρχή των αξόνων. Το άθροισμά τους είναι 0 αφού $z_1 = -z_4$ και $z_2 = -z_3$.

7. Να υπολογιστεί ο αριθμός $\log(i^i)$. **[1 μόριο]**

Απ: $-(4k + 1)\pi/2$, με $k \in \mathbb{Z}$.

8. Να υπολογιστούν οι ποσότητες (α) $\delta_{ab}\delta_{ac}$, (β) $\delta_{ab}\epsilon_{acb}$. (γ) Εξηγήστε γιατί είναι αποδεκτό να γράψουμε το δ_{15} αλλά όχι το ϵ_{125} . **[0.5+0.5+0.5 μόρια]**

Απ: (α) δ_{bc} , (β) 0, (γ) Το δ_{ab} μπορεί να αναφέρεται σε οσοδήποτε διαστάσεις, ενώ το ϵ_{abc} μόνο στις 3.

9. (α) Να λύσετε τη β' θμια εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 1 = 0$ για διάφορες τιμές του λ . (β) Στο διάγραμμα της $f(x) = x^2 + 2\lambda x + 1$ όλη η καμπύλη (i) βρίσκεται πάνω από τον άξονα του x και το ελάχιστό της αντιστοιχεί σε θετική τιμή του x , (ii) εφάπτεται στον άξονα του x σε κάποια θετική τιμή του x . Βρείτε για την κάθε περίπτωση (i, ii) τι τιμές μπορεί να έχει η παράμετρος λ . **[0.5+1 μόρια]**

Απ: (α) $-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}$. (β) (i) $\lambda \in (-1, 0)$, (ii) $\lambda = -1$.

10. Υπολογίστε την τιμή της ορίζουσας

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 4c \end{pmatrix}$$

αν a, b, c μη μηδενικοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, πραγματικοί αριθμοί. **[1 μόριο]**

Απ: 0.

Καλή Επιτυχία