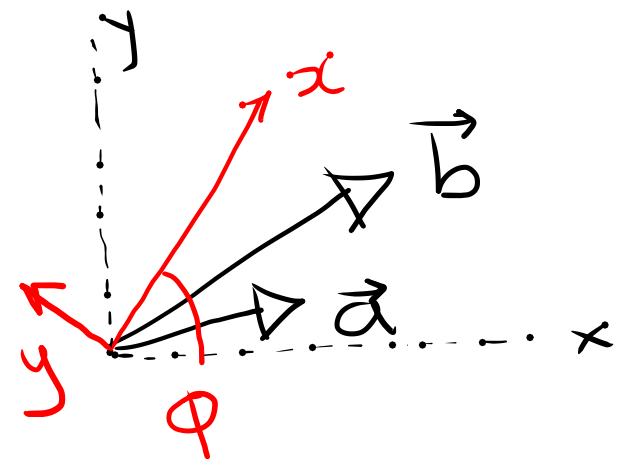


ΒΜ/Υ Διαλέξη 4 (13-10-25)

- Το εσωτ. χιόνισμα ως αναλυστική ποσότητα
- Άλλες αναλυστικές ποσότητες
- Γεωμ. ερμηνεία εσωτ. χιόνισμα
- Εξωτ. χιόνισμα
- Άλλα χιόνισμα



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x^{(\phi)} b_x^{(\phi)} + a_y^{(\phi)} b_y^{(\phi)} \text{ είναι ανεξάρτ. από τη γωνία } \phi.$$

$\forall \vec{a}, \vec{b}$: ορίζουμε την ποσότητα :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

η οποία είναι αριθμός (θετ. ή αρν. ή 0)

είναι ανεξάρτητη του συστήματος αναφοράς που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε a_x, a_y, b_x, b_y

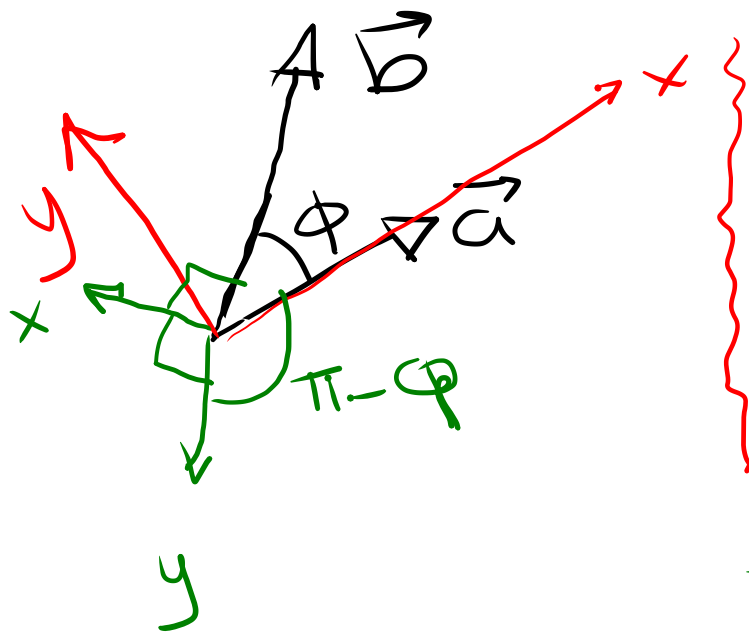
- $\exists$ αλλ. τέτοια αναλλοίωτη ποσότητα η οποία να είναι γραμμική ως προς $\vec{a}, \vec{b}$

$$\vec{a} * \vec{b} = \lambda_{xx} a_x b_x + \lambda_{yy} a_y b_y + \lambda_{xy} a_x b_y + \lambda_{yx} a_y b_x$$

$\lambda_{xx}, \lambda_{yy}, \dots \in \mathbb{R}$
προκαθορισμένες

για ποια $\lambda_{xx}, \lambda_{yy}, \dots$ η ποσότητα $\vec{a} * \vec{b}$
είναι αναλλοίωτη (ανεξαρτ. του συστ.
αναφοράς)

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = a_x b_y - a_y b_x \quad \text{είναι και αυτή αναλλοίωτη}$$



$$\vec{a} = (a, 0)$$

$$\vec{b} = (b \cos \varphi, b \sin \varphi)$$

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = ab \sin \varphi - 0 \quad \bullet$$

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= (a \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi), a \cos(\pi - \varphi)) \\ &= (-a \sin \varphi, -a \cos \varphi) \end{aligned}$$

$$\vec{b}' = (0, -b)$$

$$\vec{a}' \otimes \vec{b}' = (ab \sin \varphi) \quad \bullet$$

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = a_x b_y - a_y b_x = - \underbrace{(\vec{b} \otimes \vec{a})}_{b_x a_y - b_y a_x} \quad ! \quad \text{ψάλλον πάει για απόρριψη}$$

Εξω7. Δινομένο διανυσματικό

$\vec{a}, \vec{b} \rightarrow \text{αριθμοί: } \vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \parallel \quad \begin{matrix} b_x a_x + b_y a_y \\ a_x b_x + a_y b_y \end{matrix}$$

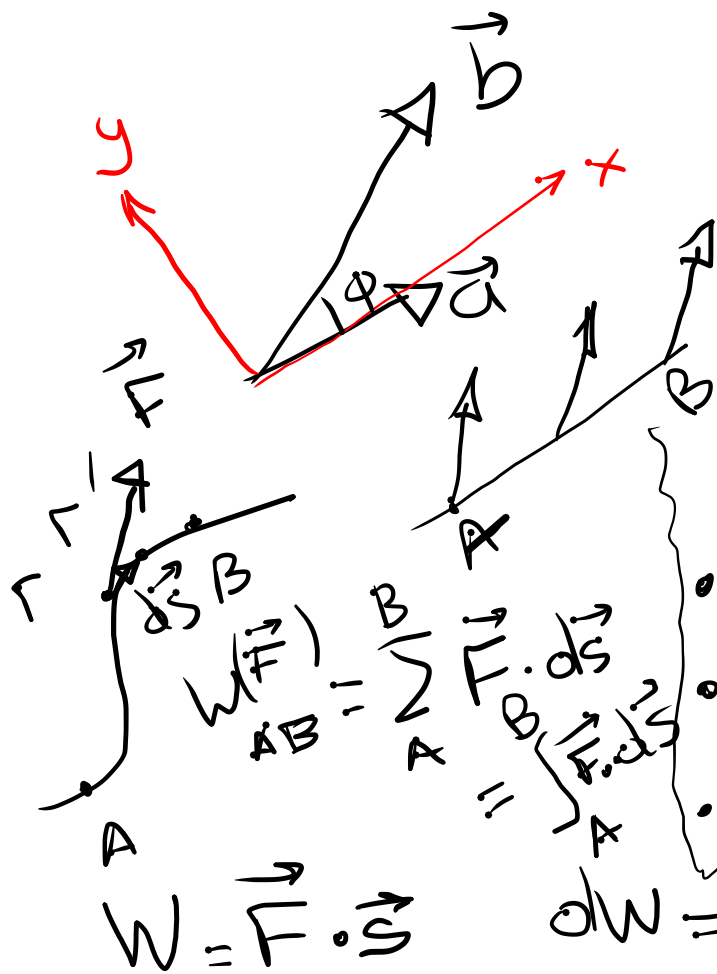
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a, 0) \cdot (b \cos \varphi, b \sin \varphi) = ab \cos \varphi$$

• αν $\varphi = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = ab$

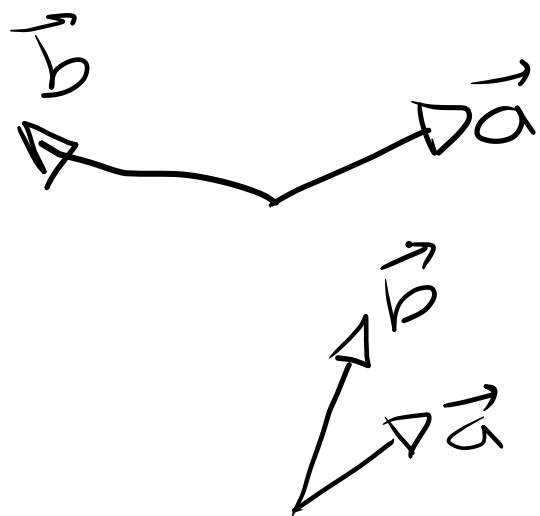
• αν $\varphi = \pi/2 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

• αν $\vec{a}, \vec{b} \perp \Rightarrow \text{διαν.} \Rightarrow$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$



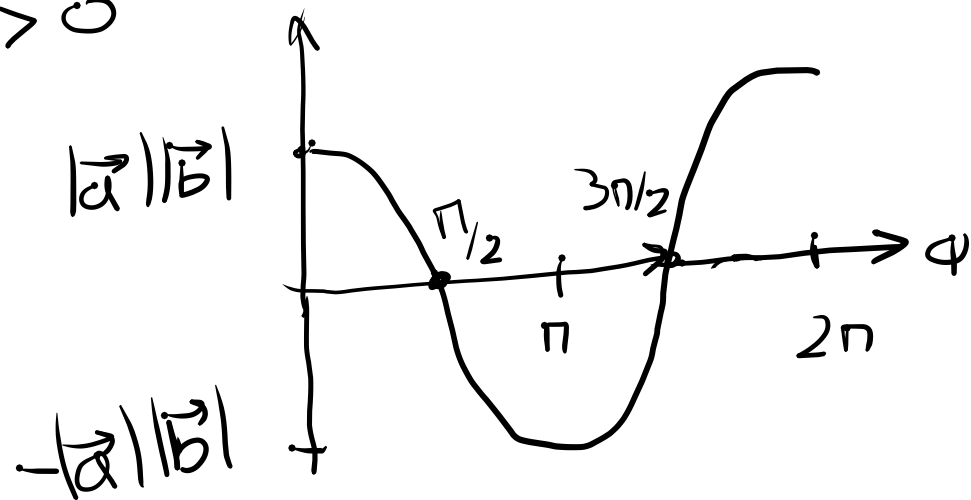
$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ $\Leftrightarrow$ οξεία γωνία ($\cos \varphi > 0$)
 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ $\Leftrightarrow$ αμβλεία γωνία ($\cos \varphi < 0$)



$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$



$$\vec{a} = \underbrace{\vec{a} \cdot \hat{x}}_{a_x} \hat{x} + \underbrace{\vec{a} \cdot \hat{y}}_{a_y} \hat{y}$$

$$a_x = |\vec{a}| \cos \phi$$

$$|\vec{a}| \sin \phi$$

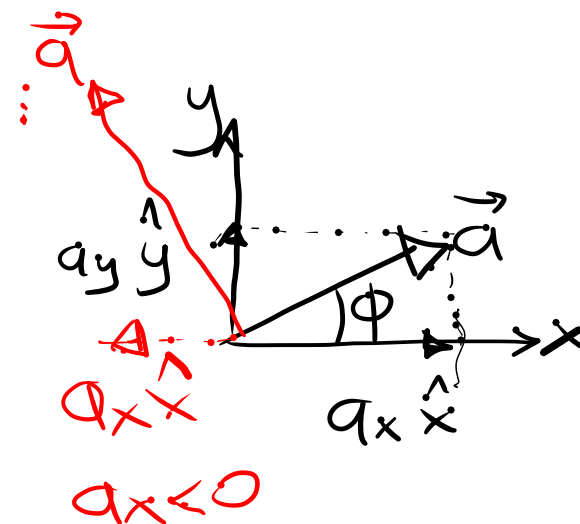
$$= |\vec{a}| \cos \phi$$

$$= |\vec{a}| |\hat{x}| \cos(\angle \vec{a}, \hat{x})$$

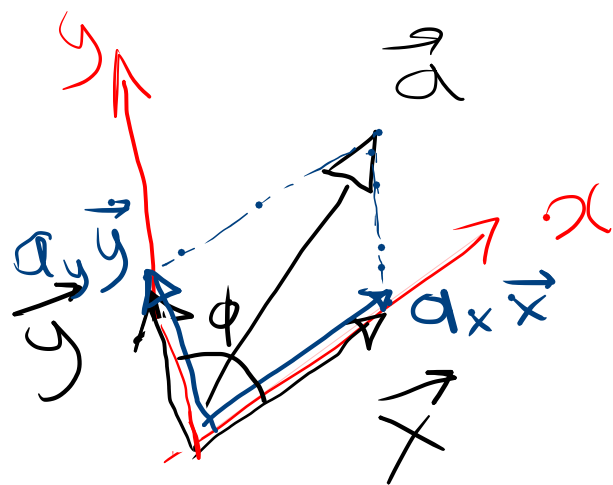
$$= \vec{a} \cdot \hat{x}$$

$$|\vec{a}| \cos(\pi/2 - \phi) = |\vec{a}| \sin \phi$$

$$\vec{a} \cdot \hat{y}$$



$$\vec{a} = \underbrace{\vec{a} \cdot \hat{x}}_{\in \mathbb{R}} \hat{x} + \underbrace{\vec{a} \cdot \hat{y}}_{\in \mathbb{R}} \hat{y} \neq \underbrace{\vec{a} \hat{x} \cdot \hat{x} + \vec{a} \hat{y} \cdot \hat{y}}_{2\vec{a}}$$



$\vec{x}, \vec{y}$ όχι μοναδιαία

$$\vec{a} = \dots a_x \vec{x} + \dots a_y \vec{y} \cdot$$

$$a_x \neq \vec{a} \cdot \vec{x}$$

$$\underline{a_x} \vec{a} \cdot \vec{x} = a_x \vec{x} \cdot \vec{x} + a_y \vec{y} \cdot \vec{x}$$

$$= (a_x |\vec{x}|^2 + a_y |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \phi) a_x$$

$$- \underline{a_y} \vec{a} \cdot \vec{y} = - (a_x |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \phi + a_y |\vec{y}|^2) a_y$$

$$= \underline{a_x^2} |\vec{x}|^2 - \underline{a_y^2} |\vec{y}|^2 \bullet (1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \underline{a_x^2} |\vec{x}|^2 + \underline{a_y^2} |\vec{y}|^2 + 2 \underline{a_x a_y} \vec{x} \cdot \vec{y} \bullet (2)$$

$$(1, 2) \rightarrow a_x = \dots \quad a_y = \dots$$

Το εσωτ. γινόμενο χευνίζεται
για διανύσματα που "ζουν" σε παραπάνω
από 2 διαστάσεις

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z + a_w b_w + \dots$$

$$\equiv a_i b_i = \sum_{i=1}^N a_i b_i$$

υπονοείται άθροιση σε όλες τις
τιμές που μπορεί
να πάρει ο δείκτης i

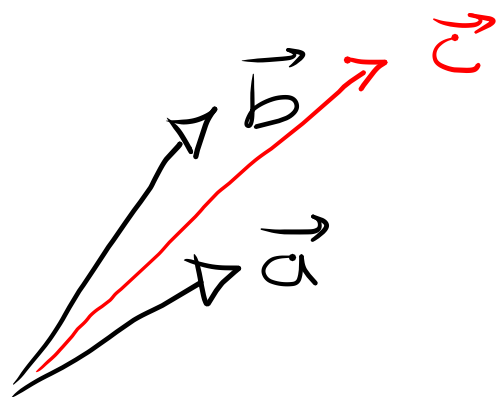
ότις 2-D

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi_{\vec{a}, \vec{b}}$$

$$\vec{a} = \vec{a} \cdot \hat{x} \hat{x} + \vec{a} \cdot \hat{y} \hat{y} = \vec{a} \cdot [\hat{x} \hat{x} + \hat{y} \hat{y}]$$

2 όροι από περίσσεια
γινόμενα

Μπορώ από $\vec{a}, \vec{b}$ να φτιάξω ένα
νέο διάνυσμα $\vec{c}$ να είναι χινομένο
των $\vec{a}, \vec{b}$?



$$\vec{c} \rightarrow 2\vec{c} \quad \text{αν} \quad \vec{a} \rightarrow 2\vec{a}$$

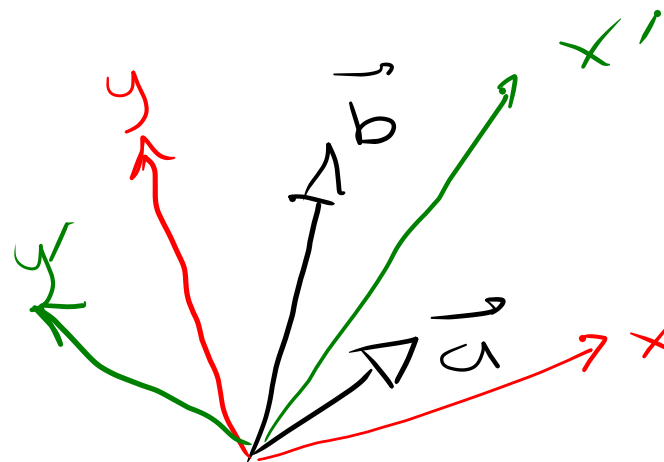
$$\vec{c} \rightarrow 3.5\vec{c} \quad \text{αν} \quad \vec{b} \rightarrow 3.5\vec{b}$$

$$\vec{c} = \vec{a} * \vec{b} \quad \text{να είναι διάνυσμα.}$$

για να είναι διάνυσμα θα πρέπει
οι γνωστώδες του να "στρίβουν"
καταλλήλως αν αλλοίωγες (στρίψωγες)
σύστημα αναφοράς

$$\vec{c} = \overset{\in \mathbb{R}}{\cdot} \vec{a} + \overset{\in \mathbb{R}}{\cdot} \vec{b}$$

$$\vec{c}(\lambda \vec{a}, \mu \vec{b}) = \lambda \mu \vec{c}$$



$$a_x = \vec{a} \cdot \hat{x}$$

$$a_x = \vec{a} \cdot \hat{x}'$$

$$\lambda_1 = \vec{c} \cdot \vec{a} \quad \lambda_2$$

$$= \vec{c} \cdot \vec{b} \quad \mu_2$$

$$\vec{c} = \vec{a} * \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{b} \lambda \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a} \mu \vec{b}$$