

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ



Τμήμα Φυσικής επί Πτυχίω Εξέταση 22 Σεπτεμβρίου 2026 στις Βασικές Μαθηματικές Μεθόδους

Διάρκεια εξέτασης 2.5 ώρες. Σύνολο μορίων 12.

1. (A) Αν $\vec{a} = (a_1, a_2)$ και $\vec{b} = (b_1, b_2)$ δύο διανύσματα του διδιάστατου ευκλείδειου χώρου σε καρτεσιανές συντεταγμένες, τότε η ποσότητα $X = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$ είναι (α) το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων, (β) το εξωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων, (γ) τίποτε από τα δύο. (B) Σε τι μετασχηματισμούς η ποσότητα $Y = a_1b_2 - a_2b_1$, που αφορά στις δύο συνιστώσες των δύο παραπάνω διανυσμάτων, παραμένει αναλλοίωτη; **[1.0+0.5 μόρια]**
2. Να υπολογιστούν οι δυνατές τιμές της ποσότητας x , έτσι ώστε τα δύο διανύσματα $\vec{a} = (x, x^2)$ και $\vec{b} = (1, x)$ του ευκλείδειου επιπέδου να είναι (α) παράλληλα μεταξύ τους και (β) κάθετα μεταξύ τους. **[1 μόριο]**
3. Η προβολή του διανύσματος $\vec{a}$ πάνω σε κάποιο διάνυσμα $\vec{b}$ είναι το διάνυσμα $\vec{c}$. Τι θα πρέπει να ισχύει για το διάνυσμα $\vec{b}$ ώστε $\text{προβ}_{\vec{a}}\vec{c} = \vec{a}$; **[1 μόριο]**
4. Δύο κινητά κινούνται με την ίδια σταθερή ταχύτητα v πάνω σε μια σφαίρα ακτίνας R , διαγράφοντας αντίστοιχα τις καμπύλες $C_1 : \theta = \pi/6$ και $C_2 : \theta = \pi/2$. (α) Όταν το 2ο κινητό θα έχει ολοκληρώσει μια πλήρη περιστροφή, πόσες περιστροφές θα έχει εκτελέσει το 1ο; (β) Αν τα δύο κινητά ξεκινήσουν από τον ίδιο μεσημβρινό $\phi = 0$, σε πόσο χρόνο, σε μονάδες R/v , θα βρίσκονται στη μέγιστη απόσταση το ένα από το άλλο; **[1.0+0.5 μόρια]**
5. Τεντώνοντας το χέρι μας που έχει μήκος 1 m, το δάχτυλό μας που έχει πλάτος 1 cm καλύπτει οριακά την πανσέληνο από το οπτικό μας πεδίο. Ποια είναι η στερεά γωνία υπό την οποία φαίνεται η σελήνη κατά τη φάση της πανσελήνου; [Υπόδειξη: $\cos x \simeq 1 - x^2/2$ για πολύ μικρές τιμές του x .] **[1 μόριο]**
6. Σε ποια πράξη των πινάκων **A**, **B** η άλλων μεγεθών που σχηματίζονται από αυτούς (ορίζουσα, ίχνος, ανάστροφος πίνακας, αντίστροφος πίνακας κλπ) αντιστοιχούν οι ποσότητες (α) $X = A_{ij}B_{ji}$, (β) $\Psi = A_{ii}B_{kk}$, (γ) $\Phi = \delta_{ij}A_{ki}B_{kj}$ με χρήση της σύμβασης Einstein; **[0.5+0.5+0.5 μόρια]**
7. Έστω ένας 2×2 πίνακας **A** με ιδιοανύσματα $\vec{X}_1, \vec{X}_2$ και αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_1, λ_2 . Να βρεθούν τα ιδιοανύσματα και οι ιδιοτιμές των (α) $2\mathbf{A}$, (β) $\mathbf{A}^{-1}$ (με δεδομένο ότι υπάρχει ο τελευταίος). **[0.5+0.5 μόρια]**
8. Έστω οι πίνακες
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
 Να βρεθούν δύο διαφορετικά και μη παράλληλα μεταξύ τους διανύσματα $\mathbf{X} = (x, y)^T$ τέτοια ώστε $\mathbf{AX} \parallel \mathbf{BX}$. **[1 μόριο]**
9. Ένας μιγαδικός αριθμός z έχει μέτρο 2 και όρισμα $\pi/4$. Να υπολογισθούν οι μιγαδικοί αριθμοί (α) z^2 , (β) z/z^* , (γ) $\log(z)$. **[0.5+0.5+0.5 μόρια]**
10. Έστω z_1, z_2, z_3 τρεις τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι στο μιγαδικό επίπεδο σχηματίζουν τις 3 κορυφές A, B, Γ ενός τριγώνου. (α) Τι σχέση έχει το τρίγωνο A', B', Γ' που σχηματίζεται από τους μιγαδικούς συζυγείς των δοθέντων μιγαδικών, z_1^*, z_2^*, z_3^* ; (β) Αν τα δύο τρίγωνα «πέφτουν» το ένα πάνω στο άλλο, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τους 3 μιγαδικούς αριθμούς και τι είδους τρίγωνο σχηματίζουν αυτοί; **[0.5+0.5 μόρια]**

Σύντομες Λύσεις

1. (A) σωστό το (γ), (B) σε στροφές $x \rightarrow x' = x \cos \phi + y \sin \phi, y \rightarrow y' = -x \sin \phi + y \cos \phi$.
2. Είναι πάντα παράλληλα ($x \neq 0$) και ποτέ κάθετα. Η περίπτωση $x = 0$ δεν οδηγεί σε καθετότητα διανυσμάτων αφού τότε $\vec{a} = \vec{0}$.
3. Να είναι παράλληλο το $\vec{b}$ στο $\vec{a}$.
4. (α) 2, (β) $t = \pi(R/v)$. Το 1ο θα βρίσκεται στον μεσημβρινό με $\phi = 0$ και το 2ο στον μεσημβρινό $\phi = \pi$. Τότε η απόστασή τους θα είναι $(\pi + \pi/6)R$.
5. Το γωνιακό άνοιγμα του δακτύλου είναι $\theta \simeq 1\text{cm}/1\text{m} = 0.01$. Επομένως η αντίστοιχη στερεά γωνία με αυτό το άνοιγμα θα είναι $2\pi(1 - \cos(\theta/2)) \simeq \pi \cdot 01^2/4 = .000025\pi$ sterad.
6. (α) $X = \text{Tr}(\mathbf{AB})$, (β) $\Psi = (\text{Tr} \mathbf{A})(\text{Tr} \mathbf{B})$, (γ) $\text{Tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B})$.
7. Τα ιδιοανύσματα παραμένουν ίδια και στις 2 περιπτώσεις (α) $\lambda = \lambda_{1,2}^2$, (β) $\lambda = 1/\lambda_{1,2}$.
8. $\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{BX}$ με λύση $\lambda_1 = 0$ και αντίστοιχο $\vec{X}_1 = (1, -2)^\top$ και $\lambda_2 = -1/2$ και αντίστοιχο $\vec{X}_1 = (2, -3)^\top$.
9. (α) $4i$, (β) i , (γ) $\log 2 + i\pi(2k + 1/4)$.
10. (α) Είναι ίσα (κατοπτρικά το ένα του άλλου). (β) $z_1 = z_2^*, z_3 \in \mathbb{R}$ και το τρίγωνο είναι ισοσκελές.