Ν. Βαρουχάκης
Λ. Αδαμόπουλος
Χ. Γιαννίκος
Α. Μπέτσης
Δ. Νοταράς
Κ. Σολδάτος
Σ. Φωτόπουλος

μαθηματικά Ι

γ΄ λυκείου

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΘΗΝΑ

Οργανισμός
Εκδόσεως
Διδακτικών
Βιβλίων

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΟΕ ΔΒ

Με απόφαση της ελληνικής κυβερνήσεως τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου και του Λυκείου τυπώνονται από τον Οργανισμό Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων και μοιράζονται δωρεάν.

Ν. ΒΑΡΟΥΧΑΚΗΣ - Λ. ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ - Χ. ΓΙΑΝΝΙΚΟΣ
Α. ΜΠΕΤΣΗΣ - Δ. ΝΟΤΑΡΑΣ - Κ. ΣΟΛΔΑΤΟΣ - Σ. ΦΩΤΟΠΟΥΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
Γ΄
ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα βιβλία Μαθηματικών που εισάγονται στις δύο τελευταίες τάξεις του Λυκείου από το σχολικό έτος 1983-84, ανταποκρίνονται στις γενικές προδιαγραφές που περιλαμβάνονται στα πρόσφατα εκπαιδευτικά μέτρα για τη νέα Δομή του Λυκείου. Το περιεχόμενο των βιβλίων υλοποιεί τα αντίστοιχα ανανεωμένα αναλυτικά προγράμματα για τις τάξεις αυτές.

Καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια ώστε το όλο έργο: α) να αποβεί ένα πρώτο βήμα εκσυγχρονισμού και αναθεώρησης της ύλης, με βάση όμως την υποδομή των μαθητών για τους οποίους προορίζεται· β) να αποτελέσει μαζί με το βιβλίο της Α΄ Λυκείου, που ήδη χρησιμοποιείται, μία ολοκληρωμένη και αυτοτελή σειρά Μαθηματικών Λυκείου· γ) να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις της διδακτικής και ιδιαίτερα της ακριβολογίας και σαφήνειας που χαρακτηρίζουν τα Μαθηματικά· δ) να εναρμονίζεται με το διατιθέμενο νέο ωράριο διδασκαλίας ώστε να διασφαλίζεται η ολοκλήρωση της ύλης.

Σε κάθε κεφάλαιο υπάρχει σύντομο προλογικό σημείωμα στο οποίο επισημαίνονται η πορεία και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του κεφαλαίου. Το σημείωμα απευθύνεται κυρίως στο διδάσκοντα, αλλά ορισμένα σημεία του μπορούν να αξιοποιηθούν και από το μαθητή.

Οι ασκήσεις περιέχονται στο τέλος κάθε κεφαλαίου με ιδιαίτερη αρίθμηση στην οποία αναφέρονται οι παραπομπές που υπάρχουν στο τέλος κάθε αυτοτελούς ενότητας.

Τέλος, κάθε τεύχος κλείνει με Παράρτημα που περιέχει τις απαντήσεις και υποδείξεις για τη λύση των ασκήσεων. Από τις υποδείξεις αυτές πολύ λίγες είναι απαραίτητες στο μαθητή που φιλοδοξεί να λύνει μόνος του, χωρίς βοήθεια, τις ασκήσεις και έχει μελετήσει μεθοδικά και κατανοήσει την αντίστοιχη θεωρητική ύλη.

Το έργο αυτό γράφτηκε με γνώμονα τις υπάρχουσες δυνατότητες, αλλά και την κατεπείγουσα ανάγκη να ανεβεί ποιοτικά το σχολικό βιβλίο στη χώρα μας. Γράφτηκε με εκτίμηση και εμπιστοσύνη σε κείνους που θα το χρησιμοποιήσουν και ιδιαίτερα:

- *στους μαθητές που με ενδιαφέρον θα προσπαθήσουν μέσα από τις γραμμές του να κατακτήσουν τη γνώση*
- *στους συναδέλφους που με ευσυνειδησία και κόπο θα ζωντανέψουν το περιεχόμενό του.*

Σ' αυτούς αφιερώνεται το έργο.

1 ΠΙΝΑΚΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Οι πίνακες είναι αναμφισβήτητα ένα από τα χρησιμότερα «εργαλεία» των μαθηματικών τόσο σε θεωρητικά όσο και σε πρακτικά θέματα. Γι' αυτό το περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου, κατά το μέγιστο μέρος του, απευθύνεται στους μαθητές και της $1^{ης}$ και της $2^{ης}$ ή $4^{ης}$ δέσμης, χωρίς αυτό νά αποκλείει φυσικά κάποια -απαραίτητη σε ορισμένα σημεία- διαφοροποίηση της διδασκαλίας.

Μετά τη βασική έννοια του πίνακα ορίζονται οι πράξεις στο σύνολο των πινάκων, όχι αυθαίρετα, αλλά πάντοτε συνδεδεμένες με συγκεκριμένα παραδείγματα στα οποία ενυπάρχει κάθε φορά η αναγκαιότητα του ορισμού.

Εξάλλου οι ιδιότητες των πράξεων που προβάλλονται ως βασικές είναι κυρίως εκείνες που καθιστούν το σύνολο των πινάκων $\nu \times \mu$ διανυσματικό χώρο και ειδικότερα το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων $\nu \times \nu$ δακτύλιο μη αντιμεταθετικό. Τα παραπάνω προετοιμάζουν το μαθητή για τα επόμενα κεφάλαια.

Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζεται η χρήση των πινάκων στη λύση γραμμικών συστημάτων. Πρέπει να σημειωθεί ότι η μέθοδος των διαδοχικών απαλοιφών με χρήση του επαυξημένου πίνακα ενός συστήματος είναι προσαρμόσιμη σε πρόγραμμα υπολογιστή και συνεπώς ιδιαίτερα χρήσιμη στις περιπτώσεις που ο αριθμός των εξισώσεων ή και των αγνώστων είναι μεγάλος.

Στη συνέχεια, από την αναγκαία συνθήκη για να είναι συμβιβαστό ένα σύστημα με επαυξημένο πίνακα 2×2 ή 3×3 προκύπτει ο ορισμός της ορίζουσας $2^{ης}$ ή $3^{ης}$ τάξης. Ακολουθεί η μελέτη των ιδιοτήτων τους που οδηγεί στον επαγωγικό ορισμό της ορίζουσας ν τάξης. Η όλη παρουσίαση καταλήγει στη γενική λύση ενός συστήματος ν εξισώσεων με ν αγνώστους, μια λύση που, όταν υπάρχει, έχει, με τη χρησιμοποίηση οριζουσών, εξαιρετικά κομψή μορφή. Η πλήρης διερεύνηση των γραμμικών συστημάτων θα γίνει με τη θεωρία των διανυσματικών χώρων στο κεφάλαιο 3.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Η έννοια του πίνακα

1.1 Ένα σύστημα δυο εξισώσεων α΄ βαθμού με δυο αγνώστους, π.χ. το

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

χαρακτηρίζεται από τους έξι αριθμούς 2, 3, 1, 3, -1, 7 που καθένας τους έχει συγκεκριμένο «ρόλο» στο σύστημα:

- είναι ή συντελεστής του x ή συντελεστής του y ή σταθερός όρος και
- ανήκει ή στην πρώτη ή στη δεύτερη εξίσωση.

Το σύστημα λοιπόν θα μπορούσε να οριστεί πλήρως από τους 6 παραπάνω αριθμούς, γραμμένους με ορθογώνια διάταξη σε 2 γραμμές και 3 στήλες, ώστε να δηλώνεται η θέση που κατέχουν στο σύστημα:

συν/τής x ↓	*συν/τής y* ↓	*σταθ. όρος* ↓	
2	3	1	⟵ *της α΄ εξίσωσης*
3	-1	7	⟵ *της β΄ εξίσωσης*

Μια τέτοια διάταξη αριθμών λέγεται **πίνακας 2 γραμμών και 3 στηλών** ή απλά **πίνακας 2×3** και γράφεται συντομότερα

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{Vmatrix}$$

Γενικά κάθε ορθογώνια διάταξη $\nu \cdot \mu$ αριθμών ($\nu, \mu \in \mathbb{N}^*$) σε **ν γραμμές** και **μ στήλες** λέγεται **πίνακας** $\nu \times \mu$.

Οι αριθμοί που ορίζουν έναν πίνακα λέγονται **στοιχεία** του. Το στοιχείο που ανήκει στην *i-γραμμή* ($1 \leqslant i \leqslant \nu$) και *j-στήλη* ($1 \leqslant j \leqslant \mu$) συμβολίζεται συνήθως α_{ij}.
Έτσι ο πίνακας $\nu \times \mu$ γράφεται:

$$
\begin{array}{cc}
 & \quad\quad\quad\quad \textit{j-στήλη} \\
 & \quad\quad\quad\quad \downarrow \\
A = & \begin{bmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1\mu} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2\mu} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{i\mu} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu j} & \dots & \alpha_{\nu\mu}
\end{bmatrix} \leftarrow \textit{i-γραμμή}
\end{array}
$$

Σημείωση

Με την ορθογώνια διάταξη των στοιχείων του ένας πίνακας παρουσιάζεται ως πεπερασμένη «διπλή ακολουθία». Ακριβέστερα, αν $T_\nu = \{1, 2, \dots, \nu\}$ και $T_\mu = \{1, 2, \dots, \mu\}$, ένας πίνακας $\nu \times \mu$ είναι απεικόνιση του $T_\nu \times T_\mu$ στο $\mathbb{R}$.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι δυο πίνακες $\nu \times \mu$ $A = [\alpha_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ είναι **ίσοι** (ταυτιζόμενοι), αν και μόνο αν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ταυτίζονται. Δηλαδή $A = B$ σημαίνει ότι για κάθε $i = 1, 2, \dots, \nu$ και $j = 1, 2, \dots, \mu$ είναι

$$\boxed{\alpha_{ij} = \beta_{ij}}$$

Χρήση πινάκων

1.2 Γενικά ένας πίνακας με τα αριθμητικά στοιχεία που είναι «διατεταγμένα» στις γραμμές και τις στήλες του, παρέχει ένα σύνολο πληροφοριών. Θα αναφέρουμε μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις χρήσης πινάκων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Το μαθητικό δυναμικό ενός σχολείου κατά φύλο και τάξη μπορεί να παρασταθεί με πίνακα 2×3, π.χ. τον πίνακα

$$
\begin{array}{cl}
\begin{array}{ccc} A' & B' & \Gamma' \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 125 & 82 & 60 \\ 101 & 85 & 57 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{Αγόρια} \\ \text{Κορίτσια} \end{array}
\end{array}
$$

που δίνει ένα πλήθος πληροφοριών: στην Α΄ τάξη φοιτούν 125 αγόρια και 101 κορίτσια, τα κορίτσια της Γ΄ τάξης είναι 57 κτλ.

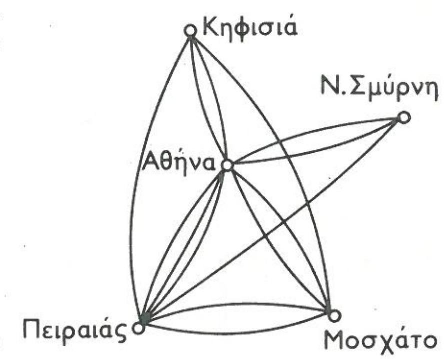
2. Το προσωπικό ενός εργοστασίου κατανεμημένο σε 3 κατηγορίες και σε 5 τμήματα μπορεί να παρασταθεί με πίνακα π.χ. τον πίνακα 3×5

$$\begin{bmatrix} 128 & 205 & 316 & 107 & 156 \\ 250 & 318 & 354 & 285 & 204 \\ 400 & 389 & 425 & 376 & 158 \end{bmatrix}$$

που μας πληροφορεί ότι στο 4ο τμήμα της 2ης κατηγορίας απασχολούνται 285 εργάτες, στο 3ο τμήμα της 3ης κατηγορίας 425 εργάτες κτλ.

3. Στο σχήμα έχουμε ένα μέρος του συγκοινωνιακού δικτύου της περιοχής της πρωτεύουσας που μπορεί να εκφραστεί με τον επόμενο πίνακα 5×5.

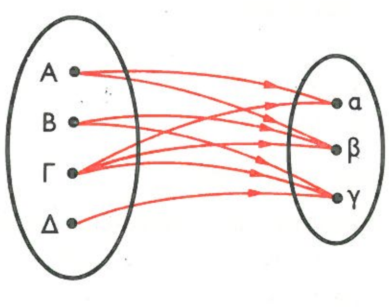
$$
\begin{array}{cc}
\text{Από} \; \downarrow \;\; \text{Προς} \longrightarrow & \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \Pi & \mathrm{M} & \mathrm{N\Sigma} & \mathrm{K} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \Pi \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{N\Sigma} \\ \mathrm{K} \end{array} &
\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$



Τα στοιχεία του πίνακα δείχνουν το πλήθος των συγκοινωνιακών μέσων που εξυπηρετούν τους Δήμους ανά δύο.

4. Μια διμελής σχέση με την οποία συνδέονται τα στοιχεία δυο πεπερασμένων συνόλων μπορεί να παρασταθεί με πίνακα του οποίου τα στοιχεία είναι 1 ή 0 για την περίπτωση σχετιζόμενων ή όχι στοιχείων των συνόλων.
Π.χ. Η διμελής σχέση που δίνεται με το διπλανό βελοδιάγραμμα μπορεί να παρασταθεί με τον επόμενο πίνακα 4×3.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \Gamma \\ \Delta \end{array} &
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$



Είδη πινάκων

1.3 Στα επόμενα θα χρησιμοποιήσουμε ορισμένα είδη πινάκων τα οποία περιγράφουμε αμέσως. Ένας πίνακας ν×μ λέγεται

- **πίνακας-γραμμή,** όταν $\nu = 1$. Π.χ. οι

$$[3 \;\; -6 \;\; 7], \quad [-8 \;\; 0 \;\; 5 \;\; -1], \quad [0 \;\; 1]$$

είναι πίνακες-γραμμή.

- **πίνακας-στήλη**, όταν $\mu = 1$. Π.χ. οι

$$\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\7\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-3\end{bmatrix}$$

είναι πίνακες-στήλη.

- **πίνακας-στοιχείο**, όταν $\mu = \nu = 1$. Π.χ. οι

$$[-5],\ [7],\ [0]$$

είναι πίνακες-στοιχείο.

- **κλιμακωτός κάτω**, όταν $\alpha_{ij} = 0$ **για κάθε** $i > j$. Π.χ. οι

$$\begin{bmatrix}3&-2&5&0&-7\\0&1&0&3&6\\0&0&2&3&0\\0&0&0&-3&-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&-3&3\\0&0&6\\0&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

είναι πίνακες κλιμακωτοί κάτω.

- **κλιμακωτός άνω**, όταν $\alpha_{ij} = 0$ **για κάθε** $i < j$. Π.χ. οι

$$\begin{bmatrix}5&0&0&0\\-8&6&0&0\\0&-3&7&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5&0&0&0&0\\-7&0&0&0&0\\0&3&-2&0&0\\2&-1&0&0&0\end{bmatrix}$$

είναι πίνακες κλιμακωτοί άνω.

- **τετραγωνικός**, όταν $\nu = \mu$. Π.χ. οι

$$\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7&-6&5\\3&2&-1\\-4&1&2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

είναι τετραγωνικοί πίνακες.

Ειδικότερα, ένας **τετραγωνικός πίνακας** λέγεται:
τριγωνικός άνω ή κάτω, όταν είναι κλιμακωτός άνω ή κάτω αντιστοίχως.
διαγώνιος, όταν $\alpha_{ij} = 0$ **για κάθε** $i \neq j$. Π.χ. οι

$$\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}$$

είναι διαγώνιοι πίνακες.

Ασκήσεις: 1, 2, 3

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΠΙΝΑΚΕΣ

Πρόσθεση πινάκων

1.4 Ας υποθέσουμε ότι μια βιομηχανία ηλεκτρικών ειδών διέθεσε σ' ένα μήνα:

ψυγεία	*κουζίνες*	*πλυντήρια*	
18	35	21	*στην Αθήνα*
13	29	22	*στη Θεσσαλονίκη*

και τον επόμενο μήνα:

22	19	12	*στην Αθήνα*
25	18	31	*στη Θεσσαλονίκη*

Τότε τους δυο αυτούς μήνες η βιομηχανία αυτή διέθεσε συνολικά:

ψυγεία	*κουζίνες*	*πλυντήρια*	
(18+22)	(35+19)	(21+12)	*στην Αθήνα*
(13+25)	(29+18)	(22+31)	*στη Θεσσαλονίκη*

Η κίνηση της παραπάνω βιομηχανίας κάθε μήνα και συνολικά περιγράφεται αντίστοιχα με τους επόμενους πίνακες $2{\times}3$:

$$A=\begin{bmatrix}18&35&21\\13&29&22\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}22&19&12\\25&18&31\end{bmatrix},\quad \Gamma=\begin{bmatrix}18+22&35+19&21+12\\13+25&29+18&22+31\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}40&54&33\\38&47&53\end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Γ λέγεται *άθροισμα* των πινάκων Α και Β. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ *Άθροισμα* **των πινάκων** $\nu{\times}\mu$ $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [\beta_{ij}]$ **λέγεται ο πίνακας** $\nu{\times}\mu$ $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ **του οποίου κάθε στοιχείο** γ_{ij} **είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των Α και Β. Δηλαδή**

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij}+\beta_{ij}$$

Το παραπάνω άθροισμα πινάκων, που για κάθε ζεύγος (Α, Β) είναι **μοναδικό**, συμβολίζεται **Α+Β**. Π.χ. είναι

$$\begin{bmatrix}-5&7\\3&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&-2\\3&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5+4&7-2\\3+3&0-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&5\\6&-5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-6\\2\\-7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\4\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6+5\\2+4\\-7-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\6\\-13\end{bmatrix}$$

Έτσι στο σύνολο $\Pi_{\nu\times\mu}$ των πινάκων $\nu{\times}\mu$ ορίζεται η **«πρόσθεση πινάκων»**.

Ιδιότητες πρόσθεσης

1.5 Είδαμε ότι η πρόσθεση πινάκων ν×μ ανάγεται σε πρόσθεση των αντίστοιχων στοιχείων τους, που είναι πραγματικοί αριθμοί. Έτσι, αν $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [\beta_{ij}]$, $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ είναι πίνακες ν × μ, θα ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- **Προσεταιριστική**

$$\boxed{(A+B)+\Gamma = A+(B+\Gamma)} \qquad (1)$$

Πράγματι, τα αντίστοιχα στοιχεία των πινάκων που είναι μέλη της ισότητας (1) ταυτίζονται, αφού για κάθε i = 1, 2, ..., ν και j = 1, 2, ..., μ έχουμε

$$(\alpha_{ij} + \beta_{ij}) + \gamma_{ij} = \alpha_{ij} + (\beta_{ij} + \gamma_{ij})$$

Το $(A+B)+\Gamma$ λέγεται *άθροισμα* των Α, Β, Γ και συμβολίζεται απλά $\mathbf{A+B+\Gamma}$.
Γενικότερα με τον τύπο:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k = (A_1 + A_2 + \ldots + A_{k-1}) + A_k$$

ορίζεται επαγωγικά το άθροισμα $k \geqslant 3$ πινάκων ν × μ $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

- **Αντιμεταθετική**

$$\boxed{A+B = B+A} \qquad (2)$$

Προκύπτει αμέσως, αφού

$$\alpha_{ij} + \beta_{ij} = \beta_{ij} + \alpha_{ij}$$

- **Ουδέτερο στοιχείο.** Ο πίνακας ν × μ με όλα τα στοιχεία του μηδέν συμβολίζεται $\mathbf{O}_{\nu\times\mu}$ ή απλά **O** και, όπως είναι φανερό, για κάθε πίνακα ν × μ Α έχουμε:

$$\boxed{A+O = O+A = A} \qquad (3)$$

Άλλος πίνακας ν × μ με την ιδιότητα (3) δεν υπάρχει, γιατί ο αριθμός 0 είναι το μοναδικό ουδέτερο στοιχείο ως προς την πρόσθεση πραγματικών αριθμών. Ο μοναδικός αυτός πίνακας ν × μ **O** λέγεται **μηδενικός** και χαρακτηρίζεται ως *«ουδέτερο στοιχείο»* ως προς την πρόσθεση πινάκων ν × μ.

- **Αντίθετος πίνακα.** Αν δοθεί ένας πίνακας ν × μ Α υπάρχει μοναδικός πίνακας ν × μ Α΄ τέτοιος ώστε

$$A + A' = A' + A = O \qquad (4)$$

Πράγματι, αν είναι $A = [\alpha_{ij}]$, τότε ο πίνακας $A' = [\alpha'_{ij}]$ με στοιχεία $\alpha'_{ij} = -\alpha_{ij}$ επαληθεύει την (4) και είναι μοναδικός, γιατί ο αντίθετος κάθε πραγματικού αριθμού είναι μοναδικός. Το μοναδικό αυτό πίνακα Α΄ τον λέμε **αντίθετο** του Α και θα τον συμβολίζουμε **-Α**. Έτσι η (4) γράφεται:

$$\boxed{A + (-A) = (-A) + A = O} \qquad (4')$$

Π.χ. ο αντίθετος του $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 9 & -11 \end{bmatrix}$ είναι ο $-B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -9 & 11 \end{bmatrix}$, του $\Gamma = [6\ -3\ -2]$ είναι ο $-\Gamma = [-6\ 3\ 2]$ κτλ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Από την (4΄) προκύπτει ότι αντίθετος του -Α είναι ο Α, δηλαδή

$$-(-A) = A$$

Γι' αυτό οι πίνακες Α και -Α λέγονται απλά **αντίθετοι.**

2. Αντίθετος του μηδενικού πίνακας ν × μ **O** είναι ο ίδιος πίνακας.

Έστω τώρα δυο πίνακες ν × μ Α και Β. Το άθροισμα Α + (-Β) λέγεται **διαφορά του Β από τον Α** και συμβολίζεται **Α-Β**.

Π.χ. είναι

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5)+(-9) & 4+5 \\ 7+1 & 0+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 9 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν Α, Β, Γ είναι πίνακες ν × μ, να δειχτεί ότι:

(i) $A+\Gamma = B+\Gamma \Leftrightarrow A = B$, **(ii)** $A+B = \Gamma \Leftrightarrow A = \Gamma - B$, **(iii)** $-(A+B) = (-A)+(-B)$

(i) Από τη μοναδικότητα του αθροίσματος έχουμε $A=B \Rightarrow A+\Gamma = B+\Gamma$

Αντιστρόφως: $A+\Gamma = B+\Gamma \Rightarrow (A+\Gamma)+(-\Gamma) = (B+\Gamma)+(-\Gamma) \Rightarrow A+[\Gamma+(-\Gamma)] = B+[\Gamma+(-\Gamma)]$

$$\Rightarrow A+O = B+O \Rightarrow A = B.$$

(ii) Επίσης είναι: $A+B = \Gamma \Leftrightarrow (A+B)+(-B) = \Gamma+(-B) \Leftrightarrow A+[B+(-B)] = \Gamma-B$
$\Leftrightarrow A+O = \Gamma-B \Leftrightarrow A = \Gamma-B.$

(iii) Τώρα είναι: $(A+B)+[(-A)+(-B)] = (A+B)+[(-B)+(-A)] = A+[B+[(-B)+(-A)]]$
$= A+[(B+(-B))+(-A)] = A+[O+(-A)] = A+(-A) = O$

Συνεπώς θα είναι $-(A+B) = (-A)+(-B)$

2. **Αν** $\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, **να βρεθεί ο πίνακας X**

Λόγω της ισοδυναμίας (ii) της προηγούμενης εφαρμογής έχουμε:

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ασκήσεις: 4, 5, 6

Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα

1.6 Οι τιμές με τις οποίες διαθέτει μια βιοτεχνία υποδημάτων το ζευγάρι ανδρικών, γυναικείων και παιδικών υποδημάτων στα δυο υποκαταστήματά της περιγράφονται με τον πίνακα

$$\begin{array}{rcccl} & \textit{ανδρικά} & \textit{γυναικεία} & \textit{παιδικά} & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ A= & \left[\begin{matrix} 1800 \\ 2100 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 2000 \\ 2400 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 950 \\ 1100 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \textit{1ο υποκατάστημα} \\ \textit{2ο υποκατάστημα} \end{matrix} \end{array}$$

Αν στην περίοδο των εκπτώσεων προτίθεται να κάνει γενική έκπτωση 20%, θα πρέπει να διαμορφώσει τις νέες τιμές στο 80% ή 0,8 των προηγουμένων και συνεπώς οι τιμές αυτές θα περιγράφονται με τον πίνακα

$$B=\begin{bmatrix} 0{,}8\cdot 1800 & 0{,}8\cdot 2000 & 0{,}8\cdot 950 \\ 0{,}8\cdot 2100 & 0{,}8\cdot 2400 & 0{,}8\cdot 1100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1440 & 1600 & 760 \\ 1680 & 1920 & 880 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας B λέγεται *γινόμενο* του 0,8 με τον πίνακα A. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ **_Γινόμενο_ του $\lambda \in \mathbb{R}$ με τον πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$ λέγεται ο πίνακας $B = [\beta_{ij}]$ του οποίου κάθε στοιχείο β_{ij} είναι γινόμενο του αντίστοιχου στοιχείου του A με το λ. Δηλαδή**

$$\beta_{ij} = \lambda\alpha_{ij}$$

Το παραπάνω γινόμενο αριθμού με πίνακα, που για κάθε ζεύγος (λ, A) είναι μοναδικό, συμβολίζεται $\lambda \cdot A$ ή $A \cdot \lambda$ ή απλούστερα λA ή $A\lambda$.

Π.χ. είναι

$$3\cdot\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 & 3(-5) \\ 3(-4) & 3\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -15 \\ -12 & 18 \end{bmatrix},$$

$$-7\cdot[1\ \ -2\ \ 0] = [-7\ \ 14\ \ 0],\quad \frac{10}{3}\cdot\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{50}{3} \\ -10 \end{bmatrix}$$

Έτσι ορίζεται ο **«πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα»**.

Ειδικά, αν $\lambda \in \mathbb{N}^*$, $\lambda > 1$, αποδεικνύεται εύκολα ότι:

$$\lambda A = A + A + \ldots + A \ \ (\lambda \text{ προσθετέοι})$$

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα

1.7 Θεωρούμε τους πίνακες $\nu\times\mu$ $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [\beta_{ij}]$ και τους πραγματικούς αριθμούς λ, λ΄. Ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \qquad (\lambda+\lambda')A = \lambda A + \lambda' A$$
$$\lambda(\lambda' A) = (\lambda\lambda')A \qquad 1A = A$$

Πράγματι, τα αντίστοιχα στοιχεία των πινάκων που είναι μέλη καθεμιάς από τις παραπάνω ισότητες ταυτίζονται, αφού για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$ και $j = 1, 2, \ldots, \mu$ έχουμε:

$$\lambda(\alpha_{ij}+\beta_{ij}) = \lambda\alpha_{ij} + \lambda\beta_{ij} \qquad (\lambda+\lambda')\alpha_{ij} = \lambda\alpha_{ij} + \lambda'\alpha_{ij}$$

$$\lambda(\lambda'\alpha_{ij}) = (\lambda\lambda')\alpha_{ij} \qquad 1\alpha_{ij} = \alpha_{ij}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έχουμε: $5\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -11 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & 20 \\ 55 & 10 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -11 & -2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

$$= 5\cdot\left(\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -11 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}\right) = 5\cdot O = O$$

2. Ομοίως έχουμε: $-\frac{2}{5}\begin{bmatrix}-40 & 0\\ 25 & -10\end{bmatrix} = -\frac{2}{5}\left(-5\begin{bmatrix}8 & 0\\ -5 & 2\end{bmatrix}\right)$

$$=\left(\left(-\frac{2}{5}\right)(-5)\right)\begin{bmatrix}8 & 0\\ -5 & 2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}8 & 0\\ -5 & 2\end{bmatrix}$$

3. Επίσης έχουμε: $-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-9 & 3\\ 6 & -12\end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\left(-3\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 4\end{bmatrix}\right)$

$$=\left(\left(-\frac{1}{3}\right)(-3)\right)\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 4\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

Ασκήσεις: 7, 8, 9

Πολλαπλασιασμός πινάκων

1.8 Το προσωπικό ενός εργοστασίου κατανέμεται σε τρεις κατηγορίες στις οποίες ανήκουν α, β και γ εργαζόμενοι αντιστοίχως. Αν x_1, x_2, x_3, είναι αντίστοιχα η μηνιαία αποζημίωση κάθε εργαζομένου, τότε η μηνιαία δαπάνη του εργοστασίου για μισθούς του προσωπικού θα είναι:

$$\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3$$

Αν το προσωπικό είναι κατανεμημένο σε δυο τμήματα σύμφωνα με τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{bmatrix} \begin{matrix}\textit{1ο τμήμα}\\ \textit{2ο τμήμα}\end{matrix}$$

τότε η μηνιαία δαπάνη του εργοστασίου μπορεί να αναλυθεί κατά τμήμα.

Εξάλλου έστω ότι το ημερομίσθιο κάθε εργαζομένου είναι κατά κατηγορία μ_1, μ_2, μ_3 δραχμές και η αποζημίωση για εργασία σε ημέρα αργίας ν_1, ν_2, ν_3 δραχμές αντιστοίχως. Αν σ' ένα μήνα το εργοστάσιο λειτούργησε 25 εργάσιμες ημέρες και 3 αργίες, τότε η μηνιαία αποζημίωση κατά κατηγορία είναι:

$$\begin{aligned}x_1 &= 25\mu_1+3\nu_1\\ x_2 &= 25\mu_2+3\nu_2\\ x_3 &= 25\mu_3+3\nu_3\end{aligned}$$

και καθορίζεται από τον πίνακα των ημερήσιων αποζημιώσεων:

$$B = \begin{bmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ \mu_2 & \nu_2\\ \mu_3 & \nu_3\end{bmatrix}$$

Έτσι μπορούμε να έχουμε την ημερήσια δαπάνη του εργοστασίου κατά τμήμα:
$\alpha_1\mu_1+\beta_1\mu_2+\gamma_1\mu_3$ για εργάσιμη ημέρα και $\alpha_1\nu_1+\beta_1\nu_2+\gamma_1\nu_3$ για ημέρα αργίας
$\alpha_2\mu_1+\beta_2\mu_2+\gamma_2\mu_3$ για εργάσιμη ημέρα και $\alpha_2\nu_1+\beta_2\nu_2+\gamma_2\nu_3$ για ημέρα αργίας
που περιγράφεται από τον πίνακα:

$$\Gamma = \begin{bmatrix}\alpha_1\mu_1+\beta_1\mu_2+\gamma_1\mu_3 & \alpha_1\nu_1+\beta_1\nu_2+\gamma_1\nu_3\\ \alpha_2\mu_1+\beta_2\mu_2+\gamma_2\mu_3 & \alpha_2\nu_1+\beta_2\nu_2+\gamma_2\nu_3\end{bmatrix}$$

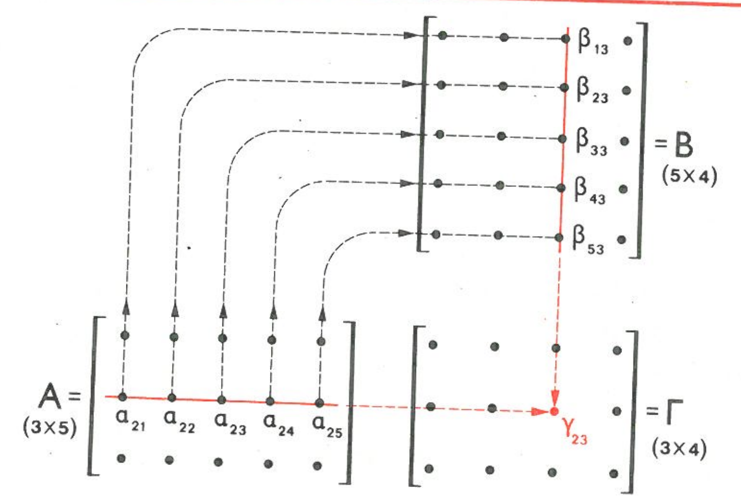
Τα στοιχεία του Γ παράγονται με πολλαπλασιασμό των 3 στοιχείων κάθε γραμμής του Α με τα αντίστοιχα 3 στοιχεία κάθε στήλης του Β.

Ο πίνακας Γ λέγεται *γινόμενο* του Α με τον Β και συμβολίζεται: **Α·Β** ή **ΑΒ**

Δηλαδή
$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ \mu_2 & \nu_2\\ \mu_3 & \nu_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1\mu_1+\beta_1\mu_2+\gamma_1\mu_3 & \alpha_1\nu_1+\beta_1\nu_2+\gamma_1\nu_3\\ \alpha_2\mu_1+\beta_2\mu_2+\gamma_2\mu_3 & \alpha_2\nu_1+\beta_2\nu_2+\gamma_2\nu_3\end{bmatrix}$$
$$[2\times \boxed{3]\ [3} \times 2] \quad = \quad [2\times 2]$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ***Γινόμενο* του πίνακα $\nu\times\mu$ $A = [\alpha_{ij}]$ με τον πίνακα $\mu\times\rho$ $B = [\beta_{jk}]$ λέγεται ο πίνακας $\nu\times\rho$ $\Gamma = [\gamma_{ik}]$ του οποίου κάθε στοιχείο γ_{ik} είναι το άθροισμα των γινομένων των μ στοιχείων της i-γραμμής του Α με τα αντίστοιχα μ στοιχεία της k-στήλης του Β. Δηλαδή**

$$\gamma_{ik} = \alpha_{i1}\beta_{1k}+\alpha_{i2}\beta_{2k}+\ldots+\alpha_{i\mu}\beta_{\mu k}$$



$$\gamma_{23} = \alpha_{21}\beta_{13}+\alpha_{22}\beta_{23}+\alpha_{23}\beta_{33}+\alpha_{24}\beta_{43}+\alpha_{25}\beta_{53}$$

Το παραπάνω γινόμενο ΑΒ είναι **μοναδικό**.

Είναι αξιοσημείωτο ότι για να υπάρχει το γινόμενο ενός πίνακα Α με τον πίνακα Β πρέπει **ο αριθμός των στηλών του Α να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του Β.** Στα επόμενα θα συμβολίζουμε Π_ν το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων $\nu\times\nu$. Είναι φανερό, ότι το γινόμενο πινάκων $\nu\times\nu$ είναι πίνακας $\nu\times\nu$. Άρα:

Στο σύνολο Π_ν ορίζεται πάντοτε «ο πολλαπλασιασμός πινάκων»

Αν $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [\beta_{jk}]$ είναι πίνακες $\nu\times\mu$ και $\mu\times\rho$ αντιστοίχως, τότε ορίζεται το γινόμενο AB. Επειδή για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$, $k = 1, 2, \ldots, \rho$ και για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι

$$\lambda\gamma_{ik} = \lambda(\alpha_{i1}\beta_{1k}+\alpha_{i2}\beta_{2k} + \ldots + \alpha_{i\mu}\beta_{\mu k}) = (\lambda\alpha_{i1})\beta_{1k} + (\lambda\alpha_{i2})\beta_{2k} + \ldots + (\lambda\alpha_{i\mu})\beta_{\mu k} = \alpha_{i1}(\lambda\beta_{1k})+\alpha_{i2}(\lambda\beta_{2k}) + \ldots + \alpha_{i\mu}(\lambda\beta_{\mu k})$$

θα έχουμε:

$$\boxed{\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $$\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\cdot 4+0\cdot 3 & -3\cdot(-2)+0\cdot 5\\ 2\cdot 4+(-1)\cdot 3 & 2\cdot(-2)+(-1)\cdot 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-12 & 6\\ 5 & -9\end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}[7\ \ 6\ \ -3\ \ 5] = \begin{bmatrix}-2\cdot 7 & -2\cdot 6 & -2\cdot(-3) & -2\cdot 5\\ 3\cdot 7 & 3\cdot 6 & 3\cdot(-3) & 3\cdot 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-14 & -12 & 6 & -10\\ 21 & 18 & -9 & 15\end{bmatrix}$$

3. $$\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 2 & 4\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\cdot(-2)+4\cdot 1 & 2\cdot 2+4(-1) & 2\cdot 4+4(-2)\\ -1(-2)+(-2)\cdot 1 & -1\cdot 2+(-2)(-1) & -1\cdot 4+(-2)(-2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

4. $$\begin{bmatrix}6 & 5 & 9\\ 3 & -1 & 2\\ -2 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-9 & 31 & 19\\ -7 & 24 & 15\\ 10 & -34 & -21\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}6(-9)+5\cdot(-7)+9\cdot 10 & 6\cdot 31+5\cdot 24+9(-34) & 6\cdot 19+5\cdot 15+9(-21)\\ 3(-9)+(-1)(-7)+2\cdot 10 & 3\cdot 31+(-1)24+2(-34) & 3\cdot 19+(-1)15+2(-21)\\ -2(-9)+4\cdot(-7)+1\cdot 10 & -2\cdot 31+4\cdot 24+1(-34) & -2\cdot 19+4\cdot 15+1(-21)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

5. $$2\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}\right) = \left(2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}6 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα παραδείγματα 3 και 5 συμπεραίνουμε ότι το γινόμενο δύο μη μηδενικών πινάκων μπορεί να είναι ο μηδενικός πίνακας.

Ασκήσεις: 10, 11

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων

1.9 Όπως στην § 1.5 εξετάσαμε τις ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων, έτσι και εδώ θα εξετάσουμε, αν ο πολλαπλασιασμός πινάκων έχει ανάλογες ιδιότητες.

• **Προσεταιριστική.** Έστω $A, B, \Gamma \in \Pi_\nu$. Αποδεικνύεται ότι:

$$\boxed{(AB)\Gamma = A(B\Gamma)} \qquad (5)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έχουμε $$\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 0 & -5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -4\\ -2 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 0 & -5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6 & 24\\ 6 & -54\end{bmatrix}$$

και $$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 0 & -5\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 12\\ 3 & -22\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6 & 24\\ 6 & -54\end{bmatrix}$$

Το $(AB)\Gamma$ λέγεται *γινόμενο* των πινάκων A, B, Γ και συμβολίζεται απλά $AB\Gamma$. Γενικότερα, αν $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \Pi_\nu$ με $k \geqslant 3$, τότε με την ισότητα

$$A_1A_2 \ldots A_k = (A_1A_2 \ldots A_{k-1})\,A_k$$

ορίζεται επαγωγικά το γινόμενό τους.

Ειδικά το γινόμενο ίσων πινάκων γράφεται ως δύναμη:

$$AA\ldots A = A^k \text{ (Για } k = 1 \text{ ορίζουμε } A^1 = A.)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν A, B, Γ είναι πίνακες $\nu\times\mu$, $\mu\times\rho$ και $\rho\times k$ αντιστοίχως, το γινόμενο AB είναι πίνακας $\nu\times\rho$ και το $(AB)\Gamma$ $\nu\times k$. Εξάλλου το $B\Gamma$ είναι πίνακας $\mu\times k$ και το $A(B\Gamma)$ $\nu\times k$. Τότε αποδεικνύεται γενικότερα, ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι προσεταιριστική πράξη,

δηλαδή $$(AB)\Gamma = A(B\Gamma) \qquad (5΄)$$

• **Αντιμεταθετική.** Με τους πίνακες $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ βρίσκουμε ότι

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -4\\ -2 & 10\end{bmatrix}, \text{ ενώ } \begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -6\\ 2 & 12\end{bmatrix}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\\ 4 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & -3\\ 2 & 18\end{bmatrix}, \text{ ενώ } \begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\\ 4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 5 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 15 & 8\\ -2 & 0 & 2\\ 4 & 30 & 14\end{bmatrix}$$

Από τα προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ότι:

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι πράξη αντιμεταθετική.

• **Ουδέτερο στοιχείο.** Ο τετραγωνικός πίνακας $I_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ έχει, για κάθε πίνακα

$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, την ιδιότητα

$$AI_2 = I_2A = A$$

Πράγματι, είναι $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 & \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 \\ \gamma \cdot 1 + \delta \cdot 0 & \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

και $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

Γενικά, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ορίζεται ο διαγώνιος πίνακας $\nu \times \nu$

$$I_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{με } \alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Τότε, αποδεικνύεται ότι για κάθε **τετραγωνικό** πίνακα $\nu \times \nu$ A, είναι

$$\boxed{A \cdot I_\nu = I_\nu \cdot A = A} \qquad (6)$$

Άλλος πίνακας $\nu \times \nu$ I', που για κάθε πίνακα $\nu \times \nu$ A επαληθεύει την (6) δεν υπάρχει, γιατί:

$$I'I_\nu = I' \qquad \text{[ιδιότητα (6) για τον πίνακα } I_\nu]$$
$$I'I_\nu = I_\nu \qquad \text{[ιδιότητα (6) για τον πίνακα } I']$$

και συνεπώς $I' = I_\nu$.

Ο μοναδικός πίνακας $\nu \times \nu$ I_ν λέγεται **μοναδιαίος** και χαρακτηρίζεται ως *«ουδέτερο στοιχείο»* του πολλαπλασιασμού στο Π_ν. Όταν υπονοείται το ν, γράφουμε απλούστερα I.

Σημείωση

Γενικότερα, αν ο A είναι πίνακας $\nu \times \mu$ έχουμε $I_\nu \cdot A = A$, ενώ αν ο A είναι πίνακας $\mu \times \nu$ έχουμε $A \cdot I_\nu = A$.

Ασκήσεις: 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21

Αντιστρέψιμοι πίνακες

1.10 Έστω οι **τετραγωνικοί** πίνακες 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 9 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A' = \begin{bmatrix} -9 & 31 & 19 \\ -7 & 24 & 15 \\ 10 & -34 & -21 \end{bmatrix}$$

Στο παράδειγμα 4 της § 1.8 είδαμε ότι $AA' = I$. Διαπιστώνουμε ακόμη ότι είναι και $A'A = I$. Δηλαδή έχουμε

$$AA' = A'A = I$$

Γενικότερα, για $A \in \Pi_\nu$ είναι δυνατό να υπάρχει $A' \in \Pi_\nu$, ώστε:

$$AA' = A'A = I_\nu \qquad (7)$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι, αν υπάρχει ο A' (όπως στην περίπτωση του αρχικού μας παραδείγματος), τότε είναι **μοναδικός**.

Πράγματι, αν υπήρχε και ο $A'' \in \Pi_\nu$, ώστε $AA'' = A''A = I_\nu$, θα είχαμε

$$\begin{aligned} A'' &= A''I_\nu && [\text{ο } I_\nu \text{ μοναδιαίος}] \\ &= A''(AA') && [\text{λόγω της (7)}] \\ &= (A''A)A' && [\text{προσεταιριστικότητα}] \\ &= I_\nu A' && [\text{λόγω της } A''A = I_\nu] \\ &= A' && [\text{ο } I_\nu \text{ μοναδιαίος}] \end{aligned}$$

Ο μοναδικός πίνακας $A' \in \Pi_\nu$ (όταν υπάρχει) που επαληθεύει την (7) λέγεται **αντίστροφος** του A και συμβολίζεται A^{-1}. Έτσι **όταν** υπάρχει ο αντίστροφος του $A \in \Pi_\nu$ μπορούμε να γράφουμε

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I_\nu} \qquad (8)$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας που έχει αντίστροφο λέγεται **αντιστρέψιμος.**

Εξάλλου υπάρχουν μη αντιστρέψιμοι πίνακες, όπως π.χ. ο $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

Πράγματι, αν υπήρχε πίνακας $B' = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$, ώστε $BB' = B'B = I$, θα είχαμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+3z & y+3\omega \\ 2x+6z & 2y+6\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

απ' όπου προκύπτει το σύστημα $\begin{cases} x+3z = 1 \\ 2x+6z = 0 \end{cases}$, το οποίο είναι αδύνατο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από την (8) προκύπτει ότι ο μοναδικός αντίστροφος του A^{-1} υπάρχει και είναι ο A. Δηλαδή

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Γι' αυτό οι πίνακες A και A^{-1} λέγονται απλά **αντίστροφοι.**

Επιμεριστικότητα

1.11 Είδαμε ότι στο σύνολο Π_ν των πινάκων $\nu\times\nu$ ορίζεται το άθροισμα και το γινόμενο πινάκων. Έτσι, αν $A, B, \Gamma \in \Pi_\nu$, τότε οι πίνακες $A(B+\Gamma)$, AB και $A\Gamma$, καθώς και οι $(B+\Gamma)A$, BA και ΓA είναι πίνακες $\nu\times\nu$. Αποδεικνύεται ότι:

$$\boxed{A(B+\Gamma) = AB+A\Gamma \quad \text{και} \quad (B+\Gamma)A = BA+\Gamma A} \tag{9}$$

Οι ισότητες (9) που εκφράζουν ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι πράξη **επιμεριστική** ως προς την πρόσθεση, επαληθεύονται με τα επόμενα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Είναι $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$ και

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -24 \\ -17 & 20 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -15 & 21 \\ 9 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Ομοίως είναι

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Σημείωση

Αποδεικνύεται ότι η πρώτη από τις ισότητες (9) ισχύει και όταν ο A είναι πίνακας $\nu\times\mu$ και οι B, Γ πίνακες $\mu\times\rho$, οπότε οι πίνακες $A(B+\Gamma)$, AB και $A\Gamma$ είναι πίνακες $\nu\times\rho$.
Ομοίως αποδεικνύεται ότι η δεύτερη ισχύει και όταν οι B, Γ είναι πίνακες $\mu\times\rho$ και ο A πίνακας $\rho\times k$. Τότε οι πίνακες $(B+\Gamma)A$, BA και ΓA είναι πίνακες $\mu\times k$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Αν A, B είναι πίνακες $\nu\times\mu$ και $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$, να δειχτεί ότι:**
   (i) $\lambda A = \mathbf{O} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $A = \mathbf{O}$
   (ii) $(-\lambda)A = \lambda(-A) = -(\lambda A)$
   (iii) Αν $A \neq \mathbf{O}$, τότε: $\lambda A = \kappa A \Rightarrow \lambda = \kappa$ *(Νόμοι διαγραφής)*
   (iv) Αν $\lambda \neq 0$, τότε: $\lambda A = \lambda B \Rightarrow A = B$

   (i) Έστω $\lambda A = \mathbf{O}$. Τότε δεν μπορεί να είναι και $\lambda \neq 0$ και $A \neq \mathbf{O}$.
   Πράγματι, στην περίπτωση αυτή θα υπήρχε στοιχείο α_{ij} του A διαφορετικό από το μηδέν, οπότε θα ήταν και $\lambda\alpha_{ij} \neq 0$. Άρα $\lambda A \neq \mathbf{O}$ (άτοπο).

Αντιστρόφως, αν $\lambda = 0$ ή $A = \mathbf{O}$, από τον ορισμό του γινομένου αριθμού με πίνακα προκύπτει ότι είναι $\lambda A = \mathbf{O}$.

(ii) Τα αντίστοιχα στοιχεία των πινάκων $(-\lambda)A$, $\lambda(-A)$ και $-(\lambda A)$ ταυτίζονται, γιατί για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$ και $j = 1, 2, \ldots, \mu$ είναι $(-\lambda)\alpha_{ij} = \lambda(-\alpha_{ij}) = -(\lambda\alpha_{ij})$

(iii) Αν $\lambda A = \kappa A$, τότε $(\lambda-\kappa)A = \mathbf{O}$ και επειδή $A \neq \mathbf{O}$ θα είναι, σύμφωνα με την (i), $\lambda-\kappa = 0$, δηλαδή $\lambda = \kappa$.

(iv) Επειδή $\lambda A = \lambda B$, είναι $\lambda(A-B) = \mathbf{O}$. Άρα, σύμφωνα με την (i), αφού $\lambda \neq 0$ θα είναι $A-B = \mathbf{O}$, δηλαδή $A = B$.

2. **Αν A, B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες $\nu\times\nu$, να δειχτεί ότι ο AB είναι αντιστρέψιμος και ότι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.**

   Έχουμε: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A[B(B^{-1}A^{-1})] = A[(BB^{-1})A^{-1}] = A(IA^{-1}) = AA^{-1} = I$. Ομοίως βρίσκουμε ότι $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. Συνεπώς υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα $\nu\times\nu$ AB και είναι ο $B^{-1}A^{-1}$.

3. **Αν $A, B, \Gamma \in \Pi_\nu$ και ο πίνακας Γ είναι αντιστρέψιμος, να δειχτεί ότι:**

   $$\text{(i) } A\Gamma = B\Gamma \Rightarrow A = B \quad \text{και} \quad \text{(ii) } \Gamma A = \Gamma B \Rightarrow A = B$$

   Αφού ο Γ είναι αντιστρέψιμος, θα υπάρχει ο $\Gamma^{-1} \in \Pi_\nu$. Έτσι θα έχουμε
   (i) $A\Gamma = B\Gamma \Rightarrow (A\Gamma)\Gamma^{-1} = (B\Gamma)\Gamma^{-1} \Rightarrow A(\Gamma\cdot\Gamma^{-1}) = B(\Gamma\Gamma^{-1}) \Rightarrow A\cdot I = B\cdot I \Rightarrow A = B$
   (ii) $\Gamma A = \Gamma B \Rightarrow \Gamma^{-1}(\Gamma A) = \Gamma^{-1}(\Gamma B) \Rightarrow (\Gamma^{-1}\Gamma)A = (\Gamma^{-1}\Gamma)B \Rightarrow IA = IB \Rightarrow A = B$

4. **Να δειχτεί ότι:**

   (i) $$\begin{bmatrix} \text{συν}\alpha & \text{ημ}\alpha \\ \text{ημ}\alpha & -\text{συν}\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{συν}\beta & \text{ημ}\beta \\ \text{ημ}\beta & -\text{συν}\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{συν}(\alpha-\beta) & -\text{ημ}(\alpha-\beta) \\ \text{ημ}(\alpha-\beta) & \text{συν}(\alpha-\beta) \end{bmatrix}$$

   (ii) $$\begin{bmatrix} \text{συν}\theta & \text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & -\text{συν}\theta \end{bmatrix}^2 = I$$

   (iii) $$\begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \text{συν}2\theta & -\text{ημ}2\theta \\ \text{ημ}2\theta & \text{συν}2\theta \end{bmatrix}$$

   (i) Έχουμε

   $$\begin{bmatrix} \text{συν}\alpha & \text{ημ}\alpha \\ \text{ημ}\alpha & -\text{συν}\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{συν}\beta & \text{ημ}\beta \\ \text{ημ}\beta & -\text{συν}\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{συν}\alpha\text{συν}\beta+\text{ημ}\alpha\text{ημ}\beta & \text{συν}\alpha\text{ημ}\beta-\text{ημ}\alpha\text{συν}\beta \\ \text{ημ}\alpha\text{συν}\beta-\text{συν}\alpha\text{ημ}\beta & \text{ημ}\alpha\text{ημ}\beta+\text{συν}\alpha\text{συν}\beta \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} \text{συν}(\alpha-\beta) & -\text{ημ}(\alpha-\beta) \\ \text{ημ}(\alpha-\beta) & \text{συν}(\alpha-\beta) \end{bmatrix}$$

   (ii) Προκύπτει από την (i) για $\alpha = \beta$.

   iii) Έχουμε

   $$\begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} \text{συν}^2\theta-\text{ημ}^2\theta & -2\text{ημ}\theta\text{συν}\theta \\ 2\text{ημ}\theta\text{συν}\theta & \text{συν}^2\theta-\text{ημ}^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{συν}2\theta & -\text{ημ}2\theta \\ \text{ημ}2\theta & \text{συν}2\theta \end{bmatrix}$$

Ασκήσεις: 22, 23, 24, 25, 26

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η γραμμική εξίσωση αx=β

1.12 Έστω η **γραμμική συνάρτηση** $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x$. Όταν δοθεί η τιμή της στο x, π.χ. $f(x) = \beta$, μπορούμε να βρούμε το x αν λύσουμε την εξίσωση

$$\alpha x = \beta \tag{1}$$

Η (1) λέγεται **γραμμική εξίσωση** με έναν άγνωστο και είναι γνωστό ότι, αν:

$\alpha \neq 0$, έχει τη μοναδική λύση $x = \dfrac{\beta}{\alpha}$

$\alpha = 0$ και $\begin{cases} \beta \neq 0 \text{ είναι αδύνατη} \\ \beta = 0 \text{ είναι αόριστη} \end{cases}$

Η έννοια του γραμμικού συστήματος

1.13 Γενικά κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_\mu x_\mu = \beta \tag{2}$$

λέγεται **γραμμική εξίσωση** με μ αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$.

Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων λέγεται **γραμμικό.** Ένα τέτοιο σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους έχει ν εξισώσεις της μορφής (2). Η θέση κάθε εξίσωσης στο σύστημα προσδιορίζεται με ένα πρόσθετο δείκτη 1, 2, 3, ..., ν στους συντελεστές της.

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1\mu}x_\mu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2\mu}x_\mu = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{\nu 1}x_1 + \alpha_{\nu 2}x_2 + \ldots + \alpha_{\nu\mu}x_\mu = \beta_\nu \end{cases} \tag{3}$$

Το σύστημα αυτό μπορεί και πάλι να πάρει τη μορφή (1). Πράγματι, επειδή το πρώτο μέλος κάθε εξίσωσης είναι γινόμενο του πίνακα-γραμμή των συντελεστών της με τον πίνακα-στήλη των αγνώστων, το σύστημα (3) γράφεται ως **εξίσωση πινάκων:**

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \ldots & \alpha_{\nu\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}$$

Αν λοιπόν είναι A ο πίνακας ν×μ των συντελεστών των αγνώστων, X ο πίνακας-στήλη των μ αγνώστων και B ο πίνακας-στήλη των ν σταθερών όρων, το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$AX = B$$

Έτσι π.χ. το σύστημα: $\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - 2z = 8 \\ 3x - 8y + 3z = -8 \end{cases}$ γράφεται $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας A των συντελεστών των αγνώστων ενός γραμμικού συστήματος λέγεται **πίνακας του συστήματος,** ενώ ο πίνακας ν×(μ+1)

$$\left[\begin{array}{cccc:c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\mu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\mu} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \ldots & \alpha_{\nu\mu} & \beta_\nu \end{array}\right]$$

λέγεται **επαυξημένος πίνακας του συστήματος.** Ένα γραμμικό συστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους θα αναφέρεται ως **σύστημα ν×μ.**

Αν οι σταθεροί όροι όλων των εξισώσεων ενός γραμμικού συστήματος είναι μηδέν ($\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_\nu = 0$), το σύστημα λέγεται **ομογενές.**

Σύνολο λύσεων συστήματος

1.14 **Λύση** ενός γραμμικού συστήματος ν×μ είναι κάθε μ-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)$ που επαληθεύει το σύστημα.

Έστω S το σύνολο λύσεων ενός συστήματος. Τότε:

- αν $S = \varnothing$ το σύστημα λέγεται **αδύνατο**
- αν $S \neq \varnothing$ υπάρχει τουλάχιστο μια λύση και το σύστημα λέγεται **συμβιβαστό.**

Δυο συστήματα με κοινό σύνολο λύσεων λέγονται **ισοδύναμα.**

Ειδικές περιπτώσεις:

I. Το ομογενές σύστημα έχει πάντοτε τη *μηδενική λύση (0, 0, ..., 0)* και συνεπώς είναι πάντοτε *συμβιβαστό.*

II. Αν όλοι οι συντελεστές ενός αγνώστου είναι μηδέν ο άγνωστος αυτός παραλείπεται χωρίς να επηρεάζεται η επίλυση του συστήματος(1).

(1) Με την παράλειψη ενός αγνώστου προκύπτει σύστημα (μ' έναν άγνωστο λιγότερο) από τις λύσεις του οποίου προκύπτουν οι λύσεις του αρχικού συστήματος. Π.χ. λύση του συστήματος $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$ είναι το ζεύγος (1, 2), ενώ λύση του $\begin{cases} 2x + 3y + 0z = 8 \\ x - 2y + 0z = -3 \end{cases}$ είναι κάθε τριάδα (1, 2, λ), $\lambda \in \mathbb{R}$

III. Αν οι συντελεστές όλων των αγνώστων μιας εξίσωσης είναι μηδέν, τότε:

(i) αν ο σταθερός όρος της εξίσωσης αυτής δεν είναι μηδέν, η εξίσωση είναι αδύνατη, συνεπώς και το σύστημα θα είναι αδύνατο.

(ii) αν και ο σταθερός όρος της εξίσωσης αυτής είναι μηδέν, η εξίσωση θα αληθεύει για οποιεσδήποτε τιμές των αγνώστων και συνεπώς μπορεί να παραλειφθεί χωρίς να επηρεάζεται η επίλυση του συστήματος.

Μέθοδος διαδοχικών απαλοιφών

1.15 Είναι γνωστό ότι η επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων γίνεται με κατάλληλη μετατροπή του σε άλλα ισοδύναμα συστήματα και τελικά σε σύστημα εξισώσεων με προφανείς λύσεις. Αυτή η μετατροπή γίνεται κυρίως[1] αν αντικαταστήσουμε μια εξίσωση (ε) του συστήματος

- *με την $\lambda(\varepsilon)$, που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη της (ε) επί $\lambda \in \mathbb{R}^*$*
- *με την «$(\varepsilon) + (\varepsilon')$», που προκύπτει αν προσθέσουμε στα μέλη της (ε) τα αντίστοιχα μέλη μιας άλλης εξίσωσης (ε΄) του συστήματος*
- *γενικότερα με έναν οποιονδήποτε **«γραμμικό συνδυασμό»** «$\lambda(\varepsilon) + \lambda'(\varepsilon')$», $\lambda \neq 0$, των (ε) και (ε΄).*

Με επιλογή κατάλληλου γραμμικού συνδυασμού αποβλέπουμε κάθε φορά στην απαλοιφή ενός αγνώστου. Ειδικότερα, αν σε μια εξίσωση (ε) του συστήματος π.χ. ο άγνωστος x έχει συντελεστή 1, μπορούμε να τον απαλείψουμε από κάθε άλλη εξίσωση (ε΄) αν αντικαταστήσουμε την (ε΄) με την «$(-\lambda)(\varepsilon) + (\varepsilon')$», όπου λ ο συντελεστής του x στην (ε΄).

Ας πάρουμε π.χ. το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{cases} (\varepsilon_1): & 2x - 3y + z = -1 \\ (\varepsilon_2): & x + 2y - 2z = 8 \\ (\varepsilon_3): & 3x - 8y + 3z = -8 \end{cases} \qquad (4)$$

Η επίλυση του συστήματος επιτυγχάνεται με τα ακόλουθα βήματα:

- Απαλείφουμε τον άγνωστο x από δυο εξισώσεις, π.χ. τις (ε_1) και (ε_3), του συστήματος, που σημαίνει ότι τις αντικαθιστούμε με άλλες που δεν έχουν το x.

(1) Βλέπε Μαθηματικά Α΄ Λυκείου.

Αρκεί στη θέση της (ε_1) να θέσουμε την «$(\varepsilon_1) + (-2)(\varepsilon_2)$» που γράφεται:

$$(2-2)x + (-3-4)y + (1+4)z = -1-16 \quad \text{ή}$$
$$(\varepsilon_1'): -7y + 5z = -17$$

Ομοίως στη θέση της (ε_3) θέτουμε την «$(-3)(\varepsilon_2) + (\varepsilon_3)$» που γράφεται:

$$(3-3)x + (-6-8)y + (6+3)z = -24-8 \quad \text{ή}$$
$$(\varepsilon_3'): -14y + 9z = -32$$

Έτσι το σύστημα (4) με εναλλαγή των δυο πρώτων εξισώσεών του είναι ισοδύναμο με το:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 8 \\ \quad - 7y + 5z = -17 \\ \quad - 14y + 9z = -32 \end{cases} \qquad (5)$$

- Απαλείφουμε τον y από την (ε_3') αντικαθιστώντας την με «$(-2)(\varepsilon_1') + (\varepsilon_3')$», δηλαδή με την $(14-14)y + (-10+9)z = 34 - 32$ ή $-z = 2$ ή τελικά

$$z = -2$$

Έτσι το σύστημα (4) είναι ισοδύναμο με το:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 8 \\ \quad -7y + 5z = -17 \\ \qquad\quad z = -2 \end{cases} \qquad (6)$$

του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι κλιμακωτός κάτω (§ 1.3). Με αντικατάσταση της τιμής του z στη δεύτερη εξίσωση του (6) και στη συνέχεια με αντικατάσταση των y και z στην πρώτη, έχουμε τη λύση του συστήματος $(x, y, z) = (2, 1, -2)$. Στην ουσία αυτές οι αντικαταστάσεις σημαίνουν:

- απαλοιφή του z από τις δυο πρώτες εξισώσεις του (6) και στη συνέχεια
- απαλοιφή του y από την πρώτη εξίσωση του (6)

που οδηγούν στο ισοδύναμο με το (4) σύστημα

$$\begin{cases} x \qquad\quad = 2 \\ \quad y \qquad = 1 \\ \qquad z = -2 \end{cases}$$

του οποίου ο πίνακας των συντελεστών είναι ο μοναδιαίος 3×3.

Γενικά η ίδια μέθοδος εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε σύστημα $\nu \times \mu$. Οι διαδοχικές απαλοιφές γίνονται με γνώμονα τη μετατροπή του πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτό και τελικά σε μοναδιαίο. Την όλη διαδικασία, που είναι προσαρμοσμένη σε πρόγραμμα υπολογιστή, διευκολύνει η κατάλληλη αντιμετάθεση εξισώσεων ή και αγνώστων που έχουν συντελεστή 1 ή 0.

Λύση συστήματος με επαυξημένο πίνακα

1.16 Παρακολουθώντας **βήμα-βήμα** τη διαδικασία που ακολουθήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο για την επίλυση του συστήματος (4), ας εντοπίσουμε τα ισοδύναμα συστήματα, στα οποία μετατρέπεται το σύστημα (4). Έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-3y+z=-1 \\ x+2y-2z=8 \\ 3x-8y+3z=-8 \end{array}\right. \; -2 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} -7y+5z=-17 \\ x+2y-2z=8 \\ 3x-8y+3z=-8 \end{array}\right. \; -3 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} -7y+5z=-17 \\ x+2y-2z=8 \\ -14y+9z=-32 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x+2y-2z=8 \\ -7y+5z=-17 \\ -14y+9z=-32 \end{array}\right. \; -2 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x+2y-2z=8 \\ -7y+5z=-17 \\ -z=2 \;\cdot(-1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x+2y-2z=8 \\ -7y+5z=-17 \\ z=-2 \end{array}\right. \; -5 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x+2y-2z=8 \\ -7y=-7 :(-7) \\ z=-2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x+2y-2z=8 \\ y=1 \\ z=-2 \end{array}\right. \; 2 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x+2y=4 \\ y=1 \\ z=-2 \end{array}\right. \; -2$$

$$\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \\ z=-2 \end{array}\right.$$

Η παραπάνω διαδικασία επίλυσης του συστήματος συνεπάγεται αντίστοιχες μετατροπές του επαυξημένου πίνακά του σε «ισοδύναμους» πίνακες.(1) Έτσι η επίλυση του συστήματος μπορεί να γίνει ως εξής:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 8 \\ 3 & -8 & 3 & -8 \end{array}\right] -2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & 5 & -17 \\ 1 & 2 & -2 & 8 \\ 3 & -8 & 3 & -8 \end{array}\right] -3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & 5 & -17 \\ 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -14 & 9 & -32 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & 5 & -17 \\ 0 & -14 & 9 & -32 \end{array}\right] -2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \cdot(-1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] -5 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] :(-7)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] 2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] -2$$

(1) Δηλαδή πίνακες που αντιστοιχούν σε ισοδύναμα συστήματα.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν κατά την εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας παρουσιαστεί μια γραμμή της μορφής

$$0 \;\; 0 \ldots 0 \;\vdots\; \alpha$$

τότε (§ 1.12) αν:

- $\alpha \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο
- $\alpha = 0$ η αντίστοιχη εξίσωση του συστήματος παραλείπεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω το σύστημα: $\left\{\begin{array}{l} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-z=5 \\ 5x+4y+3z=-1 \\ x+4y+6z=0 \end{array}\right.$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των διαδοχικών απαλοιφών στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος καί έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right] -3,\ -5,\ -1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & -6 & -7 & -11 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right] 3,\ -4,\ -4 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 41 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \end{array}\right] :9$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 41 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] -7 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Από την τρίτη γραμμή του τελευταίου πίνακα προκύπτει, σύμφωνα με την παρατήρηση, ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

2. Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της § 1.16 στο σύστημα: $\left\{\begin{array}{l} 2x - z - 4\omega + 5\varphi = 4 \\ -2x + 5z - 12\omega - 17\varphi = -4 \\ 2y - 2\omega - \varphi = 2 \end{array}\right.$

Έχουμε

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -1 & -4 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & -12 & -17 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -1 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 5 & -12 & -17 & -4 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -1 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -12 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \\ :4 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -1 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & -8 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} :2 \\ :2 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Έτσι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το
$$\begin{cases} x - 4\omega + \varphi = 2 \\ y - \omega - \frac{1}{2}\varphi = 1 \\ z - 4\omega - 3\varphi = 0 \end{cases}$$

που γράφεται
$$\begin{cases} x = 4\omega - \varphi + 2 \\ y = \omega + \frac{\varphi}{2} + 1 \\ z = 4\omega + 3\varphi \end{cases}$$
και έχει άπειρες λύσεις οι οποίες προκύπτουν, αν οι άγνωστοι ω και φ πάρουν αυθαίρετες τιμές.

Σημείωση

Οι άγνωστοι ω, φ που παίρνουν αυθαίρετες τιμές λέγονται ελεύθεροι άγνωστοι, ενώ οι x, y, z που οι τιμές τους εξαρτώνται από τις τιμές των ω και φ λέγονται κύριοι άγνωστοι.

Ασκήσεις: *27, 28, 29, 30*

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Ορίζουσα 2ης τάξης

1.17 **Έστω το σύστημα** $\begin{cases} \alpha_1 x = \beta_1 \\ \alpha_2 x = \beta_2 \end{cases}$ **(1)**

με επαυξημένο πίνακα $M = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$

Ένα τέτοιο σύστημα δεν είναι γενικά συμβιβαστό, γιατί η ρίζα της πρώτης εξίσωσης δεν επαληθεύει κατ' ανάγκη τη δεύτερη εξίσωση.

Θα ζητήσουμε μια αναγκαία συνθήκη για να είναι το σύστημα (1) συμβιβαστό. Έστω ότι υπάρχει λύση $x = x_0$ του συστήματος. Τότε, αν:

- **$|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$**, π.χ. $\alpha_1 \neq 0$, θα είναι $x_0 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ και επειδή $\alpha_2 x_0 = \beta_2$, θα έχουμε $\alpha_2 \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \beta_2$, δηλαδή
$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$$
Στην ίδια συνθήκη καταλήγουμε, αν υποθέσουμε $\alpha_2 \neq 0$.
- **$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$**, τότε η προηγούμενη συνθήκη ισχύει.

Ώστε: **Αν το σύστημα (1) είναι συμβιβαστό τότε**
$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0 \qquad (2)$$

Ο αριθμός **$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$** που αντιστοιχεί στον **τετραγωνικό** πίνακα M, παριστάνεται σχηματικά $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ και τότε λέγεται **ορίζουσα του πίνακα M.** Συνήθως γράφεται **D (M)** ή απλά **D**. Επειδή αντιστοιχεί σε πίνακα 2×2 είναι μια **ορίζουσα 2ης τάξης.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί το σύστημα (1)

Αν **$D \neq 0$**, το σύστημα (1), όπως προκύπτει από το προηγούμενο συμπέρασμα, είναι **αδύνατο.**
Αν **$D = 0$**, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- **$|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$**, π.χ. $\alpha_1 \neq 0$. Τότε η πρώτη εξίσωση του (1) έχει τη **μοναδική λύση** $x = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$, η οποία λόγω της $D = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$, επαληθεύει και τη δεύτερη εξίσωση.
- **$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$**. Τότε (§ 1.12), αν
  1. **$\beta_1 \neq 0$** ή **$\beta_2 \neq 0$**, το σύστημα δεν έχει λύση (αδύνατο).
  2. **$\beta_1 = \beta_2 = 0$**, το σύστημα αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (αόριστο).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Από την επίλυση του συστήματος προκύπτει, ότι μόνη η συνθήκη $D = 0$ **δεν είναι ικανή** για να είναι το σύστημα (1) **συμβιβαστό.**
2. Το σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $D = 0$ και $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$.

Αντίστροφος ενός πίνακα 2×2

1.18 Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$. Θα αναζητήσουμε, αν υπάρχει, τον αντίστροφό του πίνακα A^{-1}. *Έστω ότι υπάρχει* πίνακας $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$ τέτοιος ώστε
$$AX = I$$
Τότε:
$$AX = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta\omega \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha x + \beta z = 1 \\ \gamma x + \delta z = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} \alpha y + \beta \omega = 0 \\ \gamma y + \delta \omega = 1 \end{cases} \quad (4)$$

Από τη δεύτερη εξίσωση του (4) αποκλείεται $\gamma = \delta = 0$. Υποθέτουμε ότι είναι π.χ. $\gamma \neq 0$, οπότε από τη $\gamma x + \delta z = 0$ βρίσκουμε

$$x = -\frac{\delta}{\gamma} z \qquad (5)$$

και η $\alpha x + \beta z = 1$ γίνεται $\left(-\frac{\alpha\delta}{\gamma} + \beta \right) z = 1$ ή ισοδύναμα $(\alpha\delta - \beta\gamma) z = -\gamma$.

Έστω D η ορίζουσα του πίνακα A. Τότε η $(\alpha\delta - \beta\gamma) z = -\gamma$ γράφεται

$$Dz = -\gamma \qquad (6)$$

οπότε, επειδή $\gamma \neq 0$, **θα είναι κατ' ανάγκη $D \neq 0$.**

Από τις (6) και (5) βρίσκουμε

$$z = \frac{-\gamma}{D}, \qquad x = \frac{\delta}{D}$$

Ομοίως από το σύστημα (4) βρίσκουμε:

$$y = \frac{-\beta}{D}, \qquad \omega = \frac{\alpha}{D}$$

Άρα είναι

$$X = \begin{bmatrix} \delta/D & -\beta/D \\ -\gamma/D & \alpha/D \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Ο πίνακας X ορίστηκε από την $AX = I$ αλλά επαληθεύει και την $XA = I$, γιατί

$$XA = \left(\frac{1}{D} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \left(\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Συνεπώς είναι $X = A^{-1}$.

Αντιστρόφως, αν η ορίζουσα του πίνακα A είναι $D \neq 0$, ορίζεται από την (7) ο πίνακας X για τον οποίο είναι $AX = XA = I$. Άρα $X = A^{-1}$.

Έχουμε λοιπόν το συμπέρασμα

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν η ορίζουσά του D δεν είναι 0.

Αντίστροφος του A είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ο αντίστροφος του $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ υπάρχει, γιατί $D = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, και είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος, γιατί $D = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Λύση συστήματος με τον αντίστροφο πίνακα

1.19 Έστω π.χ. το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$

το οποίο, αν θέσουμε

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

γράφεται

$$AX = B \qquad (8)$$

Αν ο **πίνακας A** του συστήματος (8) **είναι αντιστρέψιμος**, τότε πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της (8) από αριστερά με A^{-1} έχουμε:

$$\begin{aligned} & A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\ \Leftrightarrow \quad & (A^{-1}A)X = A^{-1}B \qquad \text{[προσεταιριστικότητα]} \\ \Leftrightarrow \quad & IX = A^{-1}B \\ \Leftrightarrow \quad & X = A^{-1}B \qquad \text{[I μοναδιαίος πίνακας]} \end{aligned}$$

Ο πίνακας λοιπόν $A^{-1}B$ είναι **η λύση** του συστήματος (8), γιατί το επαληθεύει. Πράγματι:

$$A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B$$

Ώστε: **Αν ο πίνακας A ενός συστήματος $AX = B$ είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση**

$$X = A^{-1}B$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η μέθοδος που ακολουθήσαμε παραπάνω για τη λύση του συστήματος

(8) εφαρμόζεται γενικότερα σε συστήματα $\nu \times \nu$, αρκεί ο πίνακας Α του συστήματος να είναι αντιστρέψιμος.

Εφαρμογή: Σύστημα 2×2

1.20 Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases} \qquad (9)$$

Αν D είναι η ορίζουσα του συστήματος αυτού, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- **$D \neq 0$.** Τότε, όπως είδαμε στην §1.18, ο πίνακας του συστήματος έχει αντίστροφο τον $\frac{1}{D}\begin{bmatrix}\beta_2 & -\beta_1\\ -\alpha_2 & \alpha_1\end{bmatrix}$ και συνεπώς, σύμφωνα με το συμπέρασμα της §1.19, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \left(\frac{1}{D}\begin{bmatrix}\beta_2 & -\beta_1\\ -\alpha_2 & \alpha_1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix} = \frac{1}{D}\left(\begin{bmatrix}\beta_2 & -\beta_1\\ -\alpha_2 & \alpha_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{D}\begin{bmatrix}\gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1\\ \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1\end{bmatrix}$$

Αν θέσουμε $D_x = \gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1 = \begin{vmatrix}\gamma_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \beta_2\end{vmatrix}$, $D_y = \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{vmatrix}$

έχουμε ως μοναδική λύση του συστήματος την

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}}$$

- **$D = 0$.** Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

1. **$D_x \neq 0$.** Τότε αποκλείεται να είναι $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Υποθέτουμε $\beta_1 \neq 0$ και θέτουμε $\frac{\beta_2}{\beta_1} = \lambda$, οπότε $\beta_2 = \lambda\beta_1$. Επειδή $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$, θα είναι και $\alpha_2 = \lambda\alpha_1$, ενώ από την $D_x = \gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1 \neq 0$, είναι $\gamma_2 \neq \lambda\gamma_1$. Έτσι, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος γράφεται ισοδύναμα (§ 1.16)

$$\left[\begin{array}{cc|c}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \lambda\alpha_1 & \lambda\beta_1 & \gamma_2\end{array}\right]{\scriptstyle -\lambda} \sim \left[\begin{array}{cc|c}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ 0 & 0 & \gamma_2 - \lambda\gamma_1\end{array}\right]$$

και επειδή $\gamma_2 - \lambda\gamma_1 \neq 0$, το σύστημα είναι **αδύνατο.**

2. **$D_y \neq 0$.** Ομοίως καταλήγουμε ότι το σύστημα είναι επίσης **αδύνατο.**

3. **$D_x = D_y = 0$.** Τότε:

(i) Αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, το σύστημα είναι αόριστο, δηλ. έχει άπειρες λύσεις, (αν $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$) ή αδύνατο (αν $\gamma_1 \neq 0$ ή $\gamma_2 \neq 0$).

(ii) Αν υπάρχει συντελεστής μη μηδενικός, π.χ. $\alpha_1 \neq 0$, τότε, όπως στην περίπτωση 1, βρίσκουμε $\alpha_2 = \lambda\alpha_1$, $\beta_2 = \lambda\beta_1$, $\gamma_2 = \lambda\gamma_1$. Συνεπώς το σύστημα είναι ισοδύναμο με την

εξίσωση $\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1$ και έχει άπειρες λύσεις με ελεύθερο τον άγνωστο y. Οι λύσεις αυτές είναι

$$\left(\frac{\gamma_1 - \beta_1 y}{\alpha_1}, y\right)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω το σύστημα: $\begin{cases} 3x+5y = 12 \\ x-3y = 4 \end{cases}$

Επειδή $D = \begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & -3\end{vmatrix} = -14 \neq 0$, $D_x = \begin{vmatrix}12 & 5\\ 4 & -3\end{vmatrix} = -56$, $D_y = \begin{vmatrix}3 & 12\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 0$ το σύστημα

έχει τη λύση $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-56/-14\\ 0/-14\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix}$

2. Θεωρούμε ακόμη το σύστημα: $\begin{cases} 2x-3y = 1 \\ -4x+6y = 5 \end{cases}$, στο οποίο είναι

$D = \begin{vmatrix}2 & -3\\ -4 & 6\end{vmatrix} = 0$ και $D_x = \begin{vmatrix}1 & -3\\ 5 & 6\end{vmatrix} = 21 \neq 0$. Συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να λυθεί το σύστημα** $\begin{cases} (\lambda+2)x+7(\lambda-3)y = 35 \\ x+(\lambda-3)y = \lambda \end{cases}$

Έχουμε $D = \begin{vmatrix}\lambda+2 & 7(\lambda-3)\\ 1 & \lambda-3\end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-3) - 7(\lambda-3) = (\lambda-3)(\lambda+2-7) = (\lambda-3)(\lambda-5)$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

I. $(\lambda-3)(\lambda-5) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq 5)$. Τότε επειδή

$D_x = \begin{vmatrix}35 & 7(\lambda-3)\\ \lambda & \lambda-3\end{vmatrix} = 35(\lambda-3) - 7\lambda(\lambda-3) = -7(\lambda-3)(\lambda-5)$ και

$D_y = \begin{vmatrix}\lambda+2 & 35\\ 1 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda^2+2\lambda-35 = (\lambda+7)(\lambda-5)$

το σύστημα έχει την μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D} = -7, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda+7}{\lambda-3}$$

II. $\lambda-3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$. Επειδή τώρα είναι $D_y = (3+7)(3-5) = -20 \neq 0$, το σύστημα είναι αδύνατο.

III. $\lambda-5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5$. Επειδή $D_x = D_y = 0$ και υπάρχει μη μηδενικός συντελεστής, το σύστημα είναι αόριστο. Το σύστημα τώρα γίνεται $\begin{cases} 7x+14y = 35 \\ x+2y = 5 \end{cases}$ και είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $x+2y = 5$, η οποία έχει ελεύθερο π.χ. τον άγνωστο y. Συνεπώς οι άπειρες λύσεις του συστήματος είναι οι $(5-2y, y)$

2. Αν $\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 8\end{bmatrix}X = \begin{bmatrix}-2 & 3\\ 7 & -1\end{bmatrix}$, να βρεθεί ο πίνακας X.

Επειδή $\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 8\end{vmatrix} = 1$, ο πίνακας $\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 8\end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και έχει αντίστροφο τον $\frac{1}{1}\begin{bmatrix}8 & -5\\ -3 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & -5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$.

Τώρα έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 8\end{bmatrix}X = \begin{bmatrix}-2 & 3\\ 7 & -1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}8 & -5\\ -3 & 2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 8\end{bmatrix}X\right) = \begin{bmatrix}8 & -5\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 7 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix}8 & -5\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 8\end{bmatrix}\right)X = \begin{bmatrix}-51 & 29\\ 20 & -11\end{bmatrix} \Leftrightarrow IX = \begin{bmatrix}-51 & 29\\ 20 & -11\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix}-51 & 29\\ 20 & -11\end{bmatrix}.$$

3. Αν $A = \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ και $D = \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$, να δειχτεί ότι $A^2 - (\alpha+\delta)A + DI = \mathbf{O}$ (I ο μοναδιαίος 2×2).

Έχουμε $A^2 - (\alpha+\delta)A + DI = \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}^2 - (\alpha+\delta)\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix} + (\alpha\delta-\beta\gamma)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix}\alpha^2+\beta\gamma & \alpha\beta+\beta\delta\\ \alpha\gamma+\gamma\delta & \beta\gamma+\delta^2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha^2+\alpha\delta & \alpha\beta+\beta\delta\\ \alpha\gamma+\gamma\delta & \alpha\delta+\delta^2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\delta-\beta\gamma & 0\\ 0 & \alpha\delta-\beta\gamma\end{bmatrix} = \mathbf{O}$$

Ασκήσεις: 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38

Ορίζουσα 3ης τάξης

1.21 Το σύστημα $\begin{cases}3x+2y = -1\\ 2x+\ y = 1\end{cases}$ έχει τη λύση (x, y) = (3, -5).

Έτσι το σύστημα $\begin{cases}3x+2y = -1\\ 2x+\ y = 1\\ 5x+4y = \gamma\end{cases}$ είναι συμβιβαστό, αν και μόνο αν η λύση (3, -5) των δύο πρώτων εξισώσεών του επαληθεύει και την $5x+4y = \gamma$. Δηλαδή, αν ικανοποιείται η συνθήκη $5 \cdot 3 + 4(-5) = \gamma$ ή $\gamma = -5$. Άρα ένα σύστημα 3×2 γενικά δεν είναι συμβιβαστό.

Θα ζητήσουμε μια **αναγκαία** συνθήκη για να είναι γενικότερα συμβιβαστό τό σύστημα

$$\begin{cases}\alpha_1 x+\beta_1 y = \gamma_1\\ \alpha_2 x+\beta_2 y = \gamma_2\\ \alpha_3 x+\beta_3 y = \gamma_3\end{cases} \qquad (10)$$

Ο **επαυξημένος πίνακας** του συστήματος αυτού είναι ο **τετραγωνικός** πίνακας 3×3

$$M = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{bmatrix}$$

Με διαγραφή της γραμμής και της στήλης που περιέχουν ένα συγκεκριμένο στοιχείο του πίνακα M σχηματίζεται ένας πίνακας 2×2, που είναι ένας *υποπίνακας*(1) του M. Π.χ. με διαγραφή της γραμμής και της στήλης του στοιχείου γ_2 σχηματίζεται ο υποπίνακας $\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_3 & \beta_3\end{bmatrix}$. Έτσι υπάρχουν 9 τέτοιοι πίνακες 2×2 μέ αντίστοιχες ορίζουσες 2ης τάξης, τις οποίες θα συμβολίζουμε με το αντίστοιχο προς το διαγραφόμενο στοιχείο κεφαλαίο γράμμα. Π.χ. αντίστοιχη προς το στοιχείο γ_2 είναι η ορίζουσα $\Gamma_2 = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}$.

Έστω ότι υπάρχει μια λύση (x_0, y_0) του συστήματος (10). Τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- **$|\Gamma_1|+|\Gamma_2|+|\Gamma_3| \neq 0$.** Χωρίς βλάβη της γενικότητας (με αναδιάταξη ενδεχομένως των αγνώστων ή των εξισώσεων του συστήματος) υποθέτουμε ότι $\Gamma_3 \neq 0$. Τότε το σύστημα των δυο πρώτων εξισώσεων έχει **μοναδική λύση** που σύμφωνα με την § 1.20 είναι:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix}\gamma_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \beta_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}} = \frac{-A_3}{\Gamma_3},\quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}} = \frac{B_3}{\Gamma_3}$$

και επειδή $\alpha_3 x_0 + \beta_3 y_0 = \gamma_3$, θα έχουμε $\alpha_3 \frac{-A_3}{\Gamma_3} + \beta_3 \frac{B_3}{\Gamma_3} = \gamma_3$, δηλαδή

$$\boxed{\alpha_3 A_3 - \beta_3 B_3 + \gamma_3 \Gamma_3 = 0} \qquad (11)$$

Η (11), αν εκτελέσουμε τις πράξεις στο πρώτο μέλος της, γράφεται

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 = 0$$

Στην ίδια συνθήκη καταλήγουμε, αν υποθέσουμε $\Gamma_1 \neq 0$ ή $\Gamma_2 \neq 0$.

- **$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$.** Στην περίπτωση αυτή επειδή το σύστημα (10) είναι συμβιβαστό, κατ' ανάγκη θα είναι (§ 1.20) και $A_i = B_i = 0$ (i = 1, 2, 3). Άρα η (11) ισχύει.

(1) Με τον όρο «υποπίνακας» ενός πίνακα M εννοούμε κάθε πίνακα, που προκύπτει από τον M με διαγραφή γραμμών ή στηλών.

΄Ωστε: **Αν το σύστημα (10) είναι συμβιβαστό τότε θα ισχύει η (11), δηλαδή**

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 = 0$$

Ο αριθμός $\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_3\beta_2\gamma_1$ που αντιστοιχεί στον **τετραγωνικό** πίνακα **M**, παριστάνεται σχηματικά

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \qquad (12)$$

και τότε λέγεται **ορίζουσα του πίνακα M**. Συνήθως γράφεται **D (M)** ή απλά **D**. Είναι μια **ορίζουσα 3ης τάξης**.

Σύστημα 3×2

1.22 Θεωρούμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1x+\beta_1y = \gamma_1 \\ \alpha_2x+\beta_2y = \gamma_2 \\ \alpha_3x+\beta_3y = \gamma_3 \end{cases}$ (10)

και έστω D η ορίζουσα του επαυξημένου πίνακά του.

Αν **D ≠ 0**, το σύστημα (10), όπως προκύπτει από το συμπέρασμα της προηγούμενης παραγράφου, είναι **αδύνατο**.

Υποθέτουμε λοιπόν **D = 0** και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $|\Gamma_1|+|\Gamma_2|+|\Gamma_3| \neq 0$, π.χ. $\Gamma_3 \neq 0$. Τότε το σύστημα των δυο πρώτων εξισώσεων του (10) έχει (§ 1.20) τη **μοναδική λύση** $x = \frac{-A_3}{\Gamma_3}$, $y = \frac{B_3}{\Gamma_3}$, η οποία, λόγω της $D = \alpha_3A_3-\beta_3B_3+\gamma_3\Gamma_3 = 0$, επαληθεύει και την $\alpha_3x+\beta_3y = \gamma_3$.
- $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$. Τότε σύμφωνα με την § 1.20
  1. Αν μια από τις ορίζουσες A_i ή B_i (i = 1, 2, 3) δεν είναι μηδέν, ένα σύστημα 2×2 εξισώσεων του (10) είναι αδύνατο, άρα και το (10) είναι **αδύνατο.**
  2. Αν $A_i = B_i = 0$ (i = 1, 2, 3), τότε και τα τρία συστήματα 2×2 εξισώσεων του (10) είναι αόριστα. ΄Αρα και το (10) είναι **αόριστο**, εκτός από την περίπτωση που ένα σύστημα 2×2 έχει όλους τους συντελεστές των αγνώστων μηδέν και ένα τουλάχιστο σταθερό όρο μη μηδενικό, οπότε είναι **αδύνατο**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

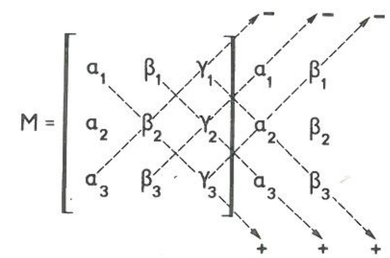
1. Από τα παραπάνω προκύπτει, ότι μόνη η συνθήκη D = 0 **δεν είναι ικανή** για να είναι το σύστημα (10) **συμβιβαστό.**
2. Το σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν D = 0 και $|\Gamma_1| + |\Gamma_2| + |\Gamma_3| \neq 0$

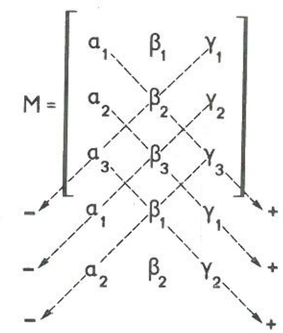
Ανάπτυγμα ορίζουσας 3ης τάξης

1.23 Από όσα είπαμε στην § 1.21 προκύπτει ότι η ορίζουσα (12) του πίνακα M γράφεται:

$$D= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 \qquad (13)$$

Τα έξι γινόμενα του τελευταίου μέλους της ισότητας (13) μπορούν να σχηματιστούν, με τα πρόσημά τους, από τον πίνακα M με διάφορους τρόπους, όπως δείχνουν τα σχήματα (**κανόνας Sarrus**)





Κάθε ορίζουσα 2ης τάξης που αντιστοιχεί σε΄υποπίνακα του M ο οποίος προκύπτει με διαγραφή της γραμμής και στήλης ενός στοιχείου, λέγεται **ελάσσων ορίζουσα** του διαγραφόμενου στοιχείου. Π.χ. η ορίζουσα $\Gamma_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$ είναι η ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου γ_2.

Εξάλλου από την προηγούμενη παράγραφο προκύπτει ακόμη ότι

$$D = \alpha_3A_3 - \beta_3B_3 + \gamma_3\Gamma_3 \qquad (14)$$

Το δεύτερο μέλος της (14) λέγεται **ανάπτυγμα** της ορίζουσας (12) κατά τα στοιχεία της 3ης γραμμής της[1]. Θα μπορούσαμε να έχουμε αναπτύγματα της (12) κατά τα στοιχεία μιας άλλης γραμμής. Τότε διαπιστώνουμε (με εκτέλεση των πράξεων) ότι

$$\begin{aligned} D &= \alpha_1A_1 - \beta_1B_1 + \gamma_1\Gamma_1 \\ &= -\alpha_2A_2 + \beta_2B_2 - \gamma_2\Gamma_2 \\ &= \alpha_3A_3 - \beta_3B_3 + \gamma_3\Gamma_3 \end{aligned}$$

(1) Οι γραμμές και οι στήλες ενός τετραγωνικού πίνακα M λέγονται αντιστοίχως γραμμές και στήλες της ορίζουσας D(M)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Γενικά το ανάπτυγμα της D κατά τα στοιχεία της i-γραμμής είναι

$$D = (-1)^{i+1}(\alpha_i A_i - \beta_i B_i + \gamma_i \Gamma_i) \qquad (15)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έχουμε $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 2 \cdot 32 - (-1)(-8) + 3 \cdot 20 = 116$$

Ομοίως, αν αναπτύξουμε την ορίζουσα κατά τα στοιχεία της 2ης και 3ης γραμμής της, έχουμε

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = \ldots = 116$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = \ldots = 116$$

Ιδιότητες οριζουσών

1.24 Έστω $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ και $D' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ η ορίζουσα που έχει ως στήλες τις γραμμές της D με την ίδια διάταξη. Τότε είναι

$$\begin{aligned} D' &= \alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) - \alpha_2(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) + \alpha_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) \\ &= \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 \\ &= D \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι:

1. **Η ορίζουσα δε μεταβάλλεται, αν οι γραμμές γίνουν στήλες με την ίδια διάταξη.**
   Ισχύουν ακόμα τα εξής:

2. **Για να υπολογίσουμε μια ορίζουσα, μπορούμε να πάρουμε το ανάπτυγμά της κατά τα στοιχεία μιας οποιασδήποτε στήλης της.** (Άμεση συνέπεια της ιδιότητας 1).

3. **Αν εναλλάξουμε τη θέση δυο γραμμών (ή *στηλών*) μιας ορίζουσας, η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.**
   Π.χ. αν εναλλάξουμε την 1η και 2η γραμμή της D, έχουμε την

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \qquad (16)$$

Αν πάρουμε το ανάπτυγμα της D_1 κατά τα στοιχεία της 2ης γραμμής της, σύμφωνα με τον τύπο (15), έχουμε

$$D_1 = -\alpha_1\begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \beta_1\begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \gamma_1\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = -\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 - \gamma_1 \Gamma_1 = -D$$

Συνέπεια της ιδιότητας 3 είναι ότι:

4. **Αν τα αντίστοιχα στοιχεία δυο γραμμών (ή *στηλών*) μιας ορίζουσας D είναι ίσα, τότε η ορίζουσα είναι μηδέν.**
   Πράγματι, η εναλλαγή των δυο αυτών γραμμών (ή στηλών) δε μεταβάλλει την ορίζουσα, αφού είναι τα στοιχεία τους ίσα. Εξάλλου (ιδιότ. 3) η ορίζουσα D μετατρέπεται στην -D. Έτσι θα είναι

$$D = -D \quad \text{ή} \quad 2D = 0 \quad \text{ή} \quad D = 0$$

5. **Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής (ή *στήλης*) μιας ορίζουσας με τον αριθμό λ, τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με το λ.**
   Πράγματι, έχουμε

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \lambda\beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \lambda\beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \lambda\beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = -\lambda\beta_1 B_1 + \lambda\beta_2 B_2 - \lambda\beta_3 B_3 = \lambda(-\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 - \beta_3 B_3) = \lambda\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Από τις ιδιότητες 4 και 5 προκύπτει ότι:

6. **Αν τα αντίστοιχα στοιχεία δυο γραμμών (ή *στηλών*) μιας ορίζουσας είναι ανάλογα, τότε η ορίζουσα είναι μηδέν.**
   Π.χ. είναι

$$\begin{vmatrix} -8 & 24 & 2 \\ 1 & -3 & 7 \\ 5 & -15 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & (-3)(-8) & 2 \\ 1 & (-3)\cdot 1 & 7 \\ 5 & (-3)\cdot 5 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} -8 & -8 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \\ 5 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 0 = 0$$

7. **Αν κάθε στοιχείο μιας γραμμής (ή *στήλης*) μιας ορίζουσας D είναι άθροισμα δυο προσθετέων, τότε η D ανάγεται σε άθροισμα δυο οριζουσών.**

Π.χ. είναι $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2' + \alpha_2'' & \beta_2' + \beta_2'' & \gamma_2' + \gamma_2'' \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

$$= -(\alpha_2' + \alpha_2'')A_2 + (\beta_2' + \beta_2'')B_2 - (\gamma_2' + \gamma_2'')\Gamma_2$$
$$= (-\alpha_2' A_2 + \beta_2' B_2 - \gamma_2' \Gamma_2) + (-\alpha_2'' A_2 + \beta_2'' B_2 - \gamma_2'' \Gamma_2)$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2' & \beta_2' & \gamma_2' \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2'' & \beta_2'' & \gamma_2'' \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \qquad (17)$$

Από την ιδιότητα 7 προκύπτει ότι:

8. **Αν στα στοιχεία μιας γραμμής (ή *στήλης*) μιας ορίζουσας προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής (ή *μιας άλλης στήλης*) πολλαπλασιασμένα με αριθμό[(1)] λ, η ορίζουσα δε μεταβάλλεται.**

Π.χ. έχουμε $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1+\lambda\alpha_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2+\lambda\alpha_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3+\lambda\alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \lambda\alpha_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \lambda\alpha_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \lambda\alpha_3 \end{vmatrix}$

$$= D + 0 = D$$

9. **Μια ορίζουσα που αντιστοιχεί σε τριγωνικό πίνακα, είναι ίση με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων της.**

Πράγματι, έχουμε π.χ.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 (\beta_2\gamma_3 - 0 \cdot \gamma_2) = \alpha_1\beta_2\gamma_3$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έχουμε $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 37 & 34 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ 35-34 & 37 & 34 \\ 23-25 & 26 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-1 & 1-1 & 1 \\ 35-34 & 37-34 & 34 \\ 23-25 & 26-25 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 34 \\ -2 & 1 & 25 \end{vmatrix}$

και αν αναπτύξουμε κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής βρίσκουμε:

$D = +1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7$

2. $\begin{vmatrix} \beta+\gamma & \alpha & \alpha \\ \beta & \gamma+\alpha & \beta \\ \gamma & \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\beta+\gamma)-\beta-\gamma & \alpha-(\gamma+\alpha)-\gamma & \alpha-\beta-(\alpha+\beta) \\ \beta & \gamma+\alpha & \beta \\ \gamma & \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2\gamma & -2\beta \\ \beta & \gamma+\alpha & \beta \\ \gamma & \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix}$

$$= -(-2\gamma) \begin{vmatrix} \beta & \beta \\ \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix} + (-2\beta) \begin{vmatrix} \beta & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma \end{vmatrix}$$

$$= 2\beta\gamma \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix} - 2\beta\gamma \begin{vmatrix} \beta & \gamma+\alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\beta\gamma(\alpha+\beta-\gamma-\beta+\alpha+\gamma) = 4\alpha\beta\gamma$$

Ασκήσεις: 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45

(1) Ή, γενικότερα, προσθέσουμε ένα γραμμικό συνδυασμό των αντίστοιχων στοιχείων των άλλων γραμμών (ή στηλών).

Ομογενές σύστημα 3×3

1.25 Έστω το ομογενές σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = 0 \end{cases}$ (18)

και D η ορίζουσα του πίνακά του. Στην § 1.14 είδαμε ότι το ομογενές σύστημα είναι πάντοτε συμβιβαστό και έχει τουλάχιστο τη μηδενική λύση. Εξάλλου είναι φανερό ότι αν έχει μια μη μηδενική λύση (x_0, y_0, z_0) θα έχει και τις $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι:

Το σύστημα (18) έχει και μη μηδενικές λύσεις, αν και μόνο αν $D = 0$

Απόδειξη. Έστω $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$ μια λύση του (18). Ένα τουλάχιστο από τα x_0, y_0, z_0 δεν είναι μηδέν. Αν π.χ. $z_0 \neq 0$, τότε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z_0 = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z_0 = 0 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{δηλαδή το} \quad \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = -\gamma_1 z_0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = -\gamma_2 z_0 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y = -\gamma_3 z_0 \end{cases} \qquad (19)$$

είναι συμβιβαστό σύστημα 3×2 και έχει τη λύση (x_0, y_0). Συνεπώς (§ 1.21) θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & -\gamma_1 z_0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & -\gamma_2 z_0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & -\gamma_3 z_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} z_0 = 0 \quad \text{ή} \quad Dz_0 = 0 \qquad (20)$$

και επειδή $z_0 \neq 0$, θα είναι $D = 0$.

Αντιστρόφως έστω $D = 0$. Τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. Υπάρχει μη μηδενική ελάσσων ορίζουσα της D, π.χ. $\Gamma_3 \neq 0$. Τότε για κάθε $z_0 \in \mathbb{R}$ τό σύστημα (19), λόγω της (20), έχει (§ 1.22, παρατ. 2) τη μοναδική λύση $x = \frac{A_3}{\Gamma_3} z_0$, $y = \frac{-B_3}{\Gamma_3} z_0$. Επομένως το (18) έχει άπειρες λύσεις με ελεύθερο τον άγνωστο z. Έτσι για αυθαίρετες τιμές του $z \in \mathbb{R}$ έχουμε τις λύσεις $\left(\frac{A_3}{\Gamma_3} z, \frac{-B_3}{\Gamma_3} z, z\right)$, άρα και τις $(A_3 z, -B_3 z, \Gamma_3 z)$.
2. Όλες οι ελάσσονες ορίζουσες της D είναι μηδέν. Στην ειδική περίπτωση που όλοι οι συντελεστές των αγνώστων είναι μηδέν, το σύστημα (18) αληθεύει για οποιεσδήποτε τιμές των αγνώστων (και οι τρεις άγνωστοι ελεύθεροι).

Όταν ένας τουλάχιστο από τους συντελεστές των αγνώστων του συστήματος δεν είναι μηδέν, π.χ. $\alpha_1 \neq 0$, θέτουμε $\alpha_2 = k\alpha_1$, $\alpha_3 = \lambda\alpha_1$. Τότε από τις $\Gamma_3 = 0$, $B_3 = 0$ προκύπτει ότι $\beta_2 = k\beta_1$, $\gamma_2 = k\gamma_1$, ενώ από τις $\Gamma_2 = 0$, $B_2 = 0$ ότι $\beta_3 = \lambda\beta_1$, $\gamma_3 = \lambda\gamma_1$ αντιστοίχως. Έτσι το σύστημα (18) είναι ισοδύναμο με την πρώτη εξίσωσή του, που γράφεται

$$x = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}y - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}z$$

και έχει ελεύθερους τους αγνώστους y, z. Τότε για αυθαίρετες τιμές των $y, z \in \mathbb{R}$ έχουμε τις λύσεις $\left(\frac{-\beta_1}{\alpha_1}y - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}z, y, z\right)$, άρα και τις $(-\beta_1 y - \gamma_1 z, \alpha_1 y, \alpha_1 z)$.

Αντίστροφος ενός πίνακα 3×3

1.26 Έστω ο **τετραγωνικός** πίνακας $M = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}$ με ορίζουσα D.

Θα αποδείξουμε ότι αν $D \neq 0$, ο πίνακας M είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι, τότε οι ελάσσονες ορίζουσες των στοιχείων της D (που δεν είναι όλες μηδέν) σχηματίζουν τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & A_3 \\ -B_1 & B_2 & -B_3 \\ \Gamma_1 & -\Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix}$$

και μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & A_3 \\ -B_1 & B_2 & -B_3 \\ \Gamma_1 & -\Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

Πράγματι:

Στο παραπάνω γινόμενο τα τρία διαγώνια στοιχεία είναι αναπτύγματα της D κατά τα στοιχεία μιας γραμμής της, όπως π.χ. $-\alpha_2A_2 + \beta_2B_2 - \gamma_2\Gamma_2 = D$. Τα υπόλοιπα στοιχεία είναι τα ίδια αυτά αναπτύγματα στα οποία έχουν αντικατασταθεί τα στοιχεία μιας γραμμής της D με τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής της, π.χ.

$$-\alpha_1A_2 + \beta_1B_2 - \gamma_1\Gamma_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

Έτσι, αν θεωρήσουμε τον πίνακα $M' = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & A_3 \\ -B_1 & B_2 & -B_3 \\ \Gamma_1 & -\Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix}$ (που ορίζεται επειδή

$D \neq 0$), θα είναι $MM' = I$. Τότε βρίσκουμε ότι είναι και $M'M = I$ και συνεπώς (§ 1.10) ο πίνακας M είναι αντιστρέψιμος.

Ώστε: **Αν η ορίζουσα D του πίνακα M δεν είναι μηδέν, ο M είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του πίνακας είναι ο**

$$M^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & A_3 \\ -B_1 & B_2 & -B_3 \\ \Gamma_1 & -\Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix} \qquad (21)$$

Σημείωση

Αποδεικνύεται ότι και αντιστρόφως, αν ο M είναι αντιστρέψιμος, τότε $D \neq 0$.

Εφαρμογή. Λύση συστήματος 3×3

1.27 Έστω το σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z = \delta_1 \\ \alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z = \delta_2 \\ \alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3z = \delta_3 \end{cases} \qquad (22)$$

που γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \qquad (22)$$

Αν D είναι η ορίζουσα του πίνακα A του συστήματος (22), διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- **$D \neq 0$.** Τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς το (22) έχει (§ 1.19, παρατ.) τη μοναδική λύση

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & A_3 \\ -B_1 & B_2 & -B_3 \\ \Gamma_1 & -\Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta_1A_1-\delta_2A_2+\delta_3A_3 \\ -\delta_1B_1+\delta_2B_2-\delta_3B_3 \\ \delta_1\Gamma_1-\delta_2\Gamma_2+\delta_3\Gamma_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x/D \\ D_y/D \\ D_z/D \end{bmatrix}$$

Αλλά η $D_x = \delta_1A_1 - \delta_2A_2 + \delta_3A_3$ προκύπτει από την $D = \alpha_1A_1 - \alpha_2A_2 + \alpha_3A_3$, αν η στήλη των συντελεστών α_1, α_2, α_3 του x αντικατασταθεί με τη στήλη δ_1, δ_2, δ_3.

Ομοίως η $D_y = -\delta_1B_1 + \delta_2B_2 - \delta_3B_3$ προκύπτει από την D, αν η στήλη των συντελεστών του y αντικατασταθεί με τη στήλη των δ_1, δ_2, δ_3 και η $D_z = \delta_1\Gamma_1 - \delta_2\Gamma_2 + \delta_3\Gamma_3$ προκύπτει από την D, αν η στήλη των συντελεστών του z αντικατασταθεί με τη στήλη των δ_1, δ_2, δ_3.

Έτσι η λύση του συστήματος (22) είναι

$$x = \frac{D_x}{D},\ y = \frac{D_y}{D},\ z = \frac{D_z}{D}$$

Στην περίπτωση αυτή το σύστημα λέγεται **σύστημα Cramer.**

- $D = 0$. Τότε, όπως θα αποδείξουμε στο 3° κεφάλαιο, το σύστημα είναι **αδύνατο** ή **αόριστο**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το σύστημα $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x+y+2z=2 \\ 4x-4y+3z=6 \end{cases}$

έχει $D = -7 \neq 0$ και συνεπώς μοναδική λύση. Με τον κανόνα Sarrus βρίσκουμε

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -15, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -3 \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 2$$

Έτσι το σύστημα έχει τη λύση $\left(\frac{15}{7},\ \frac{3}{7},\ -\frac{2}{7}\right)$

Ασκήσεις: 46, 47

Ορίζουσα ν τάξης

1.28 Μέχρι τώρα ορίσαμε την έννοια της ορίζουσας για πίνακες 2×2 και 3×3. Μπορούμε να ορίσουμε επαγωγικά ορίζουσα για κάθε **τετραγωνικό** πίνακα[1]. Συγκεκριμένα έστω ο πίνακας ν×ν με τη βοήθεια των οριζουσών ν-1 τάξης

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{i\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu j} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Τότε

- Με διαγραφή της στήλης και της γραμμής που περιέχουν ένα συγκεκριμένο στοιχείο ορίζεται ένας υποπίνακας (ν-1)×(ν-1) του M, στον οποίο αντιστοιχεί μια ορίζουσα ν-1 τάξης. Υπάρχουν λοιπόν ν^2 ελάσσονες ορίζουσες ν-1 τάξης, τις οποίες συμβολίζουμε με το αντίστοιχο προς το διαγραφόμενο στοιχείο κεφαλαίο γράμμα.

(1) Τονίζουμε ότι ορίζεται η έννοια της ορίζουσας **μόνο** για τετραγωνικούς πίνακες.

- Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα

$$(-1)^{i+1}\alpha_{i1}A_{i1} + (-1)^{i+2}\alpha_{i2}A_{i2} + \dots + (-1)^{i+\nu}\alpha_{i\nu}A_{i\nu} \qquad (23)$$

είναι σταθερό και ανεξάρτητο της i-γραμμής.

- Ο αριθμός $(-1)^{i+1}\alpha_{i1}A_{i1} + (-1)^{i+2}\alpha_{i2}A_{i2} + \dots + (-1)^{i+\nu}\alpha_{i\nu}A_{i\nu}$ που αντιστοιχεί στον τετραγωνικό πίνακα ν×ν M παριστάνεται σχηματικά

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

και τότε λέγεται **ορίζουσα του πίνακα M.** Συνήθως γράφεται **D(M)** ή απλά **D**. Είναι μια **ορίζουσα ν τάξης.**

Το άθροισμα (23) λέγεται *ανάπτυγμα* της ορίζουσας D κατά τα στοιχεία της i γραμμής (i = 1, 2, ..., ν).

Αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες της § 1.24 ισχύουν και για ορίζουσες ν τάξης.

Λύση συστήματος ν×ν με ορίζουσες

1.29 Η λύση ενός συστήματος ν×ν γίνεται και με τη βοήθεια των οριζουσών ν τάξης, με τρόπο ανάλογο εκείνου που ακολουθήσαμε στην § 1.27 για σύστημα 3×3. Έστω το σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \alpha_{\nu 1}x_1 + \alpha_{\nu 2}x_2 + \dots + \alpha_{\nu\nu}x_\nu = \beta_\nu \end{cases} \qquad (24)$$

Αν συμβολίσουμε D την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων και D_1, D_2, ..., D_ν τις ορίζουσες που προκύπτουν από τη D με αντικατάσταση της στήλης των συντελεστών του αγνώστου $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ αντιστοίχως με τη στήλη των σταθερών όρων του (24), τότε αποδεικνύεται[1] ότι:

(1) Η απόδειξη θα γίνει στο κεφάλαιο 3.

- **Αν $D \neq 0$, το σύστημα (14) έχει τη μοναδική λύση:**

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \ldots, \quad x_\nu = \frac{D_\nu}{D} \qquad \textbf{(σύστημα Cramer)}$$

- **Αν $D = 0$, το σύστημα (14) είναι αδύνατο ή αόριστο.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda^2 \\ x + \lambda y + z = 3\lambda \\ x + y + \lambda z = 2 \end{cases} \qquad (1)$$

Έχουμε $D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda^3-\lambda) - 2(\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$

Ομοίως βρίσκουμε: $D_x = (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda^2-\lambda-1)$, $D_y = (\lambda-1)(\lambda+2)(2\lambda-1)$, $D_z = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

I. $D \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2(\lambda+2) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -2)$. Τότε το σύστημα έχει τη λύση

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda^2-\lambda+1}{\lambda-1}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{2\lambda-1}{\lambda-1}, \quad z = \frac{D_z}{D} = -1$$

II. $D = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 1$ ή $\lambda = -2)$. Τότε εξετάζουμε τις περιπτώσεις:

1. $\lambda = 1$, το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+y+z = 3 \\ x+y+z = 2 \end{cases}$ και είναι φανερό ότι είναι αδύνατο.

2. $\lambda = -2$, το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} -2x + y + z = 4 \\ x - 2y + z = -6 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ -2x + y + z = 4 \\ x - 2y + z = -6 \end{cases} \qquad (2)$

Από τον επαυξημένο πίνακα του τελευταίου συστήματος έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -6 \end{array}\right] \begin{matrix} 2 \\ \\ -1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 8 \\ 0 & 3 & -3 & 8 \end{array}\right] -1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] :3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 8/3 \end{array}\right] -1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1 & -1 & 8/3 \end{array}\right]$$

Έτσι το σύστημα (2) είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x \quad - z = -2/3 \\ y - z = 8/3 \end{cases}$$ με ελεύθερο τον άγνωστο z.

Άρα, όταν $\lambda = -2$ λύσεις του (1) είναι οι: $x = z - \frac{2}{3}$, $y = z + \frac{8}{3}$, $z \in \mathbb{R}$, δηλαδή οι $(x, y, z) = (z - \frac{2}{3}, z + \frac{8}{3}, z)$

2. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3z - \omega = 6 \\ x + 2y - 3z = 9 \\ -3x + y - 2\omega = -1 \\ 4x + 3y - z + 5\omega = -7 \end{cases}$$

Το ανάπτυγμα της ορίζουσας D του συστήματος κατά τα στοιχεία της 4ης στήλης είναι

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 0 - (-2)\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)\cdot 32 + 0 - (-2)\cdot 42 + 5 \cdot 18 = 206$$

και συνεπώς το σύστημα έχει μια μόνο λύση.

Τώρα βρίσκουμε: $D_x = 412$, $D_y = -206$, $D_z = -618$, $D_\omega = -618$

Άρα η λύση του συστήματος είναι:

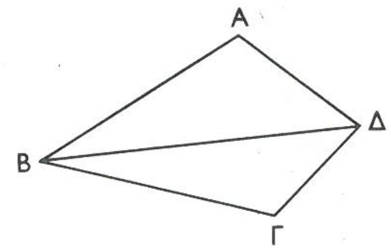
$$x = \frac{D_x}{D} = 2, \quad y = \frac{D_y}{D} = -1, \quad z = \frac{D_z}{D} = -3, \quad \omega = \frac{D_\omega}{D} = -3.$$

Ασκήσεις: 48, 49, 50, 51

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Από τους μαθητές ενός Λυκείου απασχολούνται, κατά τάξη, στις ομάδες βόλεϋ (Β), ποδοσφαίρου (Π), μπάσκετ (Μ) και στίβου (Σ):
από την α΄ τάξη 32 μαθητές με βόλεϋ, 21 με ποδόσφαιρο και 17 με στίβο, από τη β΄ τάξη 26 μαθητές με βόλεϋ και 19 με στίβο και από τη γ΄ τάξη 15 μαθητές με βόλεϋ, 16 με ποδόσφαιρο, 9 με μπάσκετ και 15 με στίβο. Να παραστήσετε τις πληροφορίες αυτές με πίνακα.

2. Ένα ευθύγραμμο γεωμετρικό σχήμα, π.χ. το διπλανό, μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα, αν οι στήλες του πίνακα αντιστοιχούν στις κορυφές του σχήματος και οι γραμμές του στα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από τις κορυφές ανά δύο. Τα στοιχεία του πίνακα ορίζονται με τον κανόνα: «Το στοιχείο α_{ij} είναι ίσο με 1, όταν το τμήμα που βρίσκεται στη γραμμή i έχει ένα άκρο την κορυφή που βρίσκεται στη στήλη j. Διαφορετικά $\alpha_{ij} = 0$». Να παρασταθεί με πίνακα το διπλανό σχήμα.



3. Είναι ο πίνακας της άσκησης 2: (i) τετραγωνικός; (ii) κλιμακωτός; (iii) διαγώνιος;

4. Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 7 \\ 8 & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 7 & -2 \end{bmatrix}$,

$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

να βρεθούν τα αθροίσματα: Α+Β και Β+Γ+Δ.

5. Να βρεθούν οι x, y, z, ω, αν $\begin{bmatrix} 2x & -y \\ 3z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -4 \\ -1 & 2\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+\omega & 3 \end{bmatrix}$

6. Σε όσες περιπτώσεις επιτρέπεται, να εκτελέσετε τις πράξεις:

(i) $[4 \;\; 2 \;\; -5] - [-3 \;\; -2 \;\; 3] + [-6 \;\; 0 \;\; 3]$.

(ii) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $[4 \;\; 3] + [3 \;\; -9] + [0]$

(iv) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -12 \end{bmatrix}$

7. Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 1 & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

τότε να δείξετε ότι: $A - 3B + \Gamma + 2\Delta - 7E = \mathbf{O}$

8. Να βρεθούν οι x, y, z, ω, αν $2\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 5 \\ -1 & \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & x+y \\ z+\omega & 1 \end{bmatrix}$

9. Εφαρμόστε τις ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων και του πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα για να δείξετε ότι:

$$3X-4\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 6 \\ \frac{15}{2} & 3 & 9 \end{bmatrix} = X-3\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = -\frac{3}{2}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 6 \\ \frac{15}{2} & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια να βρείτε τον πίνακα Χ.

10. Να εκτελεστούν οι παρακάτω πολλαπλασιασμοί πινάκων:

(i) $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} x & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ x & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & x \end{bmatrix}$

11. Να βρείτε τους πίνακες Χ, Ψ, Ζ, Ω, Τ, Ρ, από τις ισότητες:

$X = [1 \;\; -2 \;\; 0] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\Psi = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [-2 \;\; 1 \;\; 3]$

$Z = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Omega + \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ -1 & -\alpha & -1 \\ \alpha & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & 1 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$

$T + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 18 & 7 \\ 7 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot [1 \;\; 2] \cdot \begin{bmatrix} 18 & 7 \\ 7 & 18 \end{bmatrix}$

12. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & x & 2 \end{bmatrix}$, να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $AB \neq BA$.

13. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ και I, **O** ο μοναδιαίος και ο μηδενικός πίνακας 2×2 αντιστοίχως, να δείξετε ότι

$$A^2+2A-11\,I = \mathbf{O}.$$

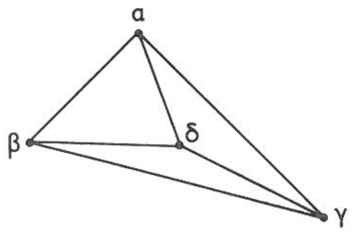
14. Αν $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ και I, **O** ο μοναδιαίος και ο μηδενικός πίνακας 3×3 αντιστοίχως,

να προσδιορίσετε τα $x,y \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι $(A-xI)\cdot(A-yI) = \mathbf{O}$

15. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ και $X = \begin{bmatrix} 1 & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$, να δείξετε ότι υπάρχουν άπειροι πίνακες X, ώστε

$$AX = XA$$

16. Το διπλανό σχήμα παριστάνει το οδικό δίκτυο που συνδέει τις πόλεις α, β, γ και δ. Να παραστήσετε με πίνακα A το δίκτυο αυτό σημειώνοντας 1 στη διασταύρωση της στήλης μιας πόλης και της γραμμής μιας άλλης πόλης που συνδέονται οδικά κατευθείαν και 0 στις άλλες περιπτώσεις. Έστω B ο πίνακας που τα στοιχεία του φανερώνουν τους δυνατούς τρόπους μετάβασης από πόλη σε πόλη (όχι οπωσδήποτε διαφορετική) αφού προηγουμένως περάσουμε από μια άλλη πόλη (π.χ. από την α στην α υπάρχουν 3 τρόποι, από τη β στη γ 2 τρόποι κτλ.).



Να αποδείξετε ότι $B = A^2$.

17. Αν $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ να υπολογίσετε τον πίνακα

$$X = A^2+B^2+\Gamma^3$$

18. Αν $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & x \\ -1 & x & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ να προσδιοριστεί η τιμή του x, ώστε να είναι

$$AB = BA = I$$

19. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, να δείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι:

(i) $A^\nu = 2^{\nu-1}A$, (ii) $B^\nu = 2^{\nu-1}\alpha^\nu A$.

20. Να βρείτε τους αριθμούς x, y, z, ω (αν υπάρχουν) για τους οποίους είναι:

(i) $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

21. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

22. Αν A, B είναι πίνακες 2×2, να δείξετε ότι:

$$AB = BA \Leftrightarrow (A-\lambda I)(B-\lambda I) = (B-\lambda I)(A-\lambda I)$$

23. Να βρεθεί (όταν υπάρχει) ο αντίστροφος του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

24. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, να υπολογίσετε τον πίνακα $A(A+B)-2B$

25. Αν A, B είναι πίνακες ν × ν με $A^2 = A$ και $B^2 = B$, τότε να δείξετε ότι είναι και $(A+B)^2 = A+B$, αν και μόνο αν $AB = BA = \mathbf{O}$.

26. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας A της άσκησης 13 αντιστρέφεται και να υπολογίσετε τον αντίστροφό του.

27. Να λυθούν τα συστήματα:

(i) $\begin{cases} 2x+y-z = 2 \\ 4x-y-3z = -2 \\ 2x+2y-z = 9 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x-2y+2z = 3 \\ x+y-2z = -1 \\ -x+2y+2z = 1 \end{cases}$ (iii) $\begin{cases} 2x-y-z = 2 \\ 4x-y-3z = -2 \\ 2x+2y-\frac{2}{3}z = 9 \end{cases}$

28. Να λυθεί η εξίσωση: $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

29. Να δείξετε ότι τα παρακάτω συστήματα δεν είναι συμβιβαστά:

(i) $\begin{cases} 20x+y = 1 \\ y = 1 \\ 2x+y = 0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x+z = 2 \\ 2x+y-z = 0 \\ 2x+z = 0 \\ x+y+z = 16 \end{cases}$

30. Να λυθούν τα συστήματα: (i) $\begin{cases} x+y+2z = 1 \\ 3x-y-z = 2 \\ x+2y+6z = -1 \\ 5x+2y+3z = -6 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x-z+4\omega+5\varphi = 4 \\ y-2\omega-\varphi = 1 \\ -x+5z-12\omega-17\varphi = -4 \end{cases}$

31. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \alpha_1 x+\beta_1 y = 0 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y = 0 \end{cases}$

32. Αν Α, Β είναι πίνακες 2×2 και $k \in \mathbb{R}$, να δειχτεί ότι

(i) $D(kA) = k^2 D(A)$ (ii) $D(AB) = D(A) \cdot D(B)$

33. Έστω ότι τα γράμματα του αλφαβήτου μας παριστάνονται με αριθμούς, ως εξής:

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ
15	9	12	20	21	18	1	5	13	8	22	24
Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω
2	10	3	7	16	4	23	6	11	19	17	14

Χρησιμοποιώντας τον κώδικα αυτό μπορούμε κάθε λέξη με τέσσερα γράμματα να την παραστήσουμε με πίνακα 2×2, π.χ. η λέξη ΒΗΜΑ γίνεται $\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 24 & 15 \end{bmatrix}$

Να παρασταθούν με τον κώδικα αυτό οι λέξεις: ΗΡΩΣ, ΤΙΝΑ, ΧΑΡΗ, ΠΟΛΑ.
Ο κώδικας αυτός δεν είναι ίσως δύσκολο να αποκαλυφτεί (να «σπάσει», όπως λέμε). Για να τον κάνουμε πιο δύσκολο, χρησιμοποιούμε συνήθως ένα πίνακα 2×2 ως «πολλαπλασιαστή» από αριστερά, π.χ. τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Έτσι ο πίνακας της λέξης ΒΗΜΑ γίνεται

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 24 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93 & 35 \\ 42 & 17 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν με χρήση του πίνακα Α οι λέξεις που παριστάνουν οι πίνακες (αποκωδικοποίηση)

$$\begin{bmatrix} 119 & 140 \\ 52 & 59 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 150 & 35 \\ 64 & 17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 119 & 95 \\ 48 & 41 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} 59 & 77 \\ 24 & 31 \end{bmatrix}$$

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πολλαπλασιαστής οποιοσδήποτε πίνακας;

34. Να λυθεί η εξίσωση: $\begin{bmatrix} \text{συνα} & \text{ημα} \\ \text{ημα} & \text{-συνα} \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} \text{συνα} & \text{-ημα} \\ \text{ημα} & \text{συνα} \end{bmatrix}$

35. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x+(\lambda-1)y = 4 \\ (\lambda-2)x+\lambda y = \lambda+2 \end{cases}$

36. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} (\lambda-4)x+2(\lambda-1)y = 3 \\ (\lambda-6)x+(\lambda-3)y = \lambda \end{cases}$

37. Να προσδιοριστούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα:

$$\begin{cases} (\lambda+4)x + (2\lambda+1)y = 3\lambda-1 \\ (3\lambda+7)x + (5\lambda+1)y = 2\lambda+2 \end{cases}$$

(i) να έχει μια λύση, (ii) να είναι αόριστο και (iii) να είναι αδύνατο.

38. Να βρεθούν οι τιμές των λ, μ για τις οποίες τα συστήματα

$$\begin{cases} (\mu+1)x+\lambda y = 1 \\ 2x-y = 3 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} -(\mu+1)x+(\lambda+1)y = 2 \\ x+2y = 5 \end{cases}$$

είναι συγχρόνως αδύνατα.

39. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -8 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Gamma = \begin{vmatrix} -1 & 97^{13} & \alpha \\ 0 & 2 & 62^{105} \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

40. Χρησιμοποιήστε ιδιότητες των οριζουσών για να δείξετε ότι:

(i) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta+2 & 1 \\ \beta & 2+\alpha & 1 \\ 2 & \alpha+\beta & 1 \end{vmatrix} = 0$ (ii) $\begin{vmatrix} 1+y_1 & 1+x_1 & x_1+y_1 \\ 1+y_2 & 1+x_2 & x_2+y_2 \\ 1+y_3 & 1+x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

41. Χρησιμοποιήστε ιδιότητες των οριζουσών για να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$, (ii) $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$

42. Χρησιμοποιήστε ιδιότητες των οριζουσών για να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $\begin{vmatrix} 2^5 & 2^5 & 2^5 \\ 2^5 & 2^5-x & 2^5 \\ 2^5 & 2^5 & 2^6-x \end{vmatrix} = 0$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ 3 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$

43. Να βρεθεί η αναγκαία συνθήκη, που πρέπει να πληρούν τα α και β, ώστε καθένα από τα συστήματα:

(i) $\begin{cases} \beta x+\alpha y = 13 \\ 2x+y = 2 \\ 2\beta x+3\beta y = 1 \end{cases}$ και (ii) $\begin{cases} (\alpha+1)x+\beta y = 1 \\ (\beta-1)x+\alpha y = \alpha\beta \\ x+y = \alpha+\beta \end{cases}$

να είναι συμβιβαστό.

44. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & x & x^2 \\ x+x^2 & x^2+\alpha & x+\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

45. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} (\lambda-1)x+\lambda y = 1 \\ (\lambda-1)x+y = \lambda \\ x+\lambda y = \lambda-1 \end{cases}$

46. Να λυθούν τα συστήματα:

(i) $\begin{cases} x+2y+3z = 5 \\ x-y-z = 0 \\ 4x+5y+6z = 11 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x-2y+z = -3 \\ 2x+y+2z = 4 \\ x+2y+z = 3 \end{cases}$ (iii) $\begin{cases} -x+y-z = 1 \\ 2x+4z = 3 \\ 2y+2z = 5 \end{cases}$

47. Να λυθούν τα συστήματα:

(i) $\begin{cases} x+2y+8z = 0 \\ x+3y+7z = 0 \\ x+5y+5z = 0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 4x-y-z = 0 \\ 3x+y+z = 0 \\ 4x+y+3z = 0 \end{cases}$

48. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(i) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ (ii) $\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$

49. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1+\mu & 1+\rho & 1+k & 1+\alpha \\ 1+2\lambda & 1+2\mu & 1+2\rho & 1+2k & 1+2\alpha \\ 1+3\lambda & 1+3\mu & 1+3\rho & 1+3k & 1+3\alpha \\ 1+4\lambda & 1+4\mu & 1+4\rho & 1+4k & 1+4\alpha \\ 1+5\lambda & 1+5\mu & 1+5\rho & 1+5k & 1+5\alpha \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

50. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 4x \quad -3z+2\omega = 1 \\ 2y+5z-4\omega = -13 \\ x+3y+z \quad = -2 \\ 2x-y \quad +3\omega = -5 \end{cases}$$

51. Να λυθούν τα συστήματα:

(i) $\begin{cases} 2x-\lambda y+2z = 0 \\ x+y-z = 0 \\ 2x-y-z = 0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x+2y-z = 2 \\ (\lambda+1)x+3y+z = 2 \\ 2x+y+\lambda z = 0 \end{cases}$

2

ΟΜΑΔΕΣ ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ

Η Άλγεβρα χαρακτηρίζεται από τη μελέτη συνόλων στα οποία έχουν οριστεί πράξεις. Οι συγκεκριμένες ιδιότητες των πράξεων προσδίδουν κάθε φορά στο σύνολο στο οποίο έχουν οριστεί μια ορισμένη «αλγεβρική δομή». Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζονται δυο από τις κυριότερες αλγεβρικές δομές: της ομάδας, με μια μόνο εσωτερική πράξη, και του δακτυλίου, με δυο εσωτερικές πράξεις.

Μετά την εισαγωγή των βασικών εννοιών, η παρουσίαση γίνεται με τη σειρά: ημιομάδα - ομάδα, δακτύλιος, σώμα. Κάθε νέα δομή είναι άμεσα συγκρίσιμη με την προηγούμενη, της οποίας άλλωστε είναι ειδική περίπτωση. Έτσι, κάθε φορά στα θεωρήματα που προηγήθηκαν προσθέτονται νέα, τα οποία χαρακτηρίζουν τη νέα δομή και συγχρόνως τη διαφοροποιούν από τις προηγούμενες.

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκουμε: α) να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές ως αυτονόητη την παρουσία πράξεων στα σύνολα που μελετούν, β) να διαπιστώσουν ότι οι κανόνες λογισμού με στοιχεία ενός συνόλου διαμορφώνονται ανεξάρτητα από το είδος των στοιχείων με βάση τις ιδιότητες των πράξεων (π.χ. οι συνέπειες της προσεταιριστικότητας και αντιμεταθετικότητας), γ) να διακρίνουν ότι σε σύνολα διαφορετικά και ετερόκλητα μπορεί να ορίζονται πράξεις με τις ίδιες βασικές ιδιότητες. Να εντοπίζουν δηλαδή σύνολα με την ίδια αλγεβρική δομή. Αυτή η δομή έχει τελικά σημασία. Π.χ. ο νόμος της διαγραφής ισχύει σε οποιαδήποτε ομάδα πολλαπλασιαστική ή προσθετική με στοιχεία αριθμούς, διανύσματα, συναρτήσεις, πίνακες κτλ.
Για την επίτευξη των παραπάνω επιδιώξεων υπάρχει η απαραίτητη υποδομή: παλαιότερη από τη μελέτη των συνόλων $\mathbb{R}$ και F_A που έγινε στην Α΄ Λυκείου και πρόσφατη από τη μελέτη του συνόλου των πινάκων ν×μ και του συνόλου των διανυσμάτων του χώρου, που έγινε στα μαθήματα που προηγήθηκαν.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΡΑΞΗΣ

Γενικά

2.1 Οι «τέσσερις πράξεις» της αριθμητικής ήταν κάποτε το μόνο εργαλείο που διαθέταμε για τη λύση προβλημάτων. Από τότε οι γνώσεις μας σ' ότι αφορά το μαθηματικό λογισμό αναπτύχτηκαν πολύπλευρα. Έτσι, καθώς διευρύναμε την έννοια του αριθμού με την εισαγωγή των αρνητικών, των ρητών, των πραγματικών, επεκτείναμε παράλληλα τις πράξεις στα νέα αυτά αριθμοσύνολα.

Παράλληλα, σε δεύτερο στάδιο, αντικαταστήσαμε τους συγκεκριμένους αριθμούς με γράμματα και προχωρήσαμε σε μετασχηματισμούς αλγεβρικών παραστάσεων, στη λύση εξισώσεων κτλ. στηριζόμενοι στις **ιδιότητες** των πράξεων.

Τέλος μεταφέραμε την έννοια της πράξης και σε σύνολα μη «αριθμητικά». Μιλήσαμε π.χ. για πρόσθεση διανυσμάτων, πολυωνύμων, συναρτήσεων, πινάκων, για ένωση ή τομή συνόλων κτλ.

Είναι καιρός να ορίσουμε τί ακριβώς εννοούμε στην Άλγεβρα με τον όρο *«πράξη»*.

Εσωτερική πράξη

2.2 Μὲ τούς ἀκέραιους 3 καί 5 μπορούμε να ορίσουμε το άθροισμα $3+5 = 8$, τη διαφορά $3-5 = -2$ του *δεύτερου* από τον *πρώτο*, τη δύναμη $3^5 = 243$ με βάση τον *πρώτο* και εκθέτη το *δεύτερο* κτλ. Επίσης, αν A και B είναι δυο πίνακες 2×2 μπορούμε να ορίσουμε έναν τρίτο πίνακα 2×2, π.χ. το γινόμενό τους.

Το κοινό χαρακτηριστικό στις παραπάνω αλγεβρικές πράξεις είναι ότι κάθε φορά παίρνουμε δυο στοιχεία α, β από ένα καθορισμένο σύνολο Ε και με τη συγκεκριμένη πράξη αντιστοιχίζουμε στο ζεύγος (α, β) ένα **μοναδικό** τρίτο στοιχείο του Ε. Μ' άλλα λόγια έχουμε μια απεικόνιση του καρτεσιανού γινομένου Ε×Ε στο Ε. Έτσι δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ **Αν Ε είναι ένα μη κενό σύνολο, τότε κάθε απεικόνιση του Ε×Ε στο Ε ονομάζεται** *εσωτερική πράξη στο Ε* **ή απλούστερα** *πράξη στο Ε.*

Η εικόνα του (α, β) ∈ Ε×Ε λέγεται **εξαγόμενο** ή **αποτέλεσμα** (της πράξης) με **όρους** α και β. Για να συμβολίσουμε αυτό το εξαγόμενο, αν f είναι η πράξη, δε χρησιμοποιούμε τη συναρτησιακή γραφή f(α, β) αλλά, από ιστορική συνήθεια, γράφουμε αfβ, θέτουμε δηλαδή ανάμεσα στα α και β ένα σύμβολο δηλωτικό της πράξης (που μπορεί και να παραλείπεται). Π.χ. γράφουμε α+β, αβ, α^β, α∗β, α∘β κτλ.

Άμεση συνέπεια του ορισμού μιας πράξης ∗ ως απεικόνισης είναι ότι ισχύουν οι συνεπαγωγές

$$\alpha=\beta \Rightarrow \alpha * \gamma=\beta * \gamma \quad \text{και} \quad \alpha=\beta \Rightarrow \gamma * \alpha=\gamma * \beta.$$

Όταν για μια πράξη χρησιμοποιούμε το σύμβολο +, τότε λέμε ότι η πράξη σημειώνεται **προσθετικά**, ενώ όταν χρησιμοποιούμε το ·, λέμε ότι σημειώνεται **πολλαπλασιαστικά**. Καταχρηστικά μπορούμε να ονομάζουμε την πράξη στην πρώτη περίπτωση *«πρόσθεση»* και στη δεύτερη *«πολλαπλασιασμό»*. Όμως πρέπει να τονίσουμε *τη διαφορετική σημασία που έχει π.χ. η πρόσθεση αριθμών από την πρόσθεση διανυσμάτων ή πινάκων ή συναρτήσεων κτλ. αφού, κάθε φορά, πρόκειται για άλλη απεικόνιση.*

Όταν ορίζουμε μια πράξη f σ' ένα σύνολο Ε, θα λέμε ότι «εφοδιάζουμε το Ε με την πράξη f». Στα επόμενα, όταν αναφερόμαστε σε σύνολα **θα θεωρούμε πάντοτε ότι είναι εφοδιασμένα με πράξεις** (και επομένως μη κενά).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Σύμφωνα μέ τόν παραπάνω ορισμό η *αφαίρεση* δεν είναι πράξη στο ℕ, γιατί π.χ. (2-3)∉ℕ. Είναι όμως πράξη στο ℤ, γιατί για κάθε α,β∈ℤ ορίζεται ο (α-β)∈ℤ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η πρόσθεση καθώς και ο πολλαπλασιασμός αριθμών είναι εσωτερικές πράξεις στα σύνολα ℕ, ℤ, ℚ, ℝ.
2. Η «ένωση» και η «τομή» είναι εσωτερικές πράξεις στο σύνολο $\mathcal{P}$ (Ε) όλων των υποσυνόλων του Ε.

3. Η πρόσθεση διανυσμάτων είναι εσωτερική πράξη στο σύνολο $\mathcal{E}$ των διανυσμάτων.
4. Η πρόσθεση καθώς καί ο πολλαπλασιασμός πινάκων ν×ν είναι εσωτερικές πράξεις στο σύνολο Π_ν των πινάκων ν×ν.
5. Η πρόσθεση καθώς και ο πολλαπλασιασμός συναρτήσεων είναι εσωτερικές πράξεις στο σύνολο F_A των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού Α.
6. Μια πράξη σ' ένα πεπερασμένο σύνολο Ε ορίζεται και με πίνακα διπλής εισόδου.

Π.χ. στο σύνολο Ε = {1, -1, α, -α} ορίζεται η πράξη ∗ με το διπλανό πίνακα. (Σε κάθε ζεύγος (x, y) το x είναι στοιχείο της 1ης γραμμής και το y της 1ης στήλης). Έτσι είναι: 1∗1 = 1, 1∗(-1) = -1, ..., α∗(-1) = -α, α∗α = -1, ..., (-α)∗(-α) = -1.

y \ ∗ \ x	1	-1	α	-α
1	1	-1	α	-α
-1	-1	1	-α	α
α	α	-α	-1	1
-α	-α	α	1	-1

Υποσύνολα κλειστά ως προς πράξη

2.3 **Θεωρούμε το σύνολο ℕ εφοδιασμένο με την πρόσθεση και το υποσύνολό του Α των άρτιων φυσικών αριθμών. Είναι φανερό, ότι το άθροισμα δυο άρτιων φυσικών είναι επίσης άρτιος. Δηλαδή το άθροισμα δυο στοιχείων του Α είναι στοιχείο του Α. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι** ***«το Α είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση στο ℕ».*** **Αντίθετα δε συμβαίνει το ίδιο για το σύνολο των πρώτων φυσικών αριθμών, γιατί το άθροισμα δυο πρώτων δεν είναι πάντοτε πρώτος αριθμός. Π.χ. το 2+3 είναι πρώτος, ενώ το 3+5 δεν είναι. Γενικά δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:**

ΟΡΙΣΜΟΣ **Έστω ∗ μια πράξη στο Ε. Ένα μη κενό σύνολο $E_1 \subseteq E$ θα λέγεται** *κλειστό ως προς την πράξη ∗*, **όταν για κάθε (α, β) ∈ $E_1 \times E_1$ είναι α∗β∈E_1**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Στο σύνολο ℤ, το υποσύνολο των άρτιων αριθμών είναι κλειστό ως προς την αφαίρεση, γιατί η διαφορά δυο άρτιων είναι πάντοτε άρτιος αριθμός.
2. Στο σύνολο ℕ, το υποσύνολο των πολλαπλασίων τού 5 είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση καθώς και τον πολλαπλασιασμό στο ℕ, γιατί
$$5k+5\lambda = 5(k+\lambda) \text{ και } (5k)(5\lambda) = 5(5k\lambda)$$
3. Στο σύνολο ℕ, το υποσύνολο των περιττών δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση, γιατί π.χ. 3+5 = 8.

• Η πράξη γενικά

2.4 Ο πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού με διάνυσμα δίνει διάνυσμα, όπως μάθαμε σε προηγούμενα μαθήματα, δηλαδή ο πολλαπλασιασμός αυτός είναι μια απεικόνιση του ℝ×$\mathcal{E}$ στο $\mathcal{E}$.

Ομοίως ο εσωτερικός πολλαπλασιασμός δυο διανυσμάτων είναι μια απεικόνιση του $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ στο $\mathbb{R}$, ο πολλαπλασιασμός ενός πολυωνύμου 2ου βαθμού μ' ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού είναι ένα πολυώνυμο 5ου βαθμού, δηλαδή μια απεικόνιση του $P_2\times P_3$ στο P_5, όπου P_2, P_3 και P_5 τα σύνολα των πολυωνύμων 2ου, 3ου και 5ου βαθμού αντιστοίχως κτλ.

Γενικά, **κάθε απεικόνιση του καρτεσιανού γινομένου A×B δυο μη κενών συνόλων A και B σ' ένα σύνολο E λέγεται πράξη.** Κάθε απεικόνιση του E×E στο E λέγεται ειδικότερα (§2.2) εσωτερική πράξη στο E.

Ασκήσεις: 1, 2, 3, 4

Προσεταιριστικότητα. Αντιμεταθετικότητα

2.5 Από τα πρώτα μας γυμνασιακά χρόνια, όταν ορίζαμε μια πράξη, εξετάζαμε αν έχει ορισμένες ιδιότητες. Π.χ. μάθαμε ότι η πρόσθετη ρητών αριθμών είναι πράξη *«προσεταιριστική»* και *«αντιμεταθετική»*, ενώ η αφαίρεση δεν είναι. Γενικά:

Μια πράξη * στο E λέγεται:

- *προσεταιριστική*, όταν για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in E$ είναι

$$(\alpha*\beta)*\gamma=\alpha*(\beta*\gamma)$$

- *αντιμεταθετική*, όταν για κάθε $\alpha,\beta \in E$ είναι

$$\alpha*\beta=\beta*\alpha$$

Ουδέτερο στοιχείο

2.6 Μάθαμε ακόμη ότι το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων έχει *«ουδέτερο στοιχείο»* ως προς την πρόσθεση το 0 και ως προς τον πολλαπλασιασμό το 1, ενώ το $\mathbb{N}^*$ δεν έχει ουδέτερο στοιχείο ως προς την πρόσθεση. Γενικά:

Το $e\in E$ θα λέγεται *ουδέτερο στοιχείο* **ως προς την πράξη * του E,** όταν για καθε $\alpha \in E$ είναι

$$\alpha*e = e*\alpha = \alpha$$

Ξέρουμε ότι ως προς τον πολλαπλασιασμό φυσικών αριθμών υπάρχει **μοναδικό** ουδέτερο στοιχείο, το 1. Επίσης ως προς την πρόσθεση συναρτήσεων υπάρχει μοναδικό ουδέτερο στοιχείο, η σταθερή συνάρτηση με τιμή μηδέν. Αυτή η μοναδικότητα του ουδέτερου στοιχείου (όταν αυτό υπάρχει) ισχύει γενικά για κάθε πράξη. Συγκεκριμένα ισχύει το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο e ως προς την πράξη * στο E, τότε αυτό είναι μοναδικό.**

Απόδειξη. Αν υπάρχει και δεύτερο ουδέτερο στοιχείο $e'\in E$ ως προς την πράξη *, τότε θα έχουμε:

$$e*e' = e' \qquad \text{[το e ουδέτερο στοιχείο]}$$
$$e*e' = e \qquad \text{[το e' ουδέτερο στοιχείο]}$$

και συνεπώς $e'=e$. Δηλαδή το ουδέτερο στοιχείο (αν υπάρχει) είναι μοναδικό.

Το ουδέτερο στοιχείο (αν υπάρχει) ως προς μια πράξη που σημειώνεται *προσθετικά*, λέγεται **μηδενικό** και συμβολίζεται γενικά με **O**, ενώ ως προς μια πράξη που σημειώνεται *πολλαπλασιαστικά*, λέγεται **μοναδιαίο** και συμβολίζεται με **1**.

Ασκήσεις: 5, 6, 7, 8, 9

Συμμετρικά στοιχεία

2.7 Δυο αντίθετοι αριθμοί α και -α μπορεί να ονομαστούν και συμμετρικοί ως προς την πρόσθεση, γιατί $\alpha+(-\alpha) = (-\alpha)+\alpha = 0$. Γενικά:

Δυο στοιχεία $\alpha,\alpha'\in E$ θα λέγονται *συμμετρικά* **ως προς την πράξη * του E, όταν υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο $e\in E$ ως προς την πράξη αυτή και είναι:**

$$\alpha*\alpha' = \alpha'*\alpha = e$$

Καθένα από τα α και α' λέγεται **συμμετρικό του άλλου.** Είναι αξιοσημείωτο ότι απαραίτητη προϋπόθεση για να γίνει λόγος για συμμετρικά στοιχεία ως προς μια πράξη είναι η ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου ως προς την πράξη αυτή.

Το ουδέτερο στοιχείο e (αν υπάρχει) έχει συμμετρικό το e, γιατί $e*e = e$.

Όπως ξέρουμε ο αντίθετος ενός πραγματικού αριθμού α είναι **μοναδικός.** Το ίδιο συμβαίνει και με τον αντίστροφό του (όταν $\alpha \neq 0$). Αυτή η μοναδικότητα του συμμετρικού στοιχείου οφείλεται, όπως μάθαμε στην Α' Λυκείου, στην προσεταιριστικότητα των αντίστοιχων πράξεων.

Γενικά ισχύει το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω $*$ μια πράξη προσεταιριστική στο Ε με ουδέτερο στοιχείο e. Αν υπάρχει το συμμετρικό $\alpha' \in E$ ενός στοιχείου $\alpha \in E$, τότε αυτό είναι μοναδικό.**

Απόδειξη. Αν υπάρχει και δεύτερο συμμετρικό στοιχείο $\alpha'' \in E$ του α, τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha' * e && \text{[το e ουδέτερο στοιχείο]} \\ &= \alpha' * (\alpha * \alpha'') && \text{[το } \alpha'' \text{ συμμετρικό του } \alpha] \\ &= (\alpha' * \alpha) * \alpha'' && \text{[προσεταιριστική ιδιότητα]} \\ &= e * \alpha'' && \text{[το } \alpha' \text{ συμμετρικό του } \alpha] \\ &= \alpha'' && \text{[το e ουδέτερο στοιχείο]} \end{aligned}$$

Δηλαδή το συμμετρικό του $\alpha \in E$ (εφόσον υπάρχει) είναι μοναδικό.

Το συμμετρικό στοιχείο του $\alpha \in E$ (όταν υπάρχει) ως προς μια πράξη που σημειώνεται:

Προσθετικά	*Πολλαπλασιαστικά*
λέγεται **αντίθετο** του α και συμβολίζεται $-\alpha$	λέγεται **αντίστροφο** του α και συμβολίζεται α^{-1}

Έτσι θα έχουμε αντιστοίχως:

$\boxed{\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0}$	$\boxed{\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1}$

Από τις ισότητες αυτές προκύπτει ότι:

αντίθετο στοιχείο του $-\alpha$ είναι το α, δηλαδή $\boxed{-(-\alpha) = \alpha}$	αντίστροφο στοιχείο του α^{-1} είναι το α, δηλαδή $\boxed{(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν ένα σύνολο E_1, υποσύνολο του Ε, είναι κλειστό ως προς την πράξη $*$ στο Ε και περιέχει δυο στοιχεία που το ένα είναι συμμετρικό του άλλου, τότε, είναι φανερό, ότι θα περιέχει και το ουδέτερο στοιχείο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η πρόσθεση καθώς και ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{Q}$ είναι πράξεις προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές. Μηδενικό στοιχείο είναι το 0 και μοναδιαίο το 1. Τα α και $-\alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{Q}$, είναι αντίθετα στοιχεία, ενώ τα α και α^{-1} για κάθε $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ είναι αντίστροφα.

2. Η πράξη $\cup$ καθώς και η $\cap$ στο σύνολο $\mathcal{P}(E)$ των υποσυνόλων ενός συνόλου $E \neq \varnothing$ είναι

προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές. Ουδέτερο στοιχείο ως προς την $\cup$ είναι το $\varnothing$ και ως προς την $\cap$ το Ε (για κάθε $A \in \mathcal{P}(E)$ είναι $A \cup \varnothing = A$ και $A \cap E = A$). Ως προς τις πράξεις $\cup$ και $\cap$ δεν υπάρχουν συμμετρικά στοιχεία για κανένα Α διαφορετικό από το ουδέτερο στοιχείο. Πράγματι, αν το A' ήταν συμμετρικό του Α ως προς την $\cup$ (ή την $\cap$), θα έπρεπε $A \cup A' = \varnothing$ (ή $A \cap A' = E$), που είναι άτοπο.

3. Η πράξη + στο $\mathbb{N}^*$ είναι προσεταιριστική και αντιμεταθετική. Μηδενικό στοιχείο δεν υπάρχει, συνεπώς δεν υπάρχουν και αντίθετα στοιχεία στο $\mathbb{N}^*$.

4. Η πράξη «ύψωση σε δύναμη» στο $\mathbb{N}^*$ που σε κάθε $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ αντιστοιχίζει το $\alpha^\beta \in \mathbb{N}^*$ δεν είναι αντιμεταθετική (γιατί π.χ. $2^3 \neq 3^2$), ούτε προσεταιριστική (γιατί π.χ. $(2^5)^3 \neq 2^{(5^3)}$). Δεν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη αυτή γιατί, αν $x \in \mathbb{N}^*$ είναι ουδέτερο στοιχείο, τότε θα έπρεπε π.χ. $5^x = x^5 = 5$. Τότε από την $5^x = 5$ θα είναι $x = 1$, οπότε η $x^5 = 5$ γίνεται $1^5 = 5$, που είναι άτοπο. Συνεπώς δε γίνεται λόγος για συμμετρικά στοιχεία.

5. Η πράξη $*$ που ορίζεται στο παράδειγμα 6 της § 2.2 είναι προσεταιριστική, αντιμεταθετική και έχει ουδέτερο στοιχείο το 1. Συμμετρικό του -1 είναι το -1 και του α το $-\alpha$.

6. Η πράξη $*$ που ορίζεται στο $E = \{0, 1, 2\}$ με το διπλανό πίνακα είναι προσεταιριστική, αντιμεταθετική και έχει ουδέτερο στοιχείο το 0. Συμμετρικό του 1 είναι το 2 ($1*2 = 2*1 = 0$).

*	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

7. Η πράξη $\cdot$ στο σύνολο Π_ν των πινάκων $\nu \times \nu$ είναι, όπως ξέρουμε, προσεταιριστική, ενώ δεν είναι αντιμεταθετική. Μοναδιαίο στοιχείο είναι ο πίνακας I_ν, ενώ υπάρχει ο συμμετρικός πίνακας μόνο κάθε αντιστρέψιμου πίνακα.

8. Η πράξη «ημιάθροισμα» στο $\mathbb{Q}$ που σε κάθε $(\alpha,\beta) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ αντιστοιχίζει το $\frac{\alpha+\beta}{2} \in \mathbb{Q}$ είναι αντιμεταθετική ($\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\beta+\alpha}{2}$), αλλά δεν είναι προσεταιριστική γιατί π.χ.

$$\frac{\frac{4+8}{2}+6}{2} \neq \frac{4+\frac{8+6}{2}}{2}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Έστω $*$ μια πράξη στο Ε προσεταιριστική και με ουδέτερο στοιχείο e. Αν υπάρχουν τα συμμετρικά $\alpha', \beta' \in E$ των στοιχείων $\alpha, \beta \in E$, να δειχτεί ότι $(\alpha * \beta)' = \beta' * \alpha'$.**

Πράγματι, έχουμε:

$$(\alpha*\beta)*(\beta' * \alpha') = \alpha*[\beta*(\beta' * \alpha')] = \alpha*[(\beta*\beta')*\alpha'] = \alpha*(e*\alpha') = \alpha*\alpha' = e$$

και ομοίως $(\beta' * \alpha')*(\alpha*\beta) = e$. Συνεπώς θα είναι $(\alpha*\beta)' = \beta' * \alpha'$.

Η παραπάνω ιδιότητα για πράξη που σημειώνεται προσθετικά γράφεται:

$$-(\alpha+\beta) = (-\beta)+(-\alpha)$$

ενώ για πράξη που σημειώνεται πολλαπλασιαστικά γράφεται:

$$(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1}$$

2. Έστω M το σύνολο των πινάκων της μορφής $\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{Z}$. Να δειχτεί ότι:

(i) το M είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό στο σύνολο Π_2 των πινάκων 2×2.

(ii) ο πολλαπλασιασμός στο M είναι αντιμεταθετικός

(iii) για κάθε $A\in M$ υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας $A^{-1}\in M$.

(i) Για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ έχουμε $\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \beta+\alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ και επειδή $(\beta+\alpha)\in\mathbb{Z}$, το M είναι κλειστό ως προς την πράξη · στο Π_2.

(ii) Έχουμε $\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \beta+\alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \alpha+\beta\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ και συνεπώς η πράξη · στο M είναι αντιμεταθετική.

(iii) Είναι $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in M$. Ακόμη, για κάθε $A=\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in M$ είναι $D(A)=1\neq 0$. Επομένως (§1.18) υπάρχει ο A^{-1} και είναι $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in M$.

3. Θεωρούμε το σύνολο E των πινάκων της μορφής $\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 2\alpha & 0\end{bmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

(i) Να αποδείξετε ότι το E είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό στο Π_2.

(ii) Να εξετάσετε αν το E έχει ουδέτερο στοιχείο ως προς τον πολλαπλασιασμό.

(i) Αν $A_1=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0\\ 2\alpha_1 & 0\end{bmatrix}$ και $A_2=\begin{bmatrix}\alpha_2 & 0\\ 2\alpha_2 & 0\end{bmatrix}$ είναι οποιαδήποτε στοιχεία του E, είναι

$$A_1A_2=\begin{bmatrix}\alpha_1\alpha_2 & 0\\ 2\alpha_1\alpha_2 & 0\end{bmatrix}\in E.$$

Ώστε το E είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό στο Π_2.

(ii) Προφανώς $I_2\notin E$. Αν $I'=\begin{bmatrix}e & 0\\ 2e & 0\end{bmatrix}$ είναι το ουδέτερο στοιχείο του E ως προς τον πολλαπλασιασμό, τότε για κάθε στοιχείο $A=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 2\alpha & 0\end{bmatrix}$ του E έχουμε:

$$A\ \ I'=A\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\alpha e & 0\\ 2\alpha e & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 2\alpha & 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow e=1$$

Άρα $I'=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}$. Επειδή (όπως είναι φανερό) ο πολλαπλασιασμός στο E είναι πράξη αντιμεταθετική, είναι και $I'\cdot A=A$, οπότε ο $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ είναι το ουδέτερο στοιχείο του E ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Παρατηρούμε δηλαδή ότι το E, που είναι γνήσιο υποσύνολο του Π_2 κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό και δεν περιέχει το I_2, έχει **άλλο ουδέτερο στοιχείο** ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Ασκήσεις: 10, 11, 12

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Θεώρημα προσεταιριστικότητας

2.8 Έστω ένα σύνολο E εφοδιασμένο με μια πράξη προσεταιριστική που σημειώνεται προσθετικά. Το άθροισμα ν στοιχείων του E για $\nu>2$ ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\nu-1})+\alpha_\nu,$$

δηλαδή $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu=[\ldots[(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3]+\ldots+\alpha_{\nu-1}]+\alpha_\nu$

Π.χ. αν A, B, Γ, Δ είναι πίνακες 2×2, είναι $A+B+\Gamma+\Delta=(A+B+\Gamma)+\Delta=[(A+B)+\Gamma]+\Delta$. Επειδή όμως η πρόσθεση πινάκων είναι προσεταιριστική, το προηγούμενο άθροισμα μπορεί να γραφεί ακόμη ως:

$$(A+B)+\Gamma+\Delta \ \text{ ή } \ [A+(B+\Gamma)]+\Delta \ \text{ ή } \ A+(B+\Gamma+\Delta) \ \text{ ή } \ A+(B+\Gamma)+\Delta \ \text{ κτλ.}$$

Δηλαδή το $A+B+\Gamma+\Delta$ ισούται και με άλλα αθροίσματα που σχηματίζουμε με τους ίδιους προσθετέους διατηρώντας τη διάταξή τους.

Γενικά αποδεικνύεται[1] το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 **Έστω E ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια πράξη προσεταιριστική που σημειώνεται προσθετικά και $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu\in E$. Το άθροισμα**

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu$$

ισούται με κάθε άλλο άθροισμα το οποίο σχηματίζεται με τους ίδιους όρους και με διατήρηση της διάταξής τους.

Το θεώρημα αυτό επιτρέπει, πολλές φορές, ευκολότερο υπολογισμό ενός αθροίσματος όχι με τη διαδικασία του ορισμού, αλλά με άλλο κατάλληλο προσεταιρισμό των όρων του.

Π.χ. αν $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 4\\ -3 & 6\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 3 & -6\end{bmatrix}$, $\Delta=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -5 & 1\end{bmatrix}$,

έχουμε $A+B+\Gamma+\Delta=A+(B+\Gamma)+\Delta=A+\mathbf{O}+\Delta=A+\Delta=\begin{bmatrix}3 & -3\\ -3 & 0\end{bmatrix}$

Αν επιπλέον η πράξη + στο E είναι αντιμεταθετική, αποδεικνύεται[1] και το

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 **Έστω E ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια πράξη προσεταιριστική και αντιμεταθετική που σημειώνεται προσθετικά και $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu\in E$. Το άθροισμα**

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu$$

ισούται με κάθε άλλο που μπορεί να σχηματιστεί με τους $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ με οποιαδήποτε διάταξη και αν ληφθούν, μια φορά ο καθένας.

Π.χ. αν $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ -7 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-6 & -2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}-5 & -3\\ 7 & -4\end{bmatrix}$, $\Delta=\begin{bmatrix}3 & -9\\ 1 & 4\end{bmatrix}$, $E=\begin{bmatrix}6 & 2\\ -3 & -6\end{bmatrix}$, θα έχουμε:

$$A+B+\Gamma+\Delta+E=A+\Gamma+B+E+\Delta=(A+\Gamma)+(B+E)+\Delta=(\mathbf{O}+\mathbf{O})+\Delta=\Delta=\begin{bmatrix}3 & -9\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

(1) Η απόδειξη παραλείπεται.

Όταν η πράξη σημειώνεται πολλαπλασιαστικά ή με οποιοδήποτε άλλο σύμβολο, τα παραπάνω θεωρήματα διατυπώνονται αναλόγως.

Το άθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$ γράφεται συντομότερα $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i$ και διαβάζεται: *άθροισμα των α_i από 1 ως ν*. Είναι δηλαδή:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i$$

Επίσης το γινόμενο $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu$ γράφεται συντομότερα $\prod_{i=1}^{\nu} \alpha_i$ και διαβάζεται: *γινόμενο των α_i από 1 ως ν*. Έχουμε δηλαδή:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu = \prod_{i=1}^{\nu} \alpha_i$$

Σημείωση

Τα σύμβολα $\sum$ και $\prod$ χρησιμοποιούνται στη διεθνή βιβλιογραφία και είναι τα αντίστοιχα ελληνικά γράμματα των αρχικών των λέξεων Somme, Sum : άθροισμα και Produit, Product : γινόμενο.

Ασκήσεις: 13, 14, 15

Δυνάμεις. Πολλαπλάσια

2.9 Έστω ένα σύνολο Ε εφοδιασμένο με μια πράξη προσεταιριστική και $\alpha \in E$. Αν η πράξη αυτή σημειώνεται αντιστοίχως:

πολλαπλασιαστικά	*προσθετικά*
τότε ορίζουμε τη **«δύναμη α^ν»** ($\nu \in \mathbb{N}^*$) με:	το **«ν-πλάσιο του α»** ($\nu \in \mathbb{N}^*$) με:
$\alpha^\nu = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu\ \nu=1 \\ \alpha^{\nu-1} \cdot \alpha = \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha, & \alpha\nu\ \nu>1 \end{cases}$	$\nu\alpha = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu\ \nu=1 \\ (\nu-1)\alpha + \alpha = \alpha + \alpha + \ldots + \alpha, & \alpha\nu\ \nu>1 \end{cases}$

- Από τους παραπάνω ορισμούς και το θεώρημα 1 της προσεταιριστικότητας (§ 2.8) έχουμε, για κάθε $\alpha \in E$ και $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$, τις γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων και των πολλαπλασίων αντιστοίχως:

(1)	$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$	$\mu\alpha + \nu\alpha = (\mu+\nu)\alpha$	(1΄)
(2)	$(\alpha^\nu)^\mu = \alpha^{\mu\nu}$	$\mu(\nu\alpha) = (\mu\nu)\alpha$	(2΄)

- Αν επιπλέον η πράξη στο Ε είναι αντιμεταθετική, τότε για κάθε $\alpha, \beta \in E$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$ έχουμε ακόμη:

(3)	$(\alpha \cdot \beta)^\nu = (\alpha \cdot \beta) \cdot (\alpha \cdot \beta) \cdot \ldots \cdot (\alpha \cdot \beta)$ $= (\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha) \cdot (\beta \cdot \beta \cdot \ldots \cdot \beta)$ $= \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$	$\nu(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)+\ldots+(\alpha+\beta)$ $= (\alpha+\alpha+\ldots+\alpha)+(\beta+\beta+\ldots+\beta)$ $= \nu\alpha + \nu\beta$	(3΄)

- Αν τώρα υπάρχει στο Ε το μοναδιαίο **1** (το μηδενικό **Ο**) στοιχείο της πράξης, τότε ορίζεται η έννοια της δύναμης (του πολλαπλασίου) του $\alpha \in E$ και όταν $\nu = 0$

(4)	$\alpha^0 = 1$	$0\alpha = O$	(4΄)

- Αν τέλος υπάρχει ο αντίστροφος α^{-1} (ή ο αντίθετος $-\alpha$) του $\alpha \in E$, τότε όπως αποδεικνύεται επαγωγικά υπάρχει ο αντίστροφος του α^ν (ή ο αντίθετος του $\nu\alpha$) και είναι ο $(\alpha^{-1})^\nu$ [ή ο $\nu(-\alpha)$]. Δηλαδή $(\alpha^\nu)^{-1} = (\alpha^{-1})^\nu$ [ή $-(\nu\alpha) = \nu(-\alpha)$]
Έτσι ορίζεται στο Ε η έννοια της δύναμης (του πολλαπλασίου) και για εκθέτες (πολλαπλάσια) αρνητικούς ακεραίους ως εξής:

(5)	$\alpha^{-\nu} = (\alpha^\nu)^{-1} = (\alpha^{-1})^\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$	$(-\nu)\alpha = -(\nu\alpha) = \nu(-\alpha), \nu \in \mathbb{N}^*$	(5΄)

Άμεση συνέπεια των τελευταίων επεκτάσεων είναι ότι οι προηγούμενοι τύποι ισχύουν για κάθε $k, \lambda \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 16

ΟΜΑΔΕΣ

Η έννοια της ομάδας

2.10 Θεωρήσαμε συχνά ως τώρα σύνολα εφοδιασμένα με μια πράξη *προσεταιριστική* και με *ουδέτερο στοιχείο*. Σ' ένα τέτοιο σύνολο Ε ένα στοιχείο μπορεί να έχει ή να μην έχει συμμετρικό. Π.χ. στο σύνολο των πινάκων με πράξη τον πολλαπλασιασμό, συμμετρικό έχουν μόνο οι αντιστρέψιμοι πίνακες.

Θα εξετάσουμε τώρα την αξιοσημείωτη περίπτωση που **κάθε** $\alpha \in E$ έχει συμμετρικό στοιχείο, όπως π.χ. συμβαίνει στο F_A με πράξη την πρόσθεση, στο $\mathbb{Q}^*$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό κτλ. Καθένα από τα σύνολα αυτά χαρακτηρίζεται με τον όρο *«ομάδα»*.

ΟΡΙΣΜΟΣ **Ένα σύνολο G εφοδιασμένο με μια πράξη $*$ λέγεται *ομάδα*, όταν η πράξη αυτή είναι προσεταιριστική, υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο και κάθε στοιχείο τού G έχει συμμετρικό στοιχείο**[1].

(1) Στην προηγούμενη παράγραφο εξετάσαμε σύνολα εφοδιασμένα με μια πράξη *προσεταιριστική*. Τα σύνολα αυτά τα λέμε *ημιομάδες*. Π.χ. το $\mathbb{N}^*$ είναι προσθετική ημιομάδα.

Αν επιπλέον η πράξη $*$ στο G είναι *αντιμεταθετική*, τότε η ομάδα G λέγεται **αντιμεταθετική**[1]. Αν η πράξη στο G σημειώνεται προσθετικά, τότε το G λέγεται **προσθετική ομάδα**, ενώ αν σημειώνεται πολλαπλασιαστικά, λέγεται **πολλαπλασιαστική ομάδα.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Τα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, F_A, $\Pi_{\nu\times\mu}$, $\mathcal{E}$ είναι αντιμεταθετικές προσθετικές ομάδες.
2. Τα $\mathbb{Q}^*$ και $\mathbb{R}^*$ είναι αντιμεταθετικές πολλαπλασιαστικές ομάδες.
3. Τα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z}^*$ δεν είναι πολλαπλασιαστικές ομάδες, γιατί δεν υπάρχει ο αντίστροφος κάθε στοιχείου (αντίστροφο έχει μόνο ο 1 και ο -1).
4. Το $\mathbb{N}^*$ δεν είναι προσθετική ομάδα, γιατί δεν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο. Επίσης το $\mathbb{N}$ δεν είναι προσθετική ομάδα, γιατί δεν υπάρχει ο αντίθετος κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ (αντίθετο έχει μόνο το 0).
5. Το σύνολο $E = \{1, -1, \alpha, -\alpha\}$ με πράξη $*$, όπως ορίστηκε στο παράδ. 6 της §2.2, είναι αντιμεταθετική ομάδα. Ένα πεπερασμένο σύνολο που είναι ομάδα χαρακτηρίζεται ως *«πεπερασμένη ομάδα»*.

Είναι φανερό ότι σε κάθε ομάδα ισχύουν τα συμπεράσματα των παραγράφων 2.6, 2.7, 2.8 και 2.9. Επιπλέον κάθε ομάδα έχει και τις επόμενες ιδιότητες.

Νόμος διαγραφής

2.11 Το σύνολο $\mathbb{R}^*$ είναι πολλαπλασιαστική ομάδα και ξέρουμε ότι από την ισότητα $2\alpha = 2\beta$ προκύπτει $\alpha = \beta$. Λέμε τότε ότι το 2 είναι *«απλοποιήσιμο στοιχείο»* της ομάδας $\mathbb{R}^*$. Το ίδιο ισχύει για κάθε $\gamma \in \mathbb{R}^*$. Αντίθετα το 0 δεν είναι απλοποιήσιμο στοιχείο ως προς τον πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{Q}$ (το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πολλαπλασιαστική ομάδα αφού το 0 δεν έχει αντίστροφο). Γενικά σε κάθε ομάδα ισχύει το επόμενο θεώρημα που είναι γνωστό ως *«νόμος διαγραφής»*.

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν α, β, γ είναι στοιχεία της ομάδας G, τότε**

$$\alpha * \gamma = \beta * \gamma \Rightarrow \alpha = \beta \quad \text{και} \quad \gamma * \alpha = \gamma * \beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

Απόδειξη. Έστω $\gamma' \in G$ το συμμετρικό στοιχείο του γ. Τότε έχουμε

(1) Λέγεται ακόμη *«αβελιανή ομάδα»*, από το όνομα του μαθηματικού Abel (1802-1829).

$$\alpha*\gamma = \beta*\gamma \Rightarrow (\alpha*\gamma)*\gamma' = (\beta*\gamma)*\gamma' \Rightarrow \alpha*(\gamma*\gamma') = \beta*(\gamma*\gamma') \Rightarrow \alpha*e = \beta*e \Rightarrow \alpha = \beta$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται η δεύτερη συνεπαγωγή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Το σύνολο $\mathbf{M} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{Z} \right\}$ είναι αντιμεταθετική πολλαπλασιαστική ομάδα (εφαρ. 2, §2.7). Συνεπώς για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}$ $\left(\text{ή ισοδύναμα, για κάθε } \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M} \right)$ από την ισότητα $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ προκύπτει $\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. Το σύνολο $\mathbb{N}^*$ με πράξη το «Μ.Κ.Δ.» **δεν είναι ομάδα,** γιατί δεν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο. Εδώ δεν ισχύει ο νόμος της διαγραφής. Π.χ. το 2 δεν είναι απλοποιήσιμο στοιχείο, γιατί ενώ ισχύει Μ.Κ.Δ. (2, 5) = Μ.Κ.Δ. (2, 7), δεν ισχύει 5 = 7.

Οι εξισώσεις $x * \beta = \alpha$ και $\beta * x = \alpha$

2.12 Είναι γνωστό ότι κάθε εξίσωση της μορφής $\beta x = \alpha$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}^*$, έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{Q}^*$. Ομοίως, αν $f, g, x \in F_A$, η εξίσωση $f + x = g$ έχει μοναδική λύση στο F_A. Η μοναδικότητα της λύσης μιας εξίσωσης είναι βασική και ισχύει σε κάθε ομάδα. Έχουμε συγκεκριμένα το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν το σύνολο G εφοδιασμένο με την πράξη $*$ είναι ομάδα, τότε καθεμιά από τις εξισώσεις:**

$$\textbf{(1)} \quad x * \beta = \alpha \quad \textbf{και} \quad \beta * x = \alpha \quad \textbf{(2)}$$

με $\alpha, \beta \in G$, έχει μοναδική λύση στο G.

Απόδειξη. Αν β' είναι το συμμετρικό του β και e το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας, τότε έχουμε:

$$x*\beta = \alpha \Leftrightarrow (x*\beta)*\beta' = \alpha*\beta' \Leftrightarrow x*(\beta*\beta') = \alpha*\beta' \Leftrightarrow x*e = \alpha*\beta'$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x = \alpha*\beta'} \quad (3)$$

Ομοίως η μοναδική λύση της (2) είναι η

$$\boxed{x = \beta'*\alpha} \quad (4)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν η ομάδα G είναι αντιμεταθετική, τότε οι εξισώσεις (1), (2) είναι ισοδύναμες και έχουν μοναδική λύση τη $x = \alpha*\beta' = \beta'*\alpha$

2. Αν G είναι μια προσθετική ομάδα, τότε η εξίσωση (1) γράφεται $x+\beta=\alpha$ και έχει τη μοναδική λύση $x=\alpha+(-\beta)$. Η λύση αυτή γράφεται απλούστερα $x=\alpha-\beta$ και λέγεται, όπως ξέρουμε, *«διαφορά του β από τον α»*. Με τον τύπο $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ ορίζεται η πράξη *«αφαίρεση»* σε κάθε προσθετική ομάδα.

3. Αν G είναι μια πολλαπλασιαστική ομάδα, τότε η εξίσωση (1) γράφεται $x\cdot\beta=\alpha$ και έχει τη μοναδική λύση $x=\alpha\cdot\beta^{-1}$ που γράφεται και $x=\alpha:\beta$ και λέγεται, όπως ξέρουμε, *«πηλίκο του α με τον β»*. Με τον τύπο $\alpha:\beta=\alpha\cdot\beta^{-1}$ ορίζεται η πράξη *«διαίρεση»* σε κάθε πολλαπλασιαστική ομάδα.

Η έννοια της υποομάδας

2.13 Το σύνολο A των άρτιων ακεραίων, υποσύνολο της προσθετικής ομάδας $\mathbb{Z}$, είναι και αυτό μια προσθετική ομάδα, γιατί:

- είναι κλειστό ως προς την πρόθεση
- $0\in A$
- ο αντίθετος κάθε άρτιου ($\alpha\in A$) είναι επίσης άρτιος ($-\alpha\in A$)

Το σύνολο A χαρακτηρίζεται ως *«υποομάδα»* της ομάδας $\mathbb{Z}$.

Σημείωση

Η πρόσθεση στο A δε συμπίπτει (ως απεικόνιση) με την πρόσθεση στο $\mathbb{Z}$, αλλά είναι περιορισμός της.

Γενικά δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ **Ένα υποσύνολο G_1 μιας ομάδας G λέγεται *υποομάδα* της G, όταν το G_1 είναι το ίδιο ομάδα ως προς την πράξη της G (που περιορίζεται στο G_1).**

Το ουδέτερο στοιχείο e μιας ομάδας G είναι και ουδέτερο στοιχείο κάθε υποομάδας της.

Πράγματι, αν e_1 είναι το ουδέτερο στοιχείο μιας υποομάδας G_1 και $\alpha\in G_1$, τότε θα έχουμε

$$\alpha * e_1 = \alpha = \alpha * e$$

οπότε $e_1 = e$.

Για το χαρακτηρισμό του G_1 ως υποομάδας έχουμε το ακόλουθο κριτήριο:

Ένα υποσύνολο G_1 μιας ομάδας G είναι υποομάδα της G, αν και μόνο αν:

1. **Το G_1 είναι κλειστό ως προς την πράξη της G.**
2. **Το συμμετρικό κάθε στοιχείου του G_1 ανήκει στο G_1.**

Πράγματι, αν το G_1 είναι υποομάδα της G, τότε είναι ομάδα ως προς την πράξη $*$ της G και συνεπώς ισχύουν οι (1) και (2).

Αντιστρόφως, έστω ότι για το G_1 ισχύουν οι (1) και (2). Αν α' είναι το συμμετρικό του $\alpha\in G_1$, τότε θα είναι $\alpha'\in G_1$ και συνεπώς $\alpha*\alpha'\in G_1$. Δηλαδή το ουδέτερο στοιχείο $e=\alpha*\alpha'$ ανήκει στο G_1. Άρα το G_1 είναι ομάδα (υποομάδα της G).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Το σύνολο $\mathbb{Z}$ καθώς και το $\mathbb{Q}$ είναι υποομάδες της προσθετικής ομάδας $\mathbb{R}$.
2. Το $\mathbb{Q}^*$ είναι υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{R}^*$.
3. Το $\mathbb{N}^*$ είναι κλειστό υποσύνολο της προσθετικής ομάδας $\mathbb{Z}$, αλλά δεν είναι ομάδα. Συνεπώς το $\mathbb{N}^*$ δεν είναι υποομάδα της $\mathbb{Z}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν e είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας G, τότε, όπως διαπιστώνουμε αμέσως, το $\{e\}$ είναι υποομάδα της G.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Στο $\mathbb{Q}$ ορίζουμε την πράξη $*$ με $\alpha*\beta=\alpha+\beta+\alpha\cdot\beta$ (+ και · οι συνήθεις πράξεις στο $\mathbb{Q}$). Να δειχτεί ότι: (i) Το σύνολο $\mathbb{Q}_1=\mathbb{Q}-\{-1\}$ είναι κλειστό ως προς την $*$. (ii) Το $\mathbb{Q}_1$ με την $*$ είναι αντιμεταθετική ομάδα.**

(i) Για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}_1$ έχουμε:
$\alpha*\beta+1=\alpha+\beta+\alpha\beta+1=(\alpha+1)(\beta+1)\neq 0$. Δηλαδή $\alpha*\beta\neq -1$, οπότε $\alpha*\beta\in\mathbb{Q}_1$.

(ii) Είναι φανερό ότι η $*$ στο $\mathbb{Q}_1$ είναι αντιμεταθετική. Ακόμη, για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}_1$ έχουμε:
$(\alpha*\beta)*\gamma=(\alpha+\beta+\alpha\beta)*\gamma=(\alpha+\beta+\alpha\beta)+\gamma+(\alpha+\beta+\alpha\beta)\cdot\gamma=\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta\gamma$ και ομοίως $\alpha*(\beta*\gamma)=\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta\gamma$. Συνεπώς η πράξη $*$ στο $\mathbb{Q}_1$ είναι προσεταιριστική. Αν η $*$ στο $\mathbb{Q}_1$ έχει ουδέτερο στοιχείο το $x\in\mathbb{Q}_1$, θα έχουμε:

$$\alpha*x=\alpha \Leftrightarrow \alpha+x+\alpha x=\alpha \Leftrightarrow x(\alpha+1)=0 \Leftrightarrow x=0$$

Συνεπώς η $*$ έχει ουδέτερο στοιχείο το $0\in\mathbb{Q}_1$. Τέλος, αν υπάρχει το συμμετρικό α' κάθε $\alpha\in\mathbb{Q}_1$, θα έχουμε:
$\alpha'*\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha'+\alpha+\alpha'\cdot\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha'(\alpha+1)=-\alpha \Leftrightarrow \alpha'=\dfrac{-\alpha}{\alpha+1}$.

Δηλαδή κάθε $\alpha\in\mathbb{Q}_1$ έχει συμμετρικό το $\dfrac{-\alpha}{\alpha+1}\in\mathbb{Q}_1$.

Συνεπώς το $\mathbb{Q}_1$ με πράξη την $*$ είναι αντιμεταθετική ομάδα.

2. **Στην ομάδα $\mathbb{Q}_1$ της προηγούμενης εφαρμογής να επιλυθούν οι εξισώσεις:**
(i) $8*(2x-1)=(x-4)*8$ (ii) $(2x-3)*6=6$ (iii) $(x+1)*(-x+11)=(x+1)*(x^2-2x+5)$.
Η επίλυση των εξισώσεων γίνεται με την προϋπόθεση ότι οι όροι στις πράξεις είναι $\neq -1$.

Επειδή το σύνολο Q_1 με την πράξη $*$ είναι αντιμεταθετική ομάδα, θα έχουμε (§ 2.12):

(i) $8*(2x-1) = (x-4)*8 \Leftrightarrow 8*(2x-1) = 8*(x-4) \Leftrightarrow 2x-1 = x-4 \Leftrightarrow x = -3$.

Η λύση είναι δεκτή γιατί για $x=-3$ οι όροι $2x-1$ και $x-4$ είναι $\neq -1$.

(ii) Είναι $6 = 0+6+0\cdot 6 = 0*6$ και συνεπώς:

$(2x-3)*6 = 6 \Leftrightarrow (2x-3)*6 = 0*6 \Leftrightarrow 2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Ρίζα δεκτή

(iii) Θα έχουμε:

$(x+1)*(-x+11) = (x+1)*(x^2-2x+5) \Leftrightarrow x^2-2x+5 = (-x+11) \Leftrightarrow x^2-x-6 = 0 \Leftrightarrow (x=-2$ ή $x = 3)$.

Δεκτή είναι μόνο η $x=3$ γιατί για $x=-2$ είναι $x+1 = -1 \notin Q_1$

3. Στο σύνολο $M = \left\{\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix} : x\in\mathbb{Z}\right\}$ να λυθεί η εξίσωση με άγνωστο X:

$$\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix} X = \begin{bmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Από την εφαρμογή 2 της § 2.7 προκύπτει ότι το **M** είναι αντιμεταθετική πολλαπλασιαστική ομάδα. Άρα (§ 2.13) κάθε εξίσωση της μορφής $A\cdot X = B$ με $A,B\in M$ έχει τη μοναδική λύση $X = A^{-1}B$. Έτσι, επειδή $A^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -\alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, θα έχουμε:

$$X = \begin{bmatrix}1 & -\alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \beta-\alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ασκήσεις: 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24

ΣΥΝΟΛΑ ΕΦΟΔΙΑΣΜΕΝΑ ΜΕ ΔΥΟ ΠΡΑΞΕΙΣ

Επιμεριστική ιδιότητα

2.14 Γνωρίσαμε ήδη σύνολα εφοδιασμένα με δυο πράξεις, πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, όπως π.χ. το $\mathbb{R}$, το σύνολο Π_ν των πινάκων ν×ν κτλ. Στα σύνολα αυτά, όπως ξέρουμε, ο πολλαπλασιασμός είναι πράξη *«επιμεριστική»* ως προς την πρόσθεση. Π.χ. για κάθε $A,B,\Gamma\in\Pi_\nu$ ισχύουν οι ισότητες:

$$A(B+\Gamma) = AB+A\Gamma \quad \text{και} \quad (B+\Gamma)A = BA+\Gamma A$$

Εξάλλου στο $\mathbb{R}^*$ η διαίρεση είναι πράξη επιμεριστική ως προς την πρόσθεση μόνο από «δεξιά», δηλαδή είναι $(\beta+\gamma):\alpha = (\beta:\alpha) + (\gamma:\alpha)$,

ενώ δεν ισχύει η $\alpha:(\beta+\gamma) = (\alpha:\beta) + (\alpha:\gamma)$.

Γενικά έστω ένα σύνολο E εφοδιασμένο με δυο πράξεις $*$ και $\circ$. Τότε:

Η πράξη $\circ$ λέγεται *επιμεριστική* ως προς την $*$, όταν για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in E$ είναι:

(1) $\alpha\circ(\beta*\gamma) = (\alpha\circ\beta) * (\alpha\circ\gamma)$ και $(\beta*\gamma)\circ\alpha = (\beta\circ\alpha) * (\gamma\circ\alpha)$ (2)

Είναι φανερό ότι, αν η πράξη $\circ$ είναι αντιμεταθετική, τότε η (2) είναι συνέπεια της (1). Αν η πράξη $\circ$ δεν είναι αντιμεταθετική τότε, αν ισχύει η (1) λέμε ότι η πράξη αυτή είναι *αριστερά επιμεριστική* ως προς την πράξη $*$, ενώ αν ισχύει η (2) λέμε ότι η πράξη $\circ$ είναι *δεξιά επιμεριστική* ως προς την $*$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ο πολλαπλασιασμός στο σύνολο F_A των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού A είναι πράξη επιμεριστική ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση συναρτήσεων.
2. Η ένωση (αντιστοίχως η τομή) στο σύνολο $\mathcal{P}(E)$ των υποσυνόλων του $E \neq \varnothing$, είναι επιμεριστική ως πρός την τομή (αντ. την ένωση) συνόλων. Δηλαδή καθεμιά από τις πράξεις $\cup$ και $\cap$ στο $\mathcal{P}(E)$ είναι επιμεριστική ως προς την άλλη.
3. Η πράξη *«ύψωση σε δύναμη»* στο $\mathbb{N}^*$ είναι δεξιά επιμεριστική ως προς τον πολλαπλασιασμό. Πράγματι είναι $(\alpha\cdot\beta)^\gamma = (\alpha^\gamma)\cdot(\beta^\gamma)$, ενώ δεν ισχύει $\gamma^{(\alpha\cdot\beta)} = (\gamma^\alpha)\cdot(\gamma^\beta)$.

Στα επόμενα θα αναφερόμαστε γενικά σε σύνολα εφοδιασμένα με δυο πράξεις, τις οποίες, για λόγους απλότητας, θα σημειώνουμε προσθετικά την πρώτη και πολλαπλασιαστικά τη δεύτερη.

Όταν δεν αναφέρονται ρητά οι πράξεις, θα *εννοούμε ότι είναι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός.*

Άσκηση 25

Η έννοια του δακτυλίου

2.15 Στην § 2.10 είδαμε ότι το $\mathbb{Z}$ είναι αντιμεταθετική προσθετική ομάδα. Το $\mathbb{Z}$ όμως είναι εφοδιασμένο και με μια δεύτερη πράξη (τον πολλαπλασιασμό), που είναι προσεταιριστική, έχει μοναδιαίο στοιχείο (το 1) και είναι επιμεριστική ως προς την πρόσθεση. Ένα τέτοιο σύνολο χαρακτηρίζεται με τον όρο *«δακτύλιος»*.

ΟΡΙΣΜΟΣ **Ένα μη κενό σύνολο A εφοδιασμένο με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό λέγεται *δακτύλιος*[1], όταν:**

1. **είναι αντιμεταθετική προσθετική ομάδα και**
2. **ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός, έχει μοναδιαίο στοιχείο και είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση.**

Αν επιπλέον ο πολλαπλασιασμός είναι *αντιμεταθετικός,* τότε το A λέγεται **αντιμεταθετικός δακτύλιος.** Οι ιδιότητες που καθορίζουν ένα δακτύλιο A συνοψίζονται στον επόμενο πίνακα ($\alpha,\beta,\gamma\in A$).

(1) Στη βιβλιογραφία πολλές φορές, στον ορισμό του δακτυλίου δεν αναφέρεται το μοναδιαίο στοιχείο. Τότε ο δακτύλιος, όπως ορίστηκε παραπάνω, αναφέρεται ως «δακτύλιος με μονάδα».

Ιδιότητες	+	·	
προσεταιριστική	$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$	$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$	
αντιμεταθετική	$\alpha+\beta = \beta+\alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$	*αντιμεταθετικός*
ουδέτερο στοιχείο	$\alpha+\mathbf{O} = \alpha$	$\alpha\mathbf{1} = \mathbf{1}\alpha = \alpha$	
συμμετρικό στοιχείο	$\alpha+(-\alpha) = \mathbf{O}$	-	
επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$,	$(\beta+\gamma)\alpha = \beta\alpha+\gamma\alpha$	

Είναι φανερό ότι σε κάθε δακτύλιο ισχύουν, ως προς την πρόσθεση, οι ιδιότητες που ισχύουν σε κάθε ομάδα, και ως προς τον πολλαπλασιασμό, εκείνες που απορρέουν από την προσεταιριστική, (αντιμεταθετική) και του μοναδιαίου στοιχείου.

Είναι αξιοσημείωτο ότι σ' ένα δακτύλιο ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως πρός την πρόσθεση, όχι όμως και η πρόσθεση ως προς τον πολλαπλασιασμό.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ένα μονομελές σύνολο, π.χ. το $A = \{\alpha\}$, το εφοδιάζουμε με τις μόνες δυνατές πράξεις $\alpha+\alpha = \alpha$, $\alpha\cdot\alpha = \alpha$. Είναι εύκολο να δειχτεί ότι είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μηδενικό και μοναδιαίο στοιχείο το α ($\mathbf{O} = \mathbf{1} = \alpha$). Ένας τέτοιος δακτύλιος χαρακτηρίζεται ως **μηδενικός δακτύλιος.**

Στα επόμενα όπου αναφέρουμε τον όρο *«δακτύλιος»* θα εννοούμε *«μη μηδενικός δακτύλιος»*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Τα σύνολα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ είναι αντιμεταθετικοί δακτύλιοι με μηδενικό στοιχείο το 0 και μοναδιαίο το 1. Ομοίως το σύνολο F_A (με τις ίδιες πράξεις) είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μηδενικό στοιχείο τη σταθερή συνάρτηση ω με $\omega(x) = 0$ και μοναδιαίο τη σταθερή συνάρτηση u με $u(x) = 1$.
2. Το σύνολο Π_2 των πινάκων 2×2 είναι δακτύλιος με μηδενικό στοιχείο τον πίνακα $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και μοναδιαίο τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
3. Αν στο σύνολο $\mathbb{Z}$ θεωρήσουμε ως δεύτερη πράξη αντί του πολλαπλασιασμού την αφαίρεση ακεραίων, τότε **δεν είναι δακτύλιος**, γιατί η αφαίρεση δεν είναι πράξη προσεταιριστική (π.χ. $(2-5)-3 \neq 2-(5-3)$).

Σημείωση

Στον ορισμό του δακτυλίου η βασική ιδιότητα της αντιμεταθετικότητας της πρώτης πράξης θα μπορούσε να παραληφθεί γιατί αποδεικνύεται ότι προκύπτει από τις άλλες συνθήκες.

Το O ως απορροφητικό στοιχείο

2.16 Στο δακτύλιο $\mathbb{Z}$ ξέρουμε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{Z}$ είναι $\alpha\cdot 0 = 0\cdot\alpha = 0$. Επίσης, για κάθε $f\in F_A$ είναι $f\cdot\mathbf{O} = \mathbf{O}\cdot f = \mathbf{O}$, όπου $\mathbf{O}$ η μηδενική συνάρτηση στο F_A. Η ιδιότητα αυτή του μηδενικού στοιχείου είναι γενική και ισχύει σε κάθε δακτύλιο. Συγκεκριμένα έχουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν A είναι ένας δακτύλιος, τότε για κάθε $\alpha\in A$ είναι

$$\alpha\cdot\mathbf{O} = \mathbf{O}\cdot\alpha = \mathbf{O}$$

Απόδειξη. Για κάθε $\beta\in A$ έχουμε: $\alpha\cdot\beta + \mathbf{O} = \alpha\cdot\beta = \alpha\cdot(\beta+\mathbf{O}) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\mathbf{O}$ και συνεπώς (§2.11) θα είναι $\alpha\cdot\mathbf{O} = \mathbf{O}$. Ομοίως βρίσκουμε $\mathbf{O}\cdot\alpha = \mathbf{O}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι σε κάθε μη μηδενικό δακτύλιο F είναι $\mathbf{O} \neq \mathbf{1}$. Γιατί, αν ήταν $\mathbf{O} = \mathbf{1}$, τότε για κάθε $\alpha\in F$ θα είχαμε $\alpha = \alpha\cdot\mathbf{1} = \alpha\cdot\mathbf{O} = \mathbf{O}$, δηλαδή το μηδενικό δακτύλιο. Έτσι κάθε μη μηδενικός δακτύλιος έχει τουλάχιστο δυο στοιχεία.

Κανόνας προσήμων

2.17 Στο δακτύλιο $\mathbb{Z}$ ξέρουμε ακόμη ότι ισχύει ο *«κανόνας των προσήμων»* για τον πολλαπλασιασμό. Γενικά ισχύει το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν α, β είναι στοιχεία ενός δακτυλίου A, τότε:

(i) $(-\alpha)\cdot\beta = \alpha\cdot(-\beta) = -(\alpha\cdot\beta)$, **(ii)** $(-\alpha)\cdot(-\beta) = \alpha\cdot\beta$

Απόδειξη

(i) Έχουμε $(-\alpha)+\alpha = \mathbf{O}$ και συνεπώς (§ 2.16)
$[(-\alpha)+\alpha]\cdot\beta = \mathbf{O}\cdot\beta = \mathbf{O}$ ή $(-\alpha)\cdot\beta+\alpha\cdot\beta = \mathbf{O}$. Άρα $(-\alpha)\cdot\beta = -(\alpha\cdot\beta)$.
Ομοίως βρίσκουμε $\alpha\cdot(-\beta) = -(\alpha\cdot\beta)$.

(ii) Λόγω της (i) έχουμε: $(-\alpha)\cdot(-\beta) = -[\alpha(-\beta)] = -[-(\alpha\cdot\beta)] = \alpha\cdot\beta$

Λογισμός σε δακτυλίους

2.18 Σύμφωνα με όσα είπαμε στην § 2.9 με τα στοιχεία ενός δακτυλίου μπορούμε να σχηματίσουμε δυνάμεις με εκθέτη φυσικό, πολλαπλάσια και γενικότερα «ακέραιες» αλγεβρικές παραστάσεις με συντελεστές από το $\mathbb{Z}$. Π.χ. α^2, $5\alpha\beta\gamma^2$, $(\alpha+2\beta)^3$, $2\alpha^4-3\beta\gamma^3+1$, ... Τα α, β, γ, ... μπορεί να είναι πραγματικοί αριθμοί, πολυώνυμα, συναρτήσεις, πίνακες κτλ. Αν επιπλέον ο δακτύλιος είναι αντιμεταθετικός, θα ισχύουν οι κανόνες λογισμού που μάθαμε σε προηγούμενες τάξεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω A αντιμεταθετικός δακτύλιος και $\alpha,\beta,\gamma \in A$. Τότε είναι:
$(\alpha\pm\beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta+\beta^2$ $\quad (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$
$(\alpha\pm\beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$ $\quad (\alpha+\beta)^2+3(\alpha^2+\beta^2)-4(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+\dots = 10\alpha\beta$
$\alpha+\beta+\gamma = \mathbf{O} \Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ κτλ.

2. Αν A, B είναι πίνακες $\nu\times\nu$, τότε είναι:
$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = (A+B)A+(A+B)B = A^2+BA+AB+B^2$ (γιατί γενικά $BA \neq AB$).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να δειχτεί ότι: (i) το σύνολο $M = \left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x\end{bmatrix} : x\in\mathbb{Z}\right\}$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος.**
(ii) αν $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha\end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta\end{bmatrix}$ να υπολογιστεί η παράσταση $(A+B)^2+(A-B)^2-(A^2+B^2)$.

(i) Για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ έχουμε:
$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & 0 \\ 0 & \alpha+\beta\end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & \alpha\beta\end{bmatrix}$$
και συνεπώς το M είναι κλειστό ως προς τις πράξεις + και ·. Επίσης είναι φανερό ότι οι πράξεις αυτές είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές και ότι μηδενικό στοιχείο είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$ και μοναδιαίο ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Αντίθετος του πίνακα $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha\end{bmatrix}$ είναι ο $\begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha\end{bmatrix}$. Τέλος, όπως ξέρουμε, ο πολλαπλασιασμός είναι πράξη επιμεριστική ως προς την πρόσθεση.
Συνεπώς το M είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος.

(ii) Αφού το M είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος, θα έχουμε, σύμφωνα με την § 2.18 ότι:
$$(A+B)^2 + (A-B)^2 - (A^2+B^2) = (A^2+2AB+B^2) + (A^2-2AB+B^2) - (A^2+B^2) = A^2+B^2$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha\end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta^2 & 0 \\ 0 & \beta^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2+\beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2+\beta^2\end{bmatrix}$$

2. **Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ ορίζουμε, για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$, τις πράξεις $\alpha*\beta = \alpha+\beta+1$, $\alpha\circ\beta = \alpha+\beta+\alpha\beta$ (+ και · οι γνωστές πράξεις στο $\mathbb{Z}$). Να δειχτεί ότι: (i) Το $\mathbb{Z}$ με πράξεις $*$ και $\circ$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος, (ii) Αν $\mathbf{O}$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $*$, τότε για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ είναι: $\alpha\circ\beta = \mathbf{O} \Leftrightarrow (\alpha = \mathbf{O}$ ή $\beta = \mathbf{O})$.**

(i) Το $\mathbb{Z}$ με την πράξη $*$ είναι αντιμεταθετική ομάδα. Πράγματι, $\alpha*\beta = \alpha+\beta+1 = \beta+\alpha+1 = \beta*\alpha$ και $(\alpha*\beta)*\gamma = (\alpha+\beta+1)+\gamma+1 = \alpha+(\beta+\gamma+1)+1 = \alpha*(\beta*\gamma)$. Αν η $*$ έχει ουδέτερο στοιχείο το $x \in \mathbb{Z}$, τότε για κάθε $\alpha\in\mathbb{Z}$ θα έχουμε: $x*\alpha = \alpha \Leftrightarrow x+\alpha+1 = \alpha \Leftrightarrow x = -1$. Συνεπώς το -1 είναι ουδέτερο στοιχείο ως προς την $*$. Τέλος, διαπιστώνουμε εύκολα ότι συμμετρικό του $\alpha\in\mathbb{Z}$ είναι το $\alpha' = -(\alpha+2)$.

Εύκολα προκύπτει ότι η πράξη $\circ$ στο $\mathbb{Z}$ είναι αντιμεταθετική, προσεταιριστική και έχει ουδέτερο στοιχείο το $0\in\mathbb{Z}$ (βλέπε και εφαρ. 1 § 2.13). Τέλος, η $\circ$ είναι επιμεριστική ως προς την $*$, γιατί $\alpha\circ(\beta*\gamma) = \alpha\circ(\beta+\gamma+1) = \alpha+\beta+\gamma+1+\alpha(\beta+\gamma+1) = \alpha+\beta+\gamma+1+\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha$ και $(\alpha\circ\beta)*(\alpha\circ\gamma) = (\alpha+\beta+\alpha\beta)*(\alpha+\gamma+\alpha\gamma) = \alpha+\beta+\alpha\beta+\alpha+\gamma+\alpha\gamma+1$.
Άρα το $\mathbb{Z}$ με πράξεις $*$ και $\circ$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με ουδέτερο στοιχείο το -1 ως προς την $*$ και το 0 ως προς την $\circ$.

(ii) Για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ έχουμε ισοδύναμα:
$$\alpha\circ\beta = \mathbf{O} \Leftrightarrow \alpha\circ\beta = -1 \Leftrightarrow \alpha+\beta+\alpha\beta = -1 \Leftrightarrow (\alpha+1)+\beta(\alpha+1) = 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)(\beta+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha = -1 \text{ ή } \beta = -1) \Leftrightarrow (\alpha = \mathbf{O} \text{ ή } \beta = \mathbf{O}).$$

Ασκήσεις: 26, 27, 28, 29, 30

Η έννοια του σώματος

2.19 Το σύνολο $\mathbb{Q}$, όπως είδαμε, είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος, αλλά επιπλέον **κάθε** $\alpha\in\mathbb{Q}^*$ έχει αντίστροφο. Ένα τέτοιο σύνολο χαρακτηρίζεται με τον όρο *«σώμα»*. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ **Ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος F λέγεται** ***σώμα***[1]**, όταν κάθε $\alpha\in F^*$ έχει αντίστροφο.**

Δηλαδή, ένα σύνολο F εφοδιασμένο με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό θα είναι σώμα, όταν:

1. *Είναι αντιμεταθετική προσθετική ομάδα.*
2. *Το F^* είναι αντιμεταθετική πολλαπλασιαστική ομάδα.*
3. *Ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Είναι φανερό ότι οι ιδιότητες που καθορίζουν ένα σώμα F είναι εκείνες που αναφέρονται στον πίνακα της § 2.15 (ιδιότητες δακτυλίου) και επιπλέον, ότι για κάθε $\alpha\in F^*$ υπάρχει το $\alpha^{-1}\in F^*$, ώστε:
$$\alpha\cdot\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\cdot\alpha = 1$$

2. Επειδή κάθε σώμα F είναι αντιμεταθετική προσθετική ομάδα και το F^* αντιμεταθετική πολλαπλασιαστική ομάδα:
   - οι εξισώσεις $\beta+x = \alpha$ και $\beta\cdot x = \alpha$ με $\beta \neq \mathbf{O}$ έχουν μοναδική λύση (§ 2.13)
   - ισχύουν οι νόμοι διαγραφής (§ 2.12)
   $\alpha+x = \alpha+y \Rightarrow x = y$
   $\alpha x = \alpha y$ και $\alpha \neq \mathbf{O} \Rightarrow x = y$
   - ορίζονται οι πράξεις «αφαίρεση» και «διαίρεση» με διαιρέτη διαφορετικό του μηδενός (§ 2.13)

(1) Στη βιβλιογραφία χρησιμοποιείται και ο ειδικότερος όρος *«αντιμεταθετικό σώμα»*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Καθένα από τα σύνολα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ είναι σώμα.
2. Το σύνολο F_A δεν είναι σώμα, γιατί, αν $f \in F_A^*$ με $f(\alpha) = 0$ για κάποιο $\alpha \in A$, τότε το συμμετρικό της f ως προς τον πολλαπλασιασμό στο F_A, δεν ορίζεται.
3. Το σύνολο $\mathbb{Z}$ με πράξεις $*$ και $\circ$ όπως ορίστηκαν στην εφαρμ. 2 της § 2.18, δεν είναι σώμα, γιατί δεν υπάρχει το συμμετρικό κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}$ ως προς την πράξη $\circ$.
4. Το σύνολο Π_2 των πινάκων 2×2 δεν είναι σώμα, γιατί δεν είναι αντιστρέψιμος κάθε πίνακας 2×2.

Μια βασική ιδιότητα του σώματος

2.20 Σ' ένα δακτύλιο, γενικά, μπορεί το γινόμενο δυο μη μηδενικών στοιχείων να είναι μηδέν. Π.χ. στο δακτύλιο Π_2 είναι $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Αν όμως ο δακτύλιος είναι σώμα και το γινόμενο δυο στοιχείων του είναι μηδέν, τότε τουλάχιστο ένα από τα στοιχεία αυτά είναι μηδέν. Ισχύει δηλαδή το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν α και β είναι στοιχεία ενός σώματος F, τότε:**

$$\alpha \cdot \beta = \mathbf{O} \Rightarrow (\alpha = \mathbf{O} \text{ ή } \beta = \mathbf{O})$$

Απόδειξη

Έστω $\beta \neq \mathbf{O}$, οπότε θα υπάρχει το $\beta^{-1} \in F^*$. Τότε από την $\alpha \cdot \beta = \mathbf{O}$ έχουμε:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \beta^{-1} = \mathbf{O} \cdot \beta^{-1} \Rightarrow \alpha(\beta \cdot \beta^{-1}) = \mathbf{O} \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{1} = \mathbf{O} \Rightarrow \alpha = \mathbf{O}$$

Σημείωση

Η ιδιότητα αυτή δεν είναι χαρακτηριστική ενός σώματος, αφού την έχουν και δακτύλιοι που δεν είναι σώματα (βλέπε εφαρμογή 2 της § 2.18).

Λογισμός σε σώματα

2.21 Πέρα απ' όσα είπαμε για το λογισμό σ' ένα δακτύλιο (§ 2.18), η ύπαρξη σ' ένα σώμα του αντίστροφου κάθε μη μηδενικού στοιχείου του, επιτρέπει το σχηματισμό δυνάμεων με εκθέτες ακέραιους αρνητικούς και γενικότερα ρητών αλγεβρικών παραστάσεων με συντελεστές από το $\mathbb{Z}$ και την εφαρμογή σ' αυτές των κανόνων λογισμού που γνωρίζουμε από προηγούμενες τάξεις.

Στον επόμενο πίνακα, εκτός από τις ιδιότητες οι οποίες χαρακτηρίζουν ένα σώμα F (είναι τυπωμένες με μαύρα γράμματα), αναφέρονται και οι κυριότερες ιδιότητές του F που είναι χρήσιμες στο λογισμό ($\alpha,\beta,\gamma \in F$ και $k,\lambda \in \mathbb{Z}$).

Ιδιότητες	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
προσεταιριστική	$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
αντιμεταθετική	$\alpha+\beta = \beta+\alpha$	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
ουδέτερο στοιχείο	$\alpha+\mathbf{O} = \alpha$	$\alpha \cdot \mathbf{1} = \alpha$
συμμετρικό στοιχείο	$\alpha+(-\alpha) = \mathbf{O}$	$\alpha \cdot \alpha^{-1} = \mathbf{1}\ (\alpha \neq \mathbf{O})$
επιμεριστική	$\alpha \cdot (\beta+\gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$	
—	$-(\alpha+\beta) = -\alpha-\beta,\ -(-\alpha) = \alpha$	$(\alpha \cdot \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1},\ (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$
αφαίρεση - διαίρεση	$\alpha-\beta = \alpha+(-\beta)$	$\alpha : \beta = \alpha \cdot \beta^{-1}\ (\beta \neq \mathbf{O})$
πολλαπλάσια-δυνάμεις	$k\alpha+\lambda\alpha = (k+\lambda)\alpha,\ k(\lambda\alpha) = (k\lambda)\alpha$	$\alpha^k \cdot \alpha^\lambda = \alpha^{k+\lambda},\ (\alpha^\lambda)^k = \alpha^{k\lambda}$
	$k(\alpha+\beta) = k\alpha+k\beta$	$(\alpha \cdot \beta)^k = \alpha^k \cdot \beta^k$
	$0\alpha = \mathbf{O},\ (-k)\alpha = k(-\alpha) = -(k\alpha)$	$\alpha^0 = \mathbf{1},\ \alpha^{-k} = (\alpha^k)^{-1} = (\alpha^{-1})^k$
	$k\alpha-\lambda\alpha = (k-\lambda)\alpha$	$\alpha^k : \alpha^\lambda = \alpha^{k-\lambda}\ (\alpha \neq \mathbf{O})$
νόμος διαγραφής	$\alpha+x = \alpha+y \Rightarrow x = y$	$(\alpha \cdot x = \alpha \cdot y$ και $\alpha \neq \mathbf{O}) \Rightarrow x = y$
λύση εξίσωσης	$\beta+x = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha-\beta$	$(\beta \cdot x = \alpha$ και $\beta \neq \mathbf{O}) \Leftrightarrow x = \alpha \cdot \beta^{-1}$
—	—	$\alpha\mathbf{O} = \mathbf{O}$
κανόνας προσήμων	—	$(-\alpha) \cdot \beta = \alpha \cdot (-\beta) = -(\alpha \cdot \beta),\ (-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$
—	—	$\alpha \cdot \beta = \mathbf{O} \Rightarrow (\alpha = \mathbf{O}$ ή $\beta = \mathbf{O})$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **(i) Να δειχτεί ότι το σύνολο M των πινάκων της μορφής $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{Q}$, είναι σώμα.**

(ii) Αν $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} \beta-\alpha & 0 \\ 0 & \beta-\alpha \end{bmatrix}$ και $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, να δειχτεί ότι $A^3+B^3+\Gamma^3 = 3\alpha\beta(\alpha-\beta)I$

(iii) Να λυθεί στο M η εξίσωση AX = B με $A,B \in M$.

(i) Το σύνολο M είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος (βλέπε και εφαρ. 1 § 2.18). Ακόμη έστω ο μη μηδενικός πίνακας $P = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}$, $\rho \in \mathbb{Q}^*$. Τότε είναι $D = \rho^2 \neq 0$ και συνεπώς υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας $P^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho^2} \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}$. Άρα το M είναι σώμα.

(ii) Είναι $A+B+\Gamma = \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και συνεπώς:

$$A^3+B^3+\Gamma^3 = 3AB\Gamma = 3\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta-\alpha & 0 \\ 0 & \beta-\alpha \end{bmatrix} = 3\alpha\beta(\alpha-\beta)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3 =$$
$$= 3\alpha\beta(\alpha-\beta)I$$

(iii) Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$. Εξετάζουμε τις περιπτώσεις:

1. $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \alpha \neq 0$. Τότε η εξίσωση έχει τη μοναδική λύση

$$X = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\alpha} \end{bmatrix} \text{ στο } M.$$

2. $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ καί $\begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, τότε η εξίσωση δεν έχει λύση στο **M**.

3. $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$. Τότε η εξίσωση επαληθεύεται για κάθε $X \in$ **M** (είναι ταυτότητα στο **M**).

2. Στο σύνολο E={0, 1, 2, 3, 4} ορίζουμε τις πράξεις + και • με τους διπλανούς πίνακες.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

•	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

(i) Να εξεταστεί αν το E είναι σώμα.

(ii) Να επιλυθούν στο E οι εξισώσεις:
$3+x = 2$, $4 \cdot x = 1$,
$3x+1 = 3$, $x^2+1 = 0$.

(i) Διαπιστώνουμε εύκολα ότι ισχύουν όλες οι ιδιότητες που χαρακτηρίζουν ένα σώμα. Π.χ. $(2+1)+4 = 3+4 = 2$ και $2+(1+4) = 2+0 = 2$, $3+4 = 2 = 4+3$, $2 \cdot 3 = 1 = 3 \cdot 2$, $4(3+1) = 4 \cdot 4 = 1$ και $4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 2+4 = 1$ κτλ. Ουδέτερο στοιχείο είναι το 0 και μοναδιαίο τό 1.

(ii) Από τον πρώτο πίνακα βρίσκουμε ότι ο αντίθετος του 3 είναι ο 2, δηλαδή $-3 = 2$.
Έτσι θα έχουμε (§ 2.13) $x = 2+2 = 4$.
Ομοίως βρίσκουμε ότι ο αντίστροφος του 4 είναι ο 4, δηλαδή $4^{-1} = 4$. Έτσι έχουμε
$x = 1 \cdot 4^{-1} = 1 \cdot 4 = 4$.
Επίσης είναι $-1 = 4$ και συνεπώς: $3x+1 = 3 \Leftrightarrow 3x = 3+(-1) \Leftrightarrow 3x = 3+4 \Leftrightarrow 3x = 2$.
Επειδή τώρα $3^{-1} = 2$ θα έχουμε $x = 2 \cdot 3^{-1} = 2 \cdot 2 = 4$.
Παρατηρούμε ότι $1 = -4 = -2^2$ και η $x^2+1 = 0$ γράφεται ισοδύναμα: $x^2-2^2 = 0 \Leftrightarrow$
$(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x-2 = 0$ ή $x+2 = 0) \Leftrightarrow (x+3 = 0$ ή $x+2 = 0) \Leftrightarrow (x = 2$ ή $x = 3)$.

3. Στο σύνολο $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ορίζουμε για κάθε $(\alpha_1,\alpha_2), (\beta_1,\beta_2) \in \mathbb{C}$ τις πράξεις $\oplus$ και $\odot$ με

$$(\alpha_1, \alpha_2) \oplus (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \odot (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)$$

όπου + και · οι συνήθεις πράξεις στο $\mathbb{R}$. Νά δειχτεί ότι
(i) το $\mathbb{C}$ με τις πράξεις $\oplus$ και $\odot$ είναι σώμα
(ii) $(0, 1)^2 = (0, 1) \odot (0,1) = (-1,0)$.

(i) Διαπιστώνουμε εύκολα ότι το $\mathbb{C}$ με την πράξη $\oplus$ είναι αντιμεταθετική ομάδα με μηδενικό στοιχείο το $(0,0) \in \mathbb{C}$ και αντίθετο του (α_1, α_2) το $(-\alpha_1, -\alpha_2)$. Επίσης το $\mathbb{C}^*$ με την πράξη $\odot$ είναι αντιμεταθετική ομάδα με μοναδιαίο στοιχείο το $(1, 0)$ και αντίστροφο του (α_1, α_2) το $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}, -\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\right)$. Ακόμη η πράξη $\odot$ είναι επιμεριστική ως προς την $\oplus$

Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2) \odot [(\beta_1, \beta_2) \oplus (\gamma_1, \gamma_2)] &= (\alpha_1, \alpha_2) \odot (\beta_1+\gamma_1, \beta_2+\gamma_2) \\ &= [(\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2) + (\alpha_1\gamma_1-\alpha_2\gamma_2), (\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1) + (\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)] \\ &= (\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1) \oplus (\alpha_1\gamma_1-\alpha_2\gamma_2, \alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1) \\ &= [(\alpha_1, \alpha_2) \odot (\beta_1, \beta_2)] \oplus [(\alpha_1, \alpha_2) \odot (\gamma_1, \gamma_2)] \end{aligned}$$

Συνεπώς το $\mathbb{C}$ είναι σώμα.

(ii) Έχουμε $(0,1)^2 = (0,1) \odot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0)$.

Ασκήσεις: 31, 32

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξετάσετε αν το σύνολο $A = \{\frac{1}{\nu}: \nu \in \mathbb{N}^*\}$ είναι κλειστό ως προς την συνήθη πρόσθεση των κλασμάτων στο $\mathbb{Q}$.

2. Να εξετάσετε αν το σύνολο $B = \{(\alpha+\beta\sqrt{3}): \alpha,\beta \in \mathbb{Q}^*_+\}$ είναι κλειστό ως προς την συνήθη πράξη του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}$.

3. Να εξετάσετε αν καθένα από τα σύνολα: $A_1 = \{-1, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 1\}$, $A_2 = \{\frac{1}{2\nu+1}: \nu \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό ως προς τη συνήθη πράξη του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}$.

4. Να εξετάσετε αν το σύνολο **M** $= \left\{\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}: \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\}$, είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση πινάκων.

5. Να αποδειχτεί ότι στο σύνολο $\mathbb{R}^*$ η πράξη $*$ με $x*y = \frac{x}{y}$ δεν είναι ούτε προσεταιριστική ούτε αντιμεταθετική.

6. Στο σύνολο $\mathbb{R}^*_+$ ορίζουμε την πράξη $*$ με $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$. Να εξετάσετε αν το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ είναι κλειστό ως προς την πράξη $*$. Είναι η $*$ πράξη προσεταιριστική;

7. Θεωρούμε ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ είναι εφοδιασμένο με την πράξη $\circ$ και ότι στο σύνολο $\mathbb{R}^2$ ορίζεται η πράξη $*$ με $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 \circ x_2, y_1 \circ y_2)$. Να δείξετε ότι, αν η $\circ$ είναι αντιμεταθετική ή προσεταιριστική στο $\mathbb{R}$, τότε και η $*$ είναι αντίστοιχα αντιμεταθετική ή προσεταιριστική στο $\mathbb{R}^2$.

8. Να εξετάσετε αν το σύνολο **M** $= \left\{\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}: \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\}$, είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο ως προς την πράξη αυτή στο **M**;
Είναι η πράξη αυτή αντιμεταθετική και προσεταιριστική στο **M**;

9. Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ ορίζουμε την πράξη $*$ με $x*y = x^2+y^2$.
(i) Να υπολογίσετε τα εξαγόμενα: $(-3)*(+1)$, $(+2)*(-3)$, $(-3)*(+2)$, $(-5)*[(+3)*(-1)]$, $[(-5)*(+3)]*(-1)$
(ii) Να εξετάσετε αν η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική, αντιμεταθετική και αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο ως προς αυτή.

10. Στο σύνολο $\mathbb{R}^*_+$ ορίζουμε την πράξη $*$ με $x*y = 8xy$
(i) Να αποδείξετε ότι η $*$ είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική
(ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο και αν για κάθε στοιχείο υπάρχει συμμετρικό στοιχείο ως προς την $*$.

11. Εστω $\circ$ μια πράξη προσεταιριστική στο Α με ουδέτερο στοιχείο e.
Αν για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχουν $\beta, \gamma \in A$ τέτοια, ώστε: $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \gamma = e$ να δείξετε ότι $\beta = \gamma$ και ότι το β είναι συμμετρικό του α.

12. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίζουμε την πράξη $*$ με $x * y = x + y + x^2y^2$. Να αποδείξετε ότι:

(i) Κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ με $x < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ έχει δύο συμμετρικά ως προς την $*$.

(ii) Το στοιχείο $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ έχει συμμετρικό ως προς την $*$ μόνο το $-\sqrt[3]{2}$

13. Με χρήση των συμβόλων $\sum$ και $\prod$ της § 2.8 να γράψετε τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα:

(i) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_5^2$
(ii) $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \dots + \alpha_\nu^3$
(iii) $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_\nu\alpha_{\nu+1}$
(iv) $1^3 + 2^3 + \dots + 99^3$
(v) $\alpha_1^2 \cdot \alpha_2^2 \cdot \dots \cdot \alpha_5^2$
(vi) $\alpha_1^3 \cdot \alpha_2^3 \cdot \dots \cdot \alpha_\nu^3$

14. Ποιά αθροίσματα παριστάνουν τα παρακάτω σύμβολα;

(i) $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^2$, (ii) $\sum_{\kappa=1}^{100} k^2$, (iii) $\sum_{\kappa=1}^{\nu} k^3$, (iv) $\sum_{\kappa=0}^{3} \alpha_\kappa x^\kappa$, (v) $\sum_{\kappa=1}^{\nu} k(k+1)$

15. Στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε $\sum_{i=1}^{1} \alpha_i = \alpha_1$ και $\prod_{i=1}^{1} \alpha_i = \alpha_1$

Να δείξετε ότι:

(i) $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = (\sum_{i=1}^{\nu-1} \alpha_i) + \alpha_\nu,\ \nu \geq 2$ (ii) $\sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i + \beta_i) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i + \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i$

(iii) $\sum_{i=1}^{\nu} (\lambda + \alpha_i) = \nu\lambda + \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i$ (iv) $\sum_{i=1}^{\nu} (\lambda\alpha_i) = \lambda \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i$

(v) $\prod_{i=1}^{\nu} \alpha_i = (\prod_{i=1}^{\nu-1} \alpha_i) \cdot \alpha_\nu,\ \nu \geq 2$ (vi) $\prod_{i=1}^{\nu} (\alpha_i \cdot \beta_i) = (\prod_{i=1}^{\nu} \alpha_i) \cdot (\prod_{i=1}^{\nu} \beta_i)$

16. Το σύνολο Ε είναι εφοδιασμένο με μια πράξη προσεταιριστική που σημειώνεται πολλαπλασιαστικά και υπάρχει ουδέτερο στοιχείο το **1**. Αν κάθε στοιχείο του Ε έχει αντίστροφο και για κάθε $\alpha, \beta \in E$ είναι $\alpha^3 = \beta^3 = (\alpha\beta)^2 = 1$, να αποδειχτεί ότι: $\beta = \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha^2 = \alpha^2\beta^2\alpha^2$

θεχ

17. Αν α, β είναι στοιχεία μιας πολλαπλασιαστικής ομάδας G, τότε να δείξετε ότι:
$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \Leftrightarrow \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}$$

18. Αν σε μια πολλαπλασιαστική ομάδα G με ουδέτερο στοιχείο **1** για κάθε $x \in G$ ισχύει $x^2 = \mathbf{1}$, να δείξετε ότι η ομάδα αυτή είναι αντιμεταθετική.

19. Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathbf{M} = \left\{\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$ είναι υποομάδα της προσθετικής ομάδας Π_2.

20. Να δείξετε ότι το σύνολο $A = \left\{\frac{1+2\kappa}{1-2\lambda} : \kappa, \lambda \in \mathbb{Z}\right\}$ εφοδιαζόμενο με τη συνήθη πράξη του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}$, είναι πολλαπλασιαστική ομάδα.

21. Ένα σύνολο Α είναι εφοδιασμένο με την πράξη $*$ ως προς την οποία:
Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο e (I)
Κάθε $x \in A$ έχει μοναδικό συμμετρικό (II)
Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in A$ είναι $\alpha * (\beta * \gamma) = (\beta * \alpha) * \gamma$ (III)
Να δείξετε ότι το Α είναι αντιμεταθετική ομάδα.

22. Ένα σύνολο Α είναι εφοδιασμένο με την προσεταιριστική πράξη $\circ$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

I. Υπάρχει $e \in A$, τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ να είναι
$$e \circ \alpha = \alpha$$
II. Για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει $\alpha' \in A$ τέτοιο ώστε
$$\alpha' \circ \alpha = e$$
Να δείξετε ότι το Α είναι ομάδα.

23. Ένα σύνολο Α εφοδιασμένο με την προσεταιριστική πράξη $\circ$ είναι ομάδα, αν και μόνο αν οι εξισώσεις $\alpha \circ x = \beta$ και $y \circ \alpha = \beta$ έχουν λύση στο Α, για κάθε $\alpha, \beta \in A$.

24. Αν το σύνολο G εφοδιασμένο με την πράξη $\circ$ είναι ομάδα, τότε να αποδειχτεί ότι το σύνολο G΄ με στοιχεία $x \in G$ για τα οποία ισχύει: $x \circ \alpha = \alpha \circ x$ για κάθε $\alpha \in G$, είναι μια αντιμεταθετική υποομάδα της G.

25. Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων ορίζουμε την πράξη $*$ με $x * y = x + 2y$.
(i) Να υπολογίσετε τα $0 * 3$, $3 * 0$, $(-2) * (-1)$, $(-2) * [5 * (-1)]$
(ii) Να εξετάσετε αν η $*$ είναι αντιμεταθετική, προσεταιριστική και αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο.
(iii) Να εξετάσετε αν η $*$ είναι επιμεριστική ως προς την πρόσθεση στο $\mathbb{Z}$ και αντιστρόφως αν η πρόσθεση στο $\mathbb{Z}$ είναι επιμεριστική ως προς την $*$.

26. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $A = \{(\alpha + \beta\sqrt{2}) : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$, με πράξεις τις συνήθεις πράξεις + και $\cdot$ στο $\mathbb{R}$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος.

27. Στο σύνολο $\mathbb{Z}^2$ ορίζουμε τις πράξεις $\oplus, \circ$ ως εξής:
$$(\alpha, \beta) \oplus (\gamma, \delta) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta)$$
$$(\alpha, \beta) \circ (\gamma, \delta) = (\alpha \cdot \gamma, \beta \cdot \delta) \quad (+ \text{ και } \cdot \text{ οι συνήθεις πράξεις στο } \mathbb{Z})$$
Να δείξετε ότι: (i) το $\mathbb{Z}^2$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος
(ii) Γιά κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$ είναι $(\alpha, 0) \circ (0, \beta) = (0, 0)$

28. Αν F_A είναι το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο A, να αποδειχτεί ότι:

(i) Το F_A είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού των συναρτήσεων

(ii) Στο F_A να διαπιστώστε με την βοήθεια των

$$f \text{ με } f(x) = \begin{cases} 1, \text{ αν } x = 5 \in A \\ 0, \text{ αν } x \in A - \{5\} \end{cases}, \quad g \text{ με } g(x) = \begin{cases} 0, \text{ αν } x = 5 \in A \\ 1, \text{ αν } x \in A - \{5\} \end{cases}$$

ότι ισχύει: $f \neq \mathbf{O}$, $g \neq \mathbf{O}$ και $f \cdot g = \mathbf{O}$, όπου $\mathbf{O} \in F_A$ η σταθερή συνάρτηση με τιμή 0.

29. Στο σύνολο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε τις πράξεις $\oplus$ και $\circ$ με

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$$
$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1y_1-x_2y_2, x_1y_2+x_2y_1)$$

Να δείξετε ότι το $\mathbb{R}^2$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο το (1, 0) και ουδέτερο το (0, 0).

30. Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathbf{M} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ με πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό πινάκων, είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος.

31. Να δείξετε ότι (i) το σύνολο $\mathbf{M} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ με πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό πινάκων είναι σώμα, (ii) η εξίσωση $X^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ έχει λύση στο $\mathbf{M}$.

32. Στο σύνολο $\mathbb{Q}^2$ ορίζουμε τις πράξεις $\oplus$ και $*$ ως εξής:

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$$
$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1y_1+\alpha x_2y_2, x_1y_2+x_2y_1), \text{ όπου } \alpha \text{ αρνητικός ρητός.}$$

Να εξετάσετε, αν το $\mathbb{Q}^2$ είναι σώμα.

3 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Με πρότυπο το σύνολο $\mathcal{E}$ των διανυσμάτων του χώρου, παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό οι γενικευμένοι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι, με χαρακτηριστική την παρουσία της εξωτερικής πράξης. Πρόκειται για αλγεβρική δομή που παίζει σημαντικό ρόλο και στη Γεωμετρία και στην Ανάλυση.

Η ανάπτυξη γίνεται αρχικά όπως και στις δομές του προηγουμένου κεφαλαίου. Στη συνέχεια μετά τη διαπίστωση του «ισομορφισμού» των συνόλων $\mathcal{E}$ και $\mathbb{R}^3$, προκύπτει ως λογικό επακόλουθο η γενικεύση στο χώρο $\mathbb{R}^\nu$. Εξάλλου η συνεπής αναφορά σε ορισμούς και συμπεράσματα του κεφ. 1 της Αναλυτικής Γεωμετρίας διευκολύνει την κατανόηση πολλών βασικών εννοιών (υπόχωρος, γραμμική εξάρτηση, ...), οι οποίες άλλωστε αποτελούν γενίκευση των αντίστοιχων εννοιών που μελετήσαμε στα διανύσματα του χώρου. Έτσι π.χ. η γραμμική εξάρτηση σε διανυσματικό χώρο δεν είναι μια αυθαίρετη αλγεβρική σχέση, αλλά ορίζεται ως σχέση «γεωμετρική»: σημαίνει ότι τα διανύσματα ανήκουν στον ίδιο υπόχωρο, ο οποίος στην περίπτωση του χώρου $\mathcal{E}$ αισθητοποιείται π.χ. ως διανυσματική ευθεία ή ως διανυσματικό επίπεδο.

Τέλος το κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιεί και συμπληρώνει γνώσεις από το Κεφάλαιο 1. Έτσι για τη γραμμική εξάρτηση στο χώρο $\mathbb{R}^\nu$ χρησιμοποιείται το κριτήριο με τις ορίζουσες. Επίσης η θεωρία των διανυσματικών χώρων βρίσκει εφαρμογή στην πλήρη λύση και την πλήρη διερεύνηση των γραμμικών συστημάτων.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Εξωτερική πράξη

3.1 Στο σύνολο $\mathcal{E}$ των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου ορίσαμε τον *πολλαπλασιασμό αριθμού με διάνυσμα* που αντιστοιχίζει σε κάθε ζεύγος $(\lambda, \vec{\alpha}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{E}$ το διάνυσμα $\lambda\vec{\alpha} \in \mathcal{E}$. Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός αυτός είναι μια απεικόνιση του $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$ στο $\mathcal{E}$. Μια τέτοια απεικόνιση χαρακτηρίζεται με τον όρο «*εξωτερική πράξη στο $\mathcal{E}$*». Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ **Αν Α και Ε είναι δυο μη κενά σύνολα, τότε κάθε απεικόνιση του καρτεσιανού γινομένου Α×Ε στο Ε λέγεται *εξωτερική πράξη* στο Ε με *συντελεστές* (ή *τελεστές*) από το σύνολο Α.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παραδείγματα εξωτερικής πράξης με συντελεστές πραγματικούς είναι:

1. Στο σύνολο F_A των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού Α, ο «*πολλαπλασιασμός αριθμού με συνάρτηση*».
2. Στο σύνολο των πινάκων ο «*πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα*« (§ 1.6).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Μια εσωτερική πράξη στο Ε, δηλαδή μια απεικόνιση του Ε×Ε στο Ε, μπορεί να θεωρηθεί ως εξωτερική πράξη στο Ε με συντελεστές από το Ε.

Έστω τώρα $\cdot$ μια εξωτερική πράξη στο E με συντελεστές από το σύνολο A.
Ένα μη κενό σύνολο $E_1 \subseteq E$ θα λέγεται **κλειστό ως προς την πράξη $\cdot$, όταν για κάθε $(\lambda, x) \in A \times E_1$** είναι $\lambda \cdot x \in E_1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το σύνολο των πινάκων της μορφής $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{\Pi}_2$ ως προς τον πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό. Αντίθετα το σύνολο των πινάκων 2×2 με στοιχεία ρητούς αριθμούς δεν είναι κλειστό ως προς την πράξη αυτή, αφού για $\rho \in \mathbb{Q}$, είναι π.χ. $\sqrt{2}\rho \notin \mathbb{Q}$.

Η έννοια του διανυσματικού χώρου

3.2 Είδαμε ότι η πρόσθεση στο σύνολο $\mathcal{E}$ των διανυσμάτων έχει τις ιδιότητες: Για κάθε $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathcal{E}$,

$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma} = \vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma}), \quad \vec{\alpha}+\vec{\beta} = \vec{\beta}+\vec{\alpha}, \quad \vec{\alpha}+\vec{0} = \vec{\alpha}, \quad \alpha+(-\vec{\alpha}) = \vec{0}$$

δηλαδή το σύνολο $\mathcal{E}$ είναι μια αντιμεταθετική προσθετική ομάδα. Ακόμη στο $\mathcal{E}$ έχει οριστεί και μια εξωτερική πράξη, ο πολλαπλασιασμός με πραγματικό αριθμό, τέτοια ώστε, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta} \quad (\lambda+\mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha} \quad \lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha} \quad 1\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$$

Επίσης το σύνολο F_A είναι αντιμεταθετική προσθετική ομάδα και ο πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού με συνάρτηση είναι εξωτερική πράξη στο F_A με τις παραπάνω ιδιότητες. Τα σύνολα αυτά χαρακτηρίζονται με τον όρο *«διανυσματικοί χώροι»*. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ **Ένα σύνολο V στο οποίο έχει οριστεί μια εσωτερική πράξη + και μια εξωτερική πράξη $\cdot$ με συντελεστές πραγματικούς, λέγεται *πραγματικός διανυσματικός* (ή *γραμμικός*) *χώρος*, όταν:**

- **ως προς την εσωτερική πράξη είναι αντιμεταθετική ομάδα και**
- **ως προς την εξωτερική πράξη ισχύουν τα εξής[1]:**

(i) $\lambda \cdot (v+u) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot u$

(ii) $(\lambda+\mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

(iii) $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$

(iv) $1 \cdot v = v$

για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $v, u \in V$.

Στα επόμενα με τον όρο *«διανυσματικός χώρος»* ή απλούστερα *«χώρος»* θα

(1) Το άθροισμα (λ+μ) και το γινόμενο (λμ) που σημειώνονται με κόκκινο χρώμα αναφέρονται στις γνωστές πράξεις στο $\mathbb{R}$.

εννοούμε *«πραγματικός διανυσματικός χώρος»*[1]. Τα στοιχεία του V λέγονται *«διανύσματα»* και για την παράστασή τους χρησιμοποιούμε συνήθως γράμματα του λατινικού αλφάβητου.

Στον επόμενο πίνακα αναφέρονται οι ιδιότητες που χαρακτηρίζουν ένα διανυσματικό χώρο V.

	Το V αντιμεταθετική ομάδα	**Το V εφοδιασμένο με εξωτερική πράξη**	
(1)	$(v+u)+w = v+(u+w)$	$\lambda \cdot (v+u) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot u$	(I)
(2)	$v+u = u+v$	$(\lambda+\mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$	(II)
(3)	$v+\mathbf{O} = v$	$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$	(III)
(4)	$v+(-v) = \mathbf{O}$	$1 \cdot v = v$	(IV)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Το σύνολο $\mathcal{P}$ των ελεύθερων διανυσμάτων ενός επιπέδου είναι διανυσματικός χώρος, γιατί, όπως ξέρουμε από την Αναλυτική Γεωμετρία, ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων ισχύουν οι ιδιότητες (1) - (4) και ως προς τον πολλαπλασιασμό αριθμού με διάνυσμα οι ιδιότητες (I) - (IV).
2. Το σύνολο των πινάκων ν×μ είναι διανυσματικός χώρος, γιατί ως προς την πρόσθεση πινάκων ισχύουν οι ιδιότητες (1) - (4) (§ 1.5) και ως προς τον πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα οι ιδιότητες (I) - (IV) (§ 1.7).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Είναι φανερό ότι ο όρος *«διάνυσμα»* έχει εδώ ευρύτερη σημασία. *«Διάνυσμα»* δεν είναι μόνο ένα ελεύθερο διάνυσμα του $\mathcal{E}$, αλλά και μιά συνάρτηση, ένας πίνακας κτλ.

Ιδιότητες διανυσματικού χώρου

3.3 Επειδή ένας διανυσματικός χώρος V είναι αντιμεταθετική προσθετική ομάδα, είναι φανερό ότι θα έχει τις ιδιότητες της ομάδας (§ 2.11, 2.12, 2.13). Ακόμη σέ κάθε διανυσματικό χώρο ισχύει το επόμενο θεμελιώδες

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος, τότε για κάθε $v \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι**

(i) $\lambda \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O}$ **(ii)** $0 \cdot v = \mathbf{O}$

(iii) $\lambda \cdot v = \mathbf{O} \Rightarrow (\lambda = 0$ ή $v = \mathbf{O})$ **(iv)** $(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$

(1) Γενικότερα, ορίζονται διανυσματικοί χώροι με συντελεστές από ένα σώμα F.

Απόδειξη

(i) Έχουμε: $\lambda\cdot v + \lambda\cdot \mathbf{O} = \lambda\cdot(v+\mathbf{O}) = \lambda\cdot v$ και συνεπώς $\lambda\cdot\mathbf{O} = \mathbf{O}$

(ii) Ομοίως: $\lambda\cdot v + 0\cdot v = (\lambda+0)\cdot v = \lambda\cdot v$ και συνεπώς $0\cdot v = \mathbf{O}$

(iii) Αν $\lambda = 0$ η συνεπαγωγή είναι φανερή.
Αν $\lambda \neq 0$, οπότε υπάρχει το $\lambda^{-1}\in\mathbb{R}^*$, θά έχουμε:
$\lambda\cdot v = \mathbf{O} \Rightarrow \lambda^{-1}\cdot(\lambda\cdot v) = \lambda^{-1}\cdot\mathbf{O} \Rightarrow (\lambda^{-1}\lambda)\cdot v = \mathbf{O} \Rightarrow 1\cdot v = \mathbf{O} \Rightarrow v = \mathbf{O}$

(iv) Επειδή $\lambda+(-\lambda) = 0$, θα έχουμε για κάθε $v\in V$:
$[\lambda+(-\lambda)]\cdot v = 0\cdot v = \mathbf{O} \Leftrightarrow \lambda\cdot v + (-\lambda)\cdot v = \mathbf{O} \Leftrightarrow (-\lambda)\cdot v = -(\lambda\cdot v)$
Επίσης είναι: $v+(-v) = \mathbf{O} \Leftrightarrow \lambda\cdot[(v+(-v)] = \lambda\cdot\mathbf{O} = \mathbf{O} \Leftrightarrow \lambda\cdot v + \lambda\cdot(-v) = \mathbf{O} \Leftrightarrow$
$\lambda\cdot(-v) = -(\lambda\cdot v)$

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. $(-1)\cdot v = -v$
Προκύπτει από την $(-\lambda)\cdot v = -(\lambda\cdot v)$ για $\lambda = 1$.

2. Αν $\lambda \neq 0$, τότε: $\lambda\cdot v = \lambda\cdot u \Rightarrow v = u$
(νόμος διαγραφής συντελεστή)
Έχουμε: $\lambda\cdot v = \lambda\cdot u \Rightarrow \lambda\cdot v - \lambda\cdot u = \mathbf{O} \Rightarrow \lambda\cdot(v-u) = \mathbf{O}$
$\Rightarrow v - u = \mathbf{O} \Rightarrow v = u$.

3. Αν $v \neq \mathbf{O}$, τότε: $\lambda\cdot v = \mu\cdot v \Rightarrow \lambda = \mu$
(νόμος διαγραφής διανύσματος)
Έχουμε: $\lambda\cdot v = \mu\cdot v \Rightarrow \lambda\cdot v - \mu\cdot v = \mathbf{O} \Rightarrow (\lambda-\mu)\cdot v = \mathbf{O} \Rightarrow$
$\lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$

Λογισμός σε διανυσματικό χώρο

3.4 Αν $k\in\mathbb{Z}$, τότε για κάθε $v\in V$ το διάνυσμα $k\cdot v$ είναι το kv (το k-πλάσιο του v (§ 2.9)).

Πράγματι:

- αν $k > 1$, $k\cdot v = (1+1+\ldots+1)\cdot v = 1\cdot v + 1\cdot v + \ldots + 1\cdot v = v + v + \ldots + v = kv$
- αν $k < -1$, $k\cdot v = (-|k|)\cdot v = (-1-1-\ldots-1)\cdot v = (-v) + (-v) + \ldots + (-v) = |k|(-v) = (-|k|)v = kv$
- αν $k = 0$, $0\cdot v = \mathbf{O} = 0v$
- αν $k = 1$, $1\cdot v = v = 1v$
- αν $k = -1$, $-1\cdot v = -v = -1v$

Σημείωση

Από τα παραπάνω δικαιολογείται, γιατί, συνήθως, η εξωτερική πράξη σ' ένα διανυσματικό χώρο σημειώνεται πολλαπλασιαστικά και μάλιστα παραλείπεται το σύμβολό της. Η εξωτερική πράξη σ' ένα διανυσματικό χώρο αναφέρεται ακόμη και ως **«εξωτερικός (ή βαθμωτός) πολλαπλασιασμός»**.

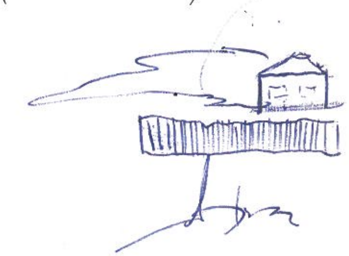
Σ' ένα διανυσματικό χώρο ο λογισμός με ακέραια πολλαπλάσια, που ισχύει στην προσθετική ομάδα (§ 2.9), επεκτείνεται σε λογισμό με συντελεστές πραγματικούς. Π.χ. μπορούμε να εφαρμόζουμε το συνήθη λογισμό των προόδων, όπως φαίνεται στα επόμενα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Στο διανυσματικό χώρο Π_2, αν $A = \begin{bmatrix}-4 & 1\\ 7 & -2\end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$, έχουμε:

$$A + (A+B) + (A+2B) + \ldots + (A+8B) = \frac{A+(A+8B)}{2}\cdot 9 = 9(A+4B) = 9\left(\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 7 & -2\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\right)$$
$$= 9\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 9\\ -9 & 18\end{bmatrix}$$

2. Στο διανυσματικό χώρο F_A, για κάθε $f\in F_A$ και $\lambda\in\mathbb{R}^*$, έχουμε:
$$f + \lambda f + \ldots + \lambda^{\nu-1} f = f\,\frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$



Ο χώρος $\mathbb{R}^\nu$

3.5 Ξέρουμε ότι ως προς ένα σύστημα αναφοράς σε κάθε διάνυσμα του επιπέδου αντιστοιχίζεται ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών (οι συντεταγμένες του) και αντιστρόφως. Μ' άλλα λόγια υπάρχει μια απεικόνιση *«1-1 και επί»* του συνόλου $\mathcal{P}$ των διανυσμάτων του επιπέδου στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Ακόμη ξέρουμε ότι, αν (α_1, α_2) και (β_1, β_2) είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντιστοίχως, τότε οι συντεταγμένες του $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι $(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2)$.

Εξάλλου, αν λ πραγματικός αριθμός, τότε οι συντεταγμένες του $\lambda\vec{\alpha}$ είναι $(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2)$.

Έτσι, αν θεωρήσουμε το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}^2$ και για οποιαδήποτε στοιχεία του (x_1, x_2), (y_1, y_2) και $\lambda\in\mathbb{R}$ ορίσουμε τις πράξεις:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2), \qquad \lambda\cdot(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

τότε, είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι το $\mathbb{R}^2$ είναι ένας διανυσματικός χώρος, γιατί ικανοποιούνται οι ιδιότητες (1) - (4) και (I) - (IV) της § 3.2.

Π.χ. για $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ και $v = (x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\cdot v &= (\lambda+\mu)\cdot(x_1, x_2)\\ &= ((\lambda+\mu)x_1, (\lambda+\mu)x_2)\\ &= (\lambda x_1+\mu x_1, \lambda x_2+\mu x_2)\\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\mu x_1, \mu x_2)\\ &= \lambda\cdot(x_1, x_2) + \mu\cdot(x_1, x_2)\\ &= \lambda\cdot v+\mu\cdot v.\end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι μηδενικό διάνυσμα του χώρου $\mathbb{R}^2$ είναι το (0, 0) καί αντίθετό του $v = (x_1, x_2)$ είναι το $-v = (-x_1, -x_2)$.

Ομοίως, αν θεωρήσουμε το σύνολο $\mathbb{R}^3$ των *«τριάδων»* πραγματικών αριθμών και για οποιαδήποτε στοιχεία του (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) και $\lambda\in\mathbb{R}$, ορίσουμε τις πράξεις:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3), \qquad \lambda\cdot(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

τότε το $\mathbb{R}^3$ είναι επίσης ένας διανυσματικός χώρος.

Γενικά, αν θεωρήσουμε το σύνολο $\mathbb{R}^\nu$ των *«ν-άδων»* πραγματικών αριθμών και για οποιαδήποτε στοιχεία του $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, ορίσουμε τις πράξεις:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) + (y_1, y_2, \ldots, y_\nu) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_\nu+y_\nu),$$
$$\lambda\cdot(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_\nu)$$

τότε, όπως αποδεικνύεται εύκολα, το $\mathbb{R}^\nu$ είναι ένας διανυσματικός χώρος με μηδενικό στοιχείο το $\mathbf{O} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Αντίθετο του διανύσματος $v = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ είναι το $-v = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_\nu)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η απεικόνιση που αντιστοιχίζει σε κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}\in\mathcal{P}$ το ζεύγος των συντεταγμένων του $(x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2$, αντιστοιχίζει και σε κάθε άθροισμα στοιχείων του $\mathcal{P}$ το άθροισμα των εικόνων τους στο $\mathbb{R}^2$, καθώς και σε κάθε γινόμενο $\lambda\vec{\alpha}$ το γινόμενο του λ με την εικόνα (x_1, x_2) του $\vec{\alpha}$. Έτσι ο λογισμός στο $\mathcal{P}$ μεταφέρεται σε αντίστοιχο λογισμό στο $\mathbb{R}^2$. Γι' αυτό οι διανυσματικοί χώροι $\mathcal{P}$ και $\mathbb{R}^2$ μπορούν να θεωρηθούν **ταυτιζόμενοι.** Δηλαδή κάθε ζεύγος $(x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2$ θεωρείται ως το διάνυσμα του $\mathcal{P}$ με συντεταγμένες x_1 και x_2. Ομοίως κάθε τριάδα $(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3$ θεωρείται ως το διάνυσμα του $\mathcal{E}$ με συντεταγμένες x_1, x_2 και x_3.

Γενικά, κάθε ν-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)\in\mathbb{R}^\nu$ μπορεί να θεωρηθεί ως «διάνυσμα» με **συντεταγμένες** $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Έχουμε, έτσι, μια γενίκευση της έννοιας του «γεωμετρικού διανύσματος».

Ασκήσεις: 1, 2, 3, 4, 5, 6

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ

Διανυσματικός υπόχωρος

3.6 Είδαμε ότι το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων ενός επιπέδου είναι ένας διανυσματικός χώρος. Επειδή το σύνολο αυτό είναι υποσύνολο του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, χαρακτηρίζεται ως *«διανυσματικός υπόχωρος του $\mathcal{E}$»*. Γενικά δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ **Ένα υποσύνολο V_1 ενός διανυσματικού χώρου V λέγεται *διανυσματικός υπόχωρος* ή απλά *υπόχωρος* του V, όταν το ίδιο το V_1 είναι διανυσματικός χώρος ως προς τις πράξεις του V (που περιορίζονται φυσικά στα στοιχεία του V_1).**

Στους διανυσματικούς υπόχωρους ισχύει το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Το υποσύνολο V_1 ενός διανυσματικού χώρου V είναι διανυσματικός υπόχωρος του V, αν και μόνο αν το V_1 είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του V.**

Απόδειξη

Έστω ότι το V_1 είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του V. Τότε, όπως φαίνεται αμέσως, θα ισχύουν στο V_1 οι ιδιότητες (I) - (IV) της § 3.2. Εξάλλου, αν $v\in V_1$, θα είναι και το $-v = (-1)v\in V_1$ και συνεπώς το V_1 θα είναι (§ 2.1.3) υποομάδα της προσθετικής ομάδας V. Άρα το V_1 είναι διανυσματικός χώρος, υπόχωρος του V.

Το αντίστροφο είναι φανερό.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το μηδενικό στοιχείο του V ανήκει σε κάθε διανυσματικό υπόχωρο V_1 (§ 2.13). Επομένως όταν $A\subseteq V$ και $\mathbf{O}\notin A$, τότε το A δεν είναι υπόχωρος του V. Είναι φανερό ότι και το $\{\mathbf{O}\}$ είναι υπόχωρος του V.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Κάθε διανυσματική ευθεία $\mathcal{D} = \{x\vec{\alpha} : x\in\mathbb{R}\}$ που παράγεται από ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}\in\mathcal{E}^*$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Πράγματι, το άθροισμα δυο συγγραμμικών προς το $\vec{\alpha}$ διανυσμάτων είναι διάνυσμα συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$. Επίσης το γινόμενο πραγματικού με διάνυσμα συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$ είναι διάνυσμα συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$.

2. Το σύνολο $V = \{(x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2 : 3x_1 + x_2 = 1\}$ δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ γιατί $(0, 0)\notin V$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να δειχτεί ότι για να είναι ένα μη κενό σύνολο $V_1 \subseteq V$ υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V, πρέπει και αρκεί για κάθε $v_1, v_2 \in V_1$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ να είναι**

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V_1 \qquad (1)$$

Είναι φανερό ότι η συνθήκη (1) είναι αναγκαία.
Αντιστρόφως, αν ισχύει η (1), τότε για $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ είναι $v_1+v_2 \in V_1$, δηλαδή το V_1 είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση. Επίσης για $\lambda_2 = 0$ είναι $\lambda_1 v_1 \in V_1$, δηλαδή το V_1 είναι κλειστό και ως προς τον πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό, οπότε είναι υπόχωρος του V.

2. **Αν V_1, V_2 είναι διανυσματικοί υπόχωροι του χώρου V, να δειχτεί ότι και το σύνολο $V_1 \cap V_2$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.**

Έστω $v_1, v_2 \in V_1 \cap V_2$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Επειδή $v_1, v_2 \in V_1$, σύμφωνα με την προηγούμενη εφαρμογή, θα είναι $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V_1$. Ομοίως είναι $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V_2$.

Συνεπώς θα είναι $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V_1 \cap V_2$ και το σύνολο $V_1 \cap V_2$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

Υπόχωρος παραγόμενος από k διανύσματα

3.7 Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δυο μη συγγραμμικά διανύσματα του $\mathcal{E}^*$. Το σύνολο των διανυσμάτων της μορφής $\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}$ με $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ είναι το διανυσματικό επίπεδο $\mathcal{P}$ που παράγεται από τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Επειδή

- $(\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}) + (\lambda_1'\vec{\alpha}+\lambda_2'\vec{\beta}) = (\lambda_1+\lambda_1')\vec{\alpha} + (\lambda_2+\lambda_2')\vec{\beta} \in \mathcal{P}$ και
- $\lambda(\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}) = (\lambda\lambda_1)\vec{\alpha}+(\lambda\lambda_2)\vec{\beta} \in \mathcal{P}$

το $\mathcal{P}$ *είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathcal{E}$.*

Έστω τώρα ένας διανυσματικός χώρος V και v ένα στοιχείο του. Το σύνολο V_1 των διανυσμάτων της μορφής λv με $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V, γιατί για κάθε $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ είναι

$$\lambda v + \lambda' v = (\lambda+\lambda')v \in V_1 \quad \text{και} \quad \lambda'(\lambda v) = (\lambda'\lambda)v \in V_1$$

Λέμε τότε ότι το v **παράγει τον υπόχωρο V_1**. Ειδικότερα, αν $v = \mathbf{O}$, τότε είναι $V_1 = \{\mathbf{O}\}$.

Γενικότερα, έστω $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. Κάθε διάνυσμα της μορφής $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_k v_k$ με $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** των $v_1, v_2, \dots, v_k$ **με συντελεστές** $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Τότε ισχύει το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. Το σύνολο V_k των γραμμικών συνδυασμών των $v_1, v_2, \dots, v_k$ με συντελεστές πραγματικούς είναι ένας υπόχωρος του V.**

Απόδειξη

Έστω $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$ και $\lambda_1' v_1 + \lambda_2' v_2 + \dots + \lambda_k' v_k$ δυο γραμμικοί συνδυασμοί των $v_1, v_1, \dots, v_k$. Τότε

$(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_k v_k) + (\lambda_1' v_1+\lambda_2' v_2+\dots+\lambda_k' v_k) = (\lambda_1+\lambda_1')v_1 + (\lambda_2+\lambda_2')v_2 + \dots + (\lambda_k+\lambda_k')v_k \in V_k$
και $\lambda(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_k v_k) = (\lambda\lambda_1)v_1+(\lambda\lambda_2)v_2+\dots+(\lambda\lambda_k)v_k \in V_k$

Άρα το σύνολο V_k είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του V και συνεπώς (§ 3.6) είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ **παράγουν τον υπόχωρο** V_k του V.

Από τα προηγούμενα γίνεται φανερό, ότι για να διαπιστώσουμε αν *ένα διάνυσμα* $v \in V$ *ανήκει ειδικότερα στον υπόχωρο* V_k *που παράγουν τα* $v_1, v_2, \dots, v_k$, *αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχουν* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, *ώστε:*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k \qquad (1)$$

(Φυσικά στον V_k ανήκουν και τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ αφού π.χ. $v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_k$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Οι πίνακες $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ παράγουν το διανυσματικό χώρο με στοιχεία της μορφής $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, που είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbf{\Pi}_2$.

2. Τα διανύσματα $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ παράγουν ολόκληρο το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$, γιατί κάθε διάνυσμα $v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ γράφεται
$$v = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0, 1) = x_1 e_1 + x_2 e_2,$$
δηλαδή ως γραμμικός συνδυασμός των e_1, e_2.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν $v_{\kappa+1} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_\kappa v_\kappa$, τότε ο υπόχωρος $V_{\kappa+1}$ που παράγουν τα $v_1, v_2, \dots, v_\kappa, v_{\kappa+1}$ συμπίπτει με τον υπόχωρο V_κ που παράγουν τα $v_1, v_2, \dots, v_\kappa$ (αφού $v_{\kappa+1} \in V_\kappa$).

Ασκήσεις: 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

Γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία διανυσμάτων

3.8 Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα του $\mathcal{E}$, δηλαδή συγγραμμικά, τότε ένα τουλάχιστο από αυτά ανήκει στον υπόχωρο που παράγει το άλλο. Ο υπόχωρος αυτός είναι:

- ο $\{\vec{0}\}$, αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{0}$
- η διανυσματική ευθεία $\mathcal{D}$ που παράγεται π.χ. από το $\vec{\alpha}$, αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$.

Επίσης, αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα του $\mathcal{E}$, δηλαδή συνεπίπεδα, τότε ένα τουλάχιστο από αυτά ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα δυο άλλα. Ο υπόχωρος αυτός είναι:

- ο $\{\vec{0}\}$, αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma} = \vec{0}$
- η διανυσματική ευθεία $\mathcal{D}$ που παράγεται π.χ. από το $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, αν $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \,//\, \vec{\gamma}$
- το διανυσματικό επίπεδο $\mathcal{P}$ που παράγεται π.χ. από τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, αν αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Η γραμμική εξάρτηση σ' ένα οποιοδήποτε διανυσματικό χώρο V ορίζεται ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ **Τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_k$ ($k \geqslant 2$) του διανυσματικού χώρου V λέγονται *γραμμικώς εξαρτημένα*, όταν ένα τουλάχιστο απ' αυτά ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα υπόλοιπα.**

Διανύσματα που δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένα λέγονται *γραμμικώς ανεξάρτητα*.

Έτσι, αν τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, θα έχουμε π.χ. $v_k = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1}$ με $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{R}$. Η ισότητα αυτή γράφεται

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{k-1} v_{v-1} + (-1) v_k = \mathbf{O}$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές των $v_1, v_2, \dots, v_k$ **δεν είναι όλοι** μηδέν.

Αντιστρόφως, από κάθε ισότητα της μορφής $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \mathbf{O}$ με ένα τουλάχιστο συντελεστή μη μηδενικό, δηλαδή $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$, παίρνουμε, αν π.χ. $\lambda_k \neq 0$,

$$v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} v_2 - \dots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} v_{k-1}$$

και συνεπώς τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Έτσι έχουμε το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 **Τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_k$ του διανυσματικού χώρου V είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αν και μόνο αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι:**

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \mathbf{O} \text{ και } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

Το μηδενικό διάνυσμα ικανοποιεί τις συνθήκες του παραπάνω θεωρήματος για $k = 1$, γιατί $\lambda\mathbf{O} = \mathbf{O}$ και όταν $\lambda \neq 0$. Γι αυτό το $\mathbf{O}$ θεωρείται ένα διάνυσμα γραμμικώς εξαρτημένο.

Αντίθετα, ένα μη μηδενικό διάνυσμα v θεωρείται γραμμικώς ανεξάρτητο, γιατί η $\lambda v = \mathbf{O}$ ισχύει μόνο όταν $\lambda = 0$.

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 1 και του ορισμού των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων είναι ότι για γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_k$ η ισότητα $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \mathbf{O}$ **δε μπορεί να ισχύει** παρά μόνο, όταν $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = (0, 0, \dots, 0)$. Αυτό διατυπώνεται και ως εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 **Τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_k$ του διανυσματικού χώρου V είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αν και μόνο αν:**

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \mathbf{O} \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = (0, 0, \dots, 0)$$

Π.χ. τα διανύσματα $e_1 = (1, 0)$ και $e_2 = (0, 1)$ του χώρου $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, γιατί από την ισότητα $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \mathbf{O}$ έχουμε:

$$\lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1) = (0, 0) \Leftrightarrow (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) = (0, 0) \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Τα διανύσματα $v_1 = (-1, 1)$ και $v_2 = (3, -3)$ του χώρου $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, γιατί $v_2 = (3, -3) = -3(-1, 1) = -3v_1$.

2. Οι πίνακες $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ του χώρου $\mathbf{\Pi}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι, γιατί από την ισότητα $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = \mathbf{O}$ έχουμε ισοδύναμα:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0, 0, 0, 0).$$

3. Τα διανύσματα $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, …, $e_\nu = (0, \dots, 0, 1)$ του χώρου $\mathbb{R}^\nu$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, γιατί από την ισότητα $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_\nu e_\nu = \mathbf{O}$ έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} & \lambda_1(1, 0, \dots, 0) + \lambda_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + \lambda_\nu(0, \dots, 0, 1) = (0, 0, \dots, 0) \\ \Leftrightarrow\ & (\lambda_1, 0, \dots, 0) + (0, \lambda_2, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, \lambda_\nu) = (0, 0, \dots, 0) \\ \Leftrightarrow\ & (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu) = (0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Ασκήσεις: 14, 15, 16.

Βασικές ιδιότητες γραμμικής εξάρτησης

3.9 Έστω ρ γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_\rho$ του χώρου V. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\rho \in \mathbb{R}$, όχι όλοι μηδενικοί, τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_\rho v_\rho = \mathbf{O} \qquad (2)$$

Έτσι, αν θεωρήσουμε τα k διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_\rho, v_{\rho+1}, \dots, v_k$ θα έχουμε από τη (2)

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_\rho v_\rho + 0 \cdot v_{\rho+1} + \dots + 0 \cdot v_k = \mathbf{O}$$

που σημαίνει ότι τα k αυτά διανύσματα είναι επίσης γραμμικώς εξαρτημένα.

Ώστε: **I. Αν ρ διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_\rho$ ενός διανυσματικού χώρου V είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε και τα $k > \rho$ διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_\rho, v_{\rho+1}, \dots, v_k$ είναι επίσης γραμμικώς εξαρτημένα.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ειδικότερα, αν ένα από τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{O}$, τότε (§ 3.8), τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Συνέπεια της προηγούμενης ιδιότητας είναι ότι:

II. Αν k διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε και οποιαδήποτε από αυτά είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα.

Πράγματι, αν υπήρχαν $\rho < k$ γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα, θα έπρεπε και τα k διανύσματα να είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση k γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων $v_1, v_2, \dots, v_k$ τα οποία **μαζί** με ένα διάνυσμα $u \in V$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1} \in \mathbb{R}$, όχι όλοι μηδέν, ώστε

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} u = \mathbf{O} \qquad (3)$$

Είναι $\lambda_{k+1} \neq 0$, γιατί αν $\lambda_{k+1} = 0$ από την (3) προκύπτει ότι τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα (άτοπο). Έτσι από την (3) έχουμε

$$u = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{k+1}} v_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} v_k$$

Δηλαδή το u εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \dots, v_k$ και συνεπώς ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν.

Ώστε: **III. Αν τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ενώ τα $v_1, v_2, \dots, v_k$, u είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε το u ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα $v_1, v_2, \dots, v_k$.**

Συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας διανυσμάτων του $\mathbb{R}^\nu$

3.10 Θεωρούμε 3 διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^\nu$ $(\nu \geq 3)$, π.χ. τα $a_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{\nu 1})$, $a_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{\nu 2})$, $a_3 = (\alpha_{13}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{\nu 3})$.

Τότε η ισότητα $$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = \mathbf{O} \qquad (4)$$

είναι ισοδύναμη με το ομογενές σύστημα $\nu \times 3$:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \alpha_{13}\lambda_3 = 0 \\ \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \alpha_{23}\lambda_3 = 0 \\ \alpha_{31}\lambda_1 + \alpha_{32}\lambda_2 + \alpha_{33}\lambda_3 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{\nu 1}\lambda_1 + \alpha_{\nu 2}\lambda_2 + \alpha_{\nu 3}\lambda_3 = 0 \end{array}\right. \qquad (5)$$

Έστω ότι τα a_1, a_2, a_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Τότε το σύστημα (5) λόγω της (4) έχει **μόνο τη μηδενική λύση.**

Θα αποδείξουμε ότι:

Ένας τουλάχιστο υποπίνακας 3 × 3 του πίνακα A του συστήματος έχει ορίζουσα μη μηδενική.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι $a_1 \neq \mathbf{O}$. Άρα μια τουλάχιστο από τις συντεταγμένες του a_1 δεν είναι 0. Έστω $\alpha_{11} \neq 0$. Επίσης υπάρχει μια τουλάχιστο μη μηδενική ορίζουσα της μορφής $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} \end{vmatrix}$ με $2 \leq \mu \leq \nu$. Γιατί αν όλες οι παραπάνω ορίζουσες ήταν 0 θα είχαμε, για κάθε μ, $\alpha_{\mu 2} = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} \cdot \alpha_{\mu 1}$ δηλαδή $a_2 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} \cdot a_1$, που σημαίνει γραμμική εξάρτηση των a_1 και a_2 (άτοπο). Ώστε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Τότε για $\lambda_3 = z_0 \neq 0$ το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων του (6) έχει μοναδική μη μηδενική λύση (x_0, y_0, z_0). Η λύση αυτή επαληθεύει και μια από τις υπόλοιπες εξισώσεις του (6) αν και μόνο αν το σύστημα των τριών εξισώσεων έχει ορίζουσα 0 (§ 1.25).

Αν λοιπόν όλοι οι υποπίνακες 3 × 3 του A είχαν ορίζουσα 0, τότε το σύστημα (6) θα είχε τη μη μηδενική λύση (x_0, y_0, z_0) που είναι άτοπο.

Αντιστρόφως, αν ένας υποπίνακας 3 × 3 του A έχει ορίζουσα μη μηδενική, τότε το σύστημα των αντίστοιχων στην ορίζουσα αυτή εξισώσεων του (6) θα έχει μόνο τη μηδενική λύση, που φυσικά επαληθεύει όλες τις εξισώσεις του συστήματος και συνεπώς είναι η μοναδική λύση του. Άρα τα διανύσματα a_1, a_2, a_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Γενικά αποδεικνύεται το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **ρ διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^\nu$ με $\rho \leqslant \nu$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστο υποπίνακας $\rho\times\rho$ του πίνακα που έχει στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων αυτών, έχει ορίζουσα διαφορετική από το μηδέν.**

Ας συμβολίσουμε με $|v_1\ v_2\ \dots\ v_\nu|$ την ορίζουσα ν τάξης που οι στήλες της είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $v_1, v_2, \dots, v_\nu \in \mathbb{R}^\nu$. Τότε ειδικότερα:
Τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_\nu$ του χώρου $\mathbb{R}^\nu$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αν και μόνο αν

$$|v_1\ v_2\ \dots\ v_\nu| \neq 0$$

ΠΟΡΙΣΜΑ **Τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_\rho$ ($\rho \leqslant \nu$) του χώρου $\mathbb{R}^\nu$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αν και μόνο αν όλοι οι υποπίνακες $\rho\times\rho$ του πίνακα των συντεταγμένων των $v_1, v_2, \dots, v_\rho$ έχουν ορίζουσα μηδέν.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Τα διανύσματα $u_1 = (-3, 2)$ και $u_2 = (6, -4)$ του χώρου $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, γιατί $|u_1\ u_2| = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$.

2. Τα διανύσματα $v_1 = (2, 6, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1)$ και $v_3 = (4, 14, -3)$ του χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, γιατί

$$|v_1\ v_2\ v_3| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 14 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 14 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Αν τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 ενός χώρου V είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, να δειχτεί ότι και τα $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.**

Η ισότητα $\lambda_1(v_1 + v_2) + \lambda_2(v_2 + v_3) + \lambda_3(v_3 + v_1) = \mathbf{O}$ με $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ γράφεται $(\lambda_1 + \lambda_3)v_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)v_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)v_3 = \mathbf{O}$.

Επειδή τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα η τελευταία ισότητα θα ισχύει, αν και μόνο αν

$$(\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{cases} \lambda_1 \quad\ \ +\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \quad\ \ = 0 \\ \quad\ \ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό έχει μόνο τη μηδενική λύση $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$, γιατί

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Συνεπώς τα $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

2. **Αν $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι οποιαδήποτε διανύσματα ενός χώρου V, να δειχτεί ότι τα διανύσματα $v_1 - v_2, v_2 - v_3, \dots, v_{k-1} - v_k, v_k - v_1$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.**

Πράγματι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$ έχουμε
$\lambda(v_1-v_2) + \lambda(v_2-v_3) + \dots + \lambda(v_{k-1}-v_k) + \lambda(v_k-v_1) = \lambda(v_1-v_2+v_2-v_3+\dots+v_{k-1}-v_k+v_k-v_1) = \lambda\mathbf{O} = \mathbf{O}$.

3. **Να βρεθεί για ποιές τιμές του πραγματικού α τα διανύσματα $v_1 = (1, -1, \alpha)$, $v_2 = (\alpha, 2, -3)$ και $v_3 = (2, \alpha, \alpha+1)$ του χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.**

Για να είναι τα v_1, v_2, v_3 γραμμικώς ανεξάρτητα πρέπει και αρκεί

$$D = |v_1\ v_2\ v_3| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ -1 & 2 & \alpha \\ \alpha & -3 & \alpha+1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1)$$

Με τον κανόνα Sarrus βρίσκουμε $D = (\alpha+2)(\alpha^2-\alpha+4)$ και επειδή για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι $\alpha^2-\alpha+4 \neq 0$, η (1) είναι ισοδύναμη με την: $\alpha+2 \neq 0$ ή την $\alpha \neq -2$. Συνεπώς τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα για κάθε $\alpha \in (\mathbb{R} - \{-2\})$.

Ασκήσεις: 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24.

ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

Βάση διανυσματικού χώρου

3.11 Ξέρουμε ότι το σύνολο $\{\vec{\alpha}\}$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ λέγεται *βάση* της διανυσματικής ευθείας $\mathcal{D}$ την οποία παράγει το $\vec{\alpha}$. Επίσης το διανυσματικό επίπεδο $\mathcal{P}$ που παράγεται από δυο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχει βάση το σύνολο $\{\vec{\alpha}, \vec{\beta}\}$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ **Το σύνολο $\{v_1, v_2, \dots, v_\mu\}$ λέγεται *βάση* του διανυσματικού χώρου V, όταν τα $v_1, v_2, \dots, v_\mu$:**

- **είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του V και**
- **παράγουν το χώρο V.**

Έστω $\{v_1, v_2, ..., v_\mu\}$ μια βάση του χώρου V. Τότε για κάθε $v \in V$ υπάρχουν $x_1, x_2, ..., x_\mu \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_\mu v_\mu \qquad (1)$$

Αν υποθέσουμε ότι την (1) την επαληθεύουν και οι $x_1', x_2', ..., x_\mu'$, θα έχουμε:

$$v = x_1'v_1 + x_2'v_2 + ... + x_\mu' v_\mu = x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_\mu v_\mu$$
$$\Leftrightarrow (x_1' - x_1)v_1 + (x_2' - x_2)v_2 + ... + (x_\mu' - x_\mu)v_\mu = \mathbf{O}$$
$$\Leftrightarrow x_1' - x_1 = x_2' - x_2 = ... = x_\mu' - x_\mu = 0$$
$$\Leftrightarrow (x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ ...,\ x_\mu' = x_\mu).$$

Έχουμε λοιπόν το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν $\{v_1, v_2, ..., v_\mu\}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου V, τότε κάθε διάνυσμα $v \in V$ εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης αυτής του V.**

Η μ-άδα $(x_1, x_2, ..., x_\mu)$ λέγεται **μ-άδα των συντεταγμένων του διανύσματος** $v \in V$ **ως προς τη μ-άδα** $(v_1, v_2, ..., v_\mu)$ **των διανυσμάτων της βάσης του V.**

Κανονική βάση του $\mathbb{R}^\nu$

3.12 Τα διανύσματα

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0),\ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0),\ ...,\ e_\nu = (0, 0, ..., 0, 1)$$

του χώρου $\mathbb{R}^\nu$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, όπως είδαμε στο παράδειγμα 2 της §3.8, και παράγουν το χώρο $\mathbb{R}^\nu$, γιατί κάθε $v = (x_1, x_2, ..., x_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$ γράφεται

$$v = (x_1, 0, 0, ..., 0) + (0, x_2, 0, ..., 0) + ... + (0, 0, ..., 0, x_\nu)$$
$$= x_1(1, 0, 0, ..., 0) + x_2(0, 1, 0, ..., 0) + ... + x_\nu(0, 0, ..., 0, 1)$$
$$= x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_\nu e_\nu$$

Άρα το σύνολο $\{e_1, e_2, ..., e_\nu\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^\nu$. Η βάση αυτή ονομάζεται **κανονική βάση** του $\mathbb{R}^\nu$. Οι αριθμοί $x_1, x_2, ..., x_\nu$, που στην παρατήρηση της §3.5 τους ονομάσαμε συντεταγμένες του v, είναι πιο συγκεκριμένα οι συντεταγμένες του v ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^\nu$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το θεώρημα και το πόρισμα της § 3.10 ισχύουν και στην περίπτωση που τα διανύσματα εκφράζονται με τις συντεταγμένες τους ως προς οποιαδήποτε βάση του $\mathbb{R}^\nu$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Αν $v_1 = (1, 0)$ και $v_2 = (0, -1)$, τότε το $\{v_1, v_2\}$ είναι βάση του χώρου $\mathbb{R}^2$. Πράγματι, τα v_1, v_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, γιατί $|v_1 v_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, και παράγουν το χώρο $\mathbb{R}^2$, γιατί κάθε διάνυσμα $v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ γράφεται
$$v = x_1(1, 0) + x_2(0, 1) = x_1(1, 0) - x_2(0, -1) = x_1v_1 - x_2v_2.$$

2. Τα διανύσματα $u_1 = (3, 0)$, $u_2 = (1, 1)$ του χώρου $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, γιατί $|u_1 u_2| = 3 \neq 0$, και παράγουν το χώρο $\mathbb{R}^2$, γιατί κάθε $v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ γράφεται
$$v = \frac{x_1 - x_2}{3}u_1 + x_2u_2$$
Συνεπώς το $\{u_1, u_2\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.

3. Το $\{v_1, v_2\}$, όπου $v_1 = (1, -2)$ και $v_2 = (-3, 6)$, δεν είναι βάση του $\mathbb{R}^2$, γιατί τα v_1, v_2 είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αφού $|v_1\ v_2| = 0$.

4. Αν $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, τότε το $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ είναι βάση του χώρου Π_2, γιατί οι πίνακες A_1, A_2, A_3, A_4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι (§ 3.8, παράδ. 2) και παράγουν τον Π_2, γιατί κάθε πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ γράφεται:
$$A = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 + \delta A_4.$$

5. Οι συναρτήσεις f_1, f_2 με $f_1(x) = 1$ και $f_2(x) = x$ είναι δυο γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του διανυσματικού χώρου $F_{\mathbb{R}}$ των συναρτήσεων. Πράγματι, από την ισότητα $\lambda_1f_1 + \lambda_2f_2 = \mathbf{O}$ έχουμε, **για κάθε** $x \in \mathbb{R}$ $(\lambda_1f_1 + \lambda_2f_2)(x) = 0$ ή $\lambda_1 + \lambda_2x = 0$. Από την τελευταία ισότητα για $x = 0$ και $x = 1$ βρίσκουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Όμως οι f_1, f_2 δεν παράγουν το χώρο $F_{\mathbb{R}}$, γιατί π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = x^2$ δεν εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των f_1 και f_2. Άρα το σύνολο $\{f_1, f_2\}$ δεν είναι βάση του διανυσματικού χώρου $F_{\mathbb{R}}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να δειχτεί ότι το $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, όπου $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1, 1)$, $v_4 = (1, 0, 0, 1)$ είναι μια βάση του χώρου $\mathbb{R}^4$

Τα διανύσματα v_1, v_2, v_3, v_4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, γιατί

$$|v_1\ v_2\ v_3\ v_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1-0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Ακόμη τα v_1, v_2, v_3, v_4 παράγουν το χώρο $\mathbb{R}^4$, γιατί για κάθε $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ υπάρχουν πραγματικοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, ώστε $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \lambda_3v_3 + \lambda_4v_4$.

Πράγματι από την τελευταία ισότητα παίρνουμε

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4,\ \lambda_1+\lambda_3,\ \lambda_2+\lambda_3,\ \lambda_3+\lambda_4)$, δηλαδή το σύστημα
$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = \alpha \\ \lambda_1+\lambda_3 = \beta \\ \lambda_2+\lambda_3 = \gamma \\ \lambda_3+\lambda_4 = \delta \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό έχει τη λύση:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2},\ \lambda_2 = \frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{2},\ \lambda_3 = \frac{-\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2},\ \lambda_4 = \frac{\alpha-\beta-\gamma+\delta}{2}$$

Άρα το $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ είναι βάση του χώρου $\mathbb{R}^4$.

Ασκήσεις: 25, 26, 27.

Διάσταση διανυσματικού χώρου

3.13 Στην αναλυτική γεωμετρία είδαμε ότι το διανυσματικό επίπεδο $\mathcal{P}$ έχει περισσότερες από μια βάσεις, γιατί **δυο** οποιαδήποτε γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματά του ορίζουν μια βάση του. Εξάλλου τρία οποιαδήποτε διανύσματα του $\mathcal{P}$ είναι πάντοτε γραμμικώς εξαρτημένα. Ο αριθμός 2 λέγεται *διάσταση* του $\mathcal{P}$. Ομοίως η διανυσματική ευθεία $\mathcal{D}$ έχει διάσταση 1 και ο χώρος $\mathcal{E}$ διάσταση 3.

Γενικά, αν $\{v_1, v_2, \ldots, v_\mu\}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου V, αποδεικνύεται[1] ότι:

- **περισσότερα από μ διανύσματα του V είναι πάντοτε γραμμικώς εξαρτημένα,**

και επομένως

- **κάθε άλλη βάση του V έχει επίσης μ στοιχεία**

(γιατί αν είχε λιγότερα, θα έπρεπε τα $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ να ήταν γραμμικώς εξαρτημένα). Και αντιστρόφως:

- **Οποιαδήποτε μ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του V αποτελούν βάση του,** γιατί τα μ αυτά διανύσματα και κάθε $u \in V$ είναι $\mu+1$ γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα. Άρα το u ανήκει στο χώρο που παράγουν τα μ αρχικά διανύσματα.

Ο χαρακτηριστικός αυτός αριθμός μ λέγεται **διάσταση** του χώρου V. Π.χ. ο χώρος $\mathbf{\Pi_2}$ των πινάκων 2×2 έχει διάσταση 4 (§3.12, παράδ. 4).

Ειδικά, όπως προκύπτει από την κανονική βάση του:

Ο χώρος $\mathbb{R}^\nu$ έχει διάσταση ν.

Διάσταση υπόχωρου παραγόμενου από k διανύσματα

3.14 Έστω V_k ο υπόχωρος που παράγεται από τα k διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Αν τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε αποτελούν βάση του χώρου V_k ο οποίος φυσικά έχει διάσταση k. (Αν δεν υπάρχουν γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, δηλαδή $v_1 = v_2 = \ldots = v_k = \mathbf{O}$, τότε $V_k = \{\mathbf{O}\}$). Στη γενική περίπτωση, από τα k διανύσματα υπάρχουν ρ **το πολύ** γραμμικώς ανεξάρτητα, με $1 \leqslant \rho < k$.

(1) Η απόδειξη παραλείπεται.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι γραμμικώς ανεξάρτητα είναι τα $v_1, v_2, \ldots, v_\rho$. Τότε, αν u είναι ένα οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα, τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_\rho$, u είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Άρα το u εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \ldots, v_\rho$. Το ίδιο **και το λu**, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Εξάλλου αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε διάνυσμα v του V_k, θα έχουμε

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_\rho v_\rho + \lambda_{\rho+1} v_{\rho+1} + \ldots + \lambda_k v_k$$

Αλλά, όπως είπαμε, καθένα από τα $\lambda_{\rho+1} v_{\rho+1}, \ldots, \lambda_k v_k$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \ldots, v_\rho$. Επομένως και το v ως άθροισμα γραμμικών συνδυασμών, θα είναι επίσης γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \ldots, v_\rho$. Και επειδή τα τελευταία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αποτελούν βάση του V_k, του οποίου συνεπώς η διάσταση είναι ρ.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν από τα k διανύσματα τα οποία παράγουν ένα υπόχωρο V_k του V υπάρχουν ρ γραμμικώς ανεξάρτητα, $1 \leqslant \rho < k$, τα οποία μαζί με καθένα από τα υπόλοιπα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε ο V_k έχει διάσταση ρ.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω V′ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (1, 1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 1, 2, 2)$ και $v_3 = (3, 2, 4, 7)$. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του χώρου V′.

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ των συντεταγμένων των διανυσμάτων v_1, v_2, v_3.

Επειδή δυο γραμμές (2η και 3η) του A είναι ανάλογες, οι δυο υποπίνακες 3×3 του A που περιέχουν τις γραμμές αυτές, έχουν ορίζουσα μηδέν. Από τις ορίζουσες των δυο άλλων υποπινάκων 3×3 του A, αρκεί να εξετάσουμε μόνο την

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}, \text{ γιατί } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

Είναι $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3-3\cdot 1 \\ 1 & 1 & 2-3\cdot 1 \\ 3 & 2 & 7-3\cdot 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$

΄Αρα οι ορίζουσες όλων των υποπινάκων 3×3 του A είναι μηδέν καί συνεπώς τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα. ΄Ετσι το χώρο V΄ θα παράγουν λιγότερα από τρία διανύσματα. Παρατηρούμε τώρα ότι $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, δηλαδή τα v_1, v_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως αυτά παράγουν τον V΄. ΄Ετσι, μια βάση του V΄ είναι το $\{v_1, v_2\}$ και συνεπώς η διάστασή του είναι 2.

Ασκήσεις: 28, 29, 30, 31, 32.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γενικά

3.15 Στο πρώτο κεφάλαιο εφαρμόσαμε ιδιότητες των πινάκων και των οριζουσών για να επιλύσουμε γραμμικά συστήματα και διαπιστώσαμε ότι ένα τέτοιο σύστημα είναι δυνατό να έχει μια ή άπειρες ή καμιά λύση.

Στίς επόμενες παραγράφους θα εκμεταλλευτούμε τις ιδιότητες του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^\nu$ για να μελετήσουμε γενικά ένα σύστημα $\nu\times\mu$. Σ' ένα τέτοιο σύστημα θα υποθέτουμε, για κάθε άγνωστο, ότι οι συντελεστές του **δεν είναι όλοι μηδέν** (αφού στην αντίθετη περίπτωση (§ 1.14) ο άγνωστος θα μπορούσε να παραλειφθεί). Αυτό σημαίνει ότι κάθε στήλη του πίνακα του συστήματος, που είναι μια ν-άδα συντελεστών ενός αγνώστου, είναι ένα **μη μηδενικό** στοιχείο του $\mathbb{R}^\nu$. Μια τέτοια ν-άδα αντί να γράφεται $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$, στα επόμενα θα εμφανίζεται ως πίνακας-στήλη.

Σύστημα ν×μ

3.16 Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα $\nu\times\mu$, π.χ. το επόμενο σύστημα 3×5:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \qquad + 4x_5 = 4 \\ 6x_1 + 15x_2 - 18x_3 \qquad + 12x_5 = 14 \\ x_1 \qquad - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = -3 \end{cases} \qquad (1)$$

που γράφεται και ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -6 \\ -18 \\ -3 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} x_5 = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Αν παραστήσουμε με a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 τους πίνακες-στήλη που εμφανίζονται ως «συντελεστές» των αγνώστων και με b τον πίνακα-στήλη των σταθερών όρων, τότε το σύστημα (1) παίρνει τη μορφή:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = b \qquad (2)$$

Τα $a_1, a_2, \ldots, a_5$ είναι μη μηδενικά στοιχεία του χώρου $\mathbb{R}^3$ και παράγουν έναν υπόχωρό του V.

Αν τώρα υπάρχει λύση $(x_1, x_2, \ldots, x_5)$ του (1), τότε, λόγω της (2), το διάνυσμα b θα είναι στοιχείο του χώρου V.

Αντιστρόφως, αν $b\in V$, θα υπάρχουν (§ 3.7) $x_1, x_2, \ldots, x_5 \in \mathbb{R}$, ώστε το b να εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $a_1, a_2, \ldots, a_5$ και συνεπώς το σύστημα (1) θα έχει τη λύση $(x_1, x_2, \ldots, x_5)$.

Γενικά, αν έχουμε ένα σύστημα $\nu\times\mu$, τότε με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε παραπάνω καταλήγουμε στη «διανυσματική» μορφή του:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_\mu x_\mu = b \qquad (3)$$

Τα $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ θα παράγουν έναν υπόχωρο V του $\mathbb{R}^\nu$. Τότε, όπως και για το σύστημα (1), διαπιστώνουμε ότι:

Για να υπάρχει λύση του συστήματος (3) πρέπει και αρκεί το διάνυσμα b να ανήκει στον υπόχωρο V του $\mathbb{R}^\nu$ που παράγουν τα $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ειδικότερα, αν $V = \mathbb{R}^\nu$, τότε το σύστημα έχει πάντοτε λύση, αφού $b\in\mathbb{R}^\nu$ $(=V)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το σύστημα (1) έχει πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 & 0 & 4 \\ 6 & 15 & -18 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Επειδή οι δυο πρώτες γραμμές του είναι ανάλογες, όλοι οι υποπίνακες 3×3 του A θα έχουν ορίζουσα μηδέν. Συνεπώς τρία οποιαδήποτε από τα διανύσματα $a_1, a_2, \ldots, a_5$ είναι (§ 3.10, Πόρισμα) γραμμικώς εξαρτημένα. Εξάλλου η ορίζουσα 2ης τάξης $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ που προκύπτει από την 1η και 4η στήλη του A δεν είναι μηδέν. Επομένως τα a_1, a_4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα καί συνεπώς αποτελούν βάση του χώρου V (§ 3.13). Επειδή τώρα τα διανύσματα a_1, a_4 και b είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (βλέπε παραδ. 2, § 3.10), το $b\notin V$. ΄Αρα το σύστημα (1) δεν έχει λύση (αδύνατο).

Σύστημα Cramer

3.17 Αξιοσημείωτη είναι η περίπτωση συστήματος $\nu \times \nu$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_\nu x_\nu = b \qquad (4)$$

όπου τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_\nu$ **είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.**

Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται **σύστημα Cramer** και είναι φανερό ότι τώρα $V = \mathbb{R}^\nu$. Συνεπώς το $\{a_1, a_2, \ldots, a_\nu\}$ θα είναι βάση του V και επειδή προφανώς $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$, το b θα εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$. Άρα ένα σύστημα Cramer **έχει πάντοτε λύση** και μάλιστα **μοναδική.**

Έστω $D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$ η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων και

$D_1, D_2, \ldots, D_\nu$ οι ορίζουσες που προκύπτουν από τη D με αντικατάσταση της 1ης, 2ης, ..., νης στήλης της αντιστοίχως με τη στήλη των σταθερών όρων του (4). Επειδή τα $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα θα είναι

$$\boxed{D \neq 0}$$

Τότε λόγω της (4) και των ιδιοτήτων των οριζουσών θα έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 D &= x_1 |a_1 \;\; a_2 \ldots a_\nu| & \\ &= |a_1x_1 \;\; a_2 \ldots a_\nu| & [\text{ιδιότ. } 5 \ \S\ 1.14] \\ &= |b - a_2x_2 \ldots -a_\nu x_\nu \;\; a_2 \ldots a_\nu| & [\text{λόγω της } (4)] \\ &= |b \;\; a_2 \ldots a_\nu| - |a_2x_2 \;\; a_2 \ldots a_\nu| - \ldots - |a_\nu x_\nu \;\; a_2 \ldots a_\nu| & [\text{ιδιότ. } 7 \ \S\ 1.14] \\ &= |b \;\; a_2 \ldots a_\nu| & [\text{ιδιότ. } 6 \ \S\ 1.14] \\ &= D_1 & \end{aligned}$$

Ομοίως βρίσκουμε $x_2 D = D_2, \ldots, x_\nu D = D_\nu$ και επειδή $D \neq 0$ θα είναι:

$$\boxed{x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, \quad x_\nu = \frac{D_\nu}{D}}$$

Επίλυση συστήματος ν×μ

3.18 Στο παράδειγμα της § 3.16 είδαμε ότι **μπορεί** τα διανύσματα $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ να είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση που ένα σύστημα ν×μ **έχει λύση,** δηλαδή **b∈V**, και ακόμη ότι **ρ το πολύ** από τα διανύσματα $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Τότε (αφού και ένα μη μηδενικό διάνυσμα είναι πάντοτε γραμμικώς ανεξάρτητο) θα είναι $1 \leqslant \rho \leqslant \mu$. Ακόμη επειδή τα $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ είναι διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^\nu$ που έχει διάσταση ν, θα είναι $\rho \leqslant \nu$. Έτσι θα έχουμε:

$$1 \leqslant \rho \leqslant \mu, \qquad \rho \leqslant \nu \qquad (6)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας (με αναδιάταξη ενδεχομένως των αγνώστων στις εξισώσεις του συστήματος) υποθέτουμε ότι γραμμικώς ανεξάρτητα είναι τα $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$. Έτσι (§ 3.13) το $\{a_1, a_2, \ldots, a_\rho\}$ θα είναι βάση του υπόχωρου V. Τότε το σύστημα (3) γράφεται

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_\rho x_\rho + a_{\rho+1}x_{\rho+1} + \ldots + a_\mu x_\mu = b$$

ή

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_\rho x_\rho = b - a_{\rho+1}x_{\rho+1} - \ldots - a_\mu x_\mu \qquad (7)$$

και έχει μια τουλάχιστο από τις ορίζουσες ρ τάξης τού πίνακα των συντελεστών τών $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ διαφορετική από το μηδέν (Θεώρ. § 3.10).

Αν δώσουμε τώρα αυθαίρετες τιμές στους αγνώστους $x_{\rho+1}, x_{\rho+2}, \ldots, x_\mu$, τότε το διάνυσμα του δεύτερου μέλους της (7), ως γραμμικός συνδυασμός των $b, a_{\rho+1}, \ldots, a_\mu$, θα είναι στοιχείο του υπόχωρου V και συνεπώς θα εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης τού V.

Αυτό σημαίνει, ότι για κάθε σύστημα τιμών των μ-ρ ελεύθερων αγνώστων $x_{\rho+1}, x_{\rho+2}, \ldots, x_\mu$, υπάρχει μοναδική λύση του (7) και για να τη βρούμε, θεωρούμε ρ από τις εξισώσεις του (που να έχουν ορίζουσα συντελεστών των αγνώστων διαφορετική από το μηδέν) και εφαρμόζουμε τους τύπους Cramer. Άρα το σύστημα (3) θα έχει άπειρες λύσεις (μια για κάθε σύνολο τιμών των ελεύθερων αγνώστων).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ Έστω ότι ένα σύστημα $\nu\times\mu$ **έχει λύση** (δηλαδή $\mathbf{b}\in V$) και ότι ρ το πολύ από τα διανύσματα $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Τότε, αν:

- $\rho < \mu$, το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**, μια για κάθε σύστημα τιμών των μ-ρ ελεύθερων αγνώστων.
Ειδικότερα, αν $\nu < \mu$, τότε επειδή $\rho \leqslant \nu$, θα είναι $\rho < \mu$. Αυτό σημαίνει ότι:
Αν οι εξισώσεις ενός συστήματος είναι **λιγότερες** *από τους αγνώστους* **και το σύστημα έχει λύση,** *τότε θα έχει άπειρες λύσεις.*
- $\rho = \mu$, το σύστημα έχει **μοναδική λύση**, γιατί δεν υπάρχουν ελεύθεροι άγνωστοι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Στο σύστημα 4×3

$$\begin{cases} x+y+z = 2 \\ 2x+2y-z = 4 \\ 3x+3y+2z = 6 \\ 4x+4y+z = 8 \end{cases} \qquad (1)$$

έχουμε

$$a_1 = a_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \; a_3 = \begin{bmatrix}1\\-1\\2\\1\end{bmatrix} \text{ και } b = 2a_1.$$

Το διάνυσμα $b = 2a_1$ ανήκει στον υπόχωρο V του $\mathbb{R}^4$ τον οποίο παράγουν τα a_1, a_2, a_3 και συνεπώς το σύστημα (1) έχει λύση. Επειδή $a_1 = a_2$, τα a_1, a_2, a_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Εξάλλου επειδή $\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{vmatrix} = -3 \neq 0$, τα a_1, a_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έτσι είναι $\rho = 2 < 3 = \mu$ και επομένως το σύστημα (1) έχει άπειρες λύσεις με ελεύθερο τον άγνωστο y. Από τις δύο πρώτες εξισώσεις του (1) βρίσκουμε $x = 2-y$, $z = 0$ και συνεπώς οι άπειρες λύσεις του είναι

$$(x, y, z) = (2-y, y, 0)$$

2. Έστω ακόμη το σύστημα 4×3

$$\begin{cases} x+y+z = 2 \\ 2x+2y-z = 4 \\ 3x+3y+2z = 6 \\ 4x+4y+z = 7 \end{cases} \qquad (2)$$

το οποίο διαφέρει από το (1) μόνο κατά το σταθερό όρο της τελευταίας εξίσωσής του. Έτσι είναι πάλι $\rho = 2 < 3 = \mu$. Αλλά το σύστημα τώρα είναι αδύνατο, γιατί $b \notin V$. Πράγματι τα a_1, a_3, b είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\2 & -1 & 4\\4 & 1 & 7\end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

3. Στο σύστημα 4×3

$$\begin{cases} x+y+z = 2 \\ 2x+2y-z = 4 \\ 3x-y+2z = 2 \\ 4x+4y+z = 8 \end{cases} \qquad (3)$$

έχουμε

$$a_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \; a_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\\4\end{bmatrix}, \; a_3 = \begin{bmatrix}1\\-1\\2\\1\end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix}2\\4\\2\\8\end{bmatrix}, \qquad \text{και επειδή}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 2 & -1\\3 & -1 & 2\end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

το σύνολο $\{a_1, a_2, a_3\}$ είναι βάση του υπόχωρου V του $\mathbb{R}^4$ που παράγουν τα a_1, a_2, a_3. Έτσι είναι $\rho = \mu = 3$ και επειδή $b = a_1 + a_2 \in V$, το σύστημα (3) έχει μοναδική λύση. Τη λύση αυτή μπορούμε να τη βρούμε, αν γράψουμε το (3) με τη μορφή

$$a_1x + a_2y + a_3z = b = a_1 + a_2 = a_1\cdot 1 + a_2\cdot 1 + a_3\cdot 0$$

Συνεπώς η λύση του (3) είναι

$$(x, y, z) = (1, 1, 0)$$

Ομογενές σύστημα ν×μ

3.19 Ένα ομογενές σύστημα $\nu\times\mu$ έχει τη διανυσματική μορφή

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_\mu x_\mu = \mathbf{O} \qquad (8)$$

Επειδή το $\mathbf{O}$ είναι στοιχείο του χώρου V που παράγουν τα $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$, ένα ομογενές σύστημα έχει οπωσδήποτε λύση (§ 3.16) και προφανώς τη μηδενική. Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο:

Αν ρ το πολύ από τα διανύσματα $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε το ομογενές σύστημα έχει:

- **μόνο τη μηδενική λύση, αν και μόνο αν $\rho = \mu$**
- **άπειρες (μη μηδενικές) λύσεις, αν και μόνο αν $\rho < \mu$.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ένα ομογενές σύστημα $\nu\times\mu$ με $\nu < \mu$ έχει άπειρες λύσεις, γιατί $\rho \leqslant \nu < \mu$.

2. Αν $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu)$ είναι μια λύση του συστήματος (8), τότε και η μ-άδα $(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_\mu)$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, είναι επίσης λύση του (8).

Ασκήσεις: 33, 34.

Εφαρμογή. Σύστημα 3×3

3.20 Έστω το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2 \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 = \beta_3 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \qquad (9)$$

Αν V είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα a_1, a_2, a_3 και D η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος, τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

I. **$D \neq 0 \Leftrightarrow a_1, a_2, a_3$ γραμμικώς ανεξάρτητα.** Τότε είναι φανερό ότι $V = \mathbb{R}^3$ και επειδή $b \in V$, το (9) είναι σύστημα Cramer και έχει τη μοναδική λύση:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

II. **$D = 0 \Leftrightarrow$ τα a_1, a_2, a_3 γραμμικώς εξαρτημένα.** Τώρα έχουμε:

- **Ή μια τουλάχιστο από τις ελάσσονες ορίζουσες της D δεν είναι μηδέν,** π.χ. **$A_{33} \neq 0$,** που σημαίνει ότι τα **a_1, a_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα** και συνεπώς αυτά παράγουν τον V.

  Τότε:

  1. αν **$b \in V$**, που σημαίνει ότι η ορίζουσα με στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων a_1, a_2, b είναι μηδέν, δηλαδή **$D_3 = 0$**, το σύστημα (9) έχει άπειρες λύσεις με ελεύθερο τον άγνωστο x_3, που βρίσκονται από τις δυο πρώτες εξισώσεις του (σύστημα **αόριστο**).
  2. αν **$b \notin V$** δηλαδή **$D_3 \neq 0$**, το σύστημα είναι **αδύνατο.**

- **Ή όλες οι ελάσσονες της D είναι μηδέν,** που σημαίνει ότι **δεν υπάρχουν** δύο από τα a_1, a_2, a_3 **γραμμικώς ανεξάρτητα.** Άρα, επειδή ένα (μη μηδενικό) διάνυσμα είναι πάντοτε γραμμικώς ανεξάρτητο, τον υπόχωρο V θα παράγει οποιοδήποτε από τα a_1, a_2, a_3, π.χ. το $a_1 \neq \mathbf{O}$. Τότε,

  1. αν **$b \in V$**, δηλαδή **όλοι οι υποπίνακες 2×2** του πίνακα $[a_1\ b]$ έχουν **ορίζουσες μηδέν**, το σύστημα (9) έχει άπειρες λύσεις με ελεύθερους τους αγνώστους x_2, x_3 οι οποίες βρίσκονται από μια εξίσωσή του (σύστημα **αόριστο**). Π.χ. αν $\alpha_{11} \neq 0$, έχει τις λύσεις:

  $$\left(\frac{\beta_1}{\alpha_{11}} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}x_2 - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}x_3,\ x_2,\ x_3\right)$$

  2. αν **$b \notin V$**, δηλαδή ένας τουλάχιστο υποπίνακας 2×2 του πίνακα $[a_1\ b]$ έχει **ορίζουσα μη μηδενική**, το σύστημα είναι **αδύνατο.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στις δυο τελευταίες περιπτώσεις παρατηρούμε ότι είναι $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$ και το σύστημα μπορεί να είναι ή αδύνατο ή αόριστο. Αυτό παρατηρούμε και στα επόμενα παραδείγματα, στα οποία, όπως είναι φανερό, έχουμε $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$.

1. Το σύστημα $\left\{\begin{array}{l} x+y+z = 1 \\ 2x+2y+2z = 2 \\ 3x+3y+3z = 3 \end{array}\right.$ έχει άπειρες λύσεις, γιατί είναι ισοδύναμο με την πρώτη του εξίσωση.

2. Το σύστημα $\left\{\begin{array}{l} 3x-6y+9z = 6 \\ -2x+4y-6z = 4 \\ -x+2y-3z = 5 \end{array}\right.$ είναι αδύνατο, γιατί προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις του βρίσκουμε $0 = 15$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να λυθεί το σύστημα:**

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1+5x_2-6x_3 \quad +4x_5 = 4 \\ 6x_1+15x_2-18x_3 \quad +12x_5 = 12 \\ x_1 \quad -3x_3+x_4+2x_5 = -3 \end{array}\right. \qquad (1)$$

Το σύστημα (1) διαφέρει από το (1) της § 3.16 μόνο κατά το σταθερό όρο της δεύτερης εξίσωσης. Έτσι, αν θέσουμε $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix}$, το σύστημα γράφεται

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = b \qquad (2)$$

Όπως βρήκαμε στο παράδειγμα της § 3.16, τα διανύσματα a_1, a_4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ενώ τρία οποιαδήποτε από τα $a_1, a_2, \ldots, a_5$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Άρα το $\{a_1, a_4\}$ είναι βάση του χώρου V που παράγουν τα $a_1, a_2, \ldots, a_5$. Επειδή είναι

$$|a_1\ a_4\ b| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

τα a_1, a_4 και b είναι γραμμικώς εξαρτημένα και συνεπώς $b \in V$. Έτσι, το σύστημα (1) έχει λύση και για να τη βρούμε, δίνουμε αυθαίρετες τιμές στους ελεύθερους αγνώστους x_2, x_3, x_5, οπότε από την πρώτη εξίσωση του (1) βρίσκουμε:

$$x_1 = 2 - \frac{5}{2}x_2 + 3x_3 - 2x_5$$

και λόγω αυτής, από την τελευταία του εξίσωση

$$x_4 = -5 + \frac{5}{2}x_2$$

Έτσι έχουμε τις λύσεις του συστήματος (1)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(2 - \frac{5}{2}x_2 + 3x_3 - 2x_5,\ x_2,\ x_3,\ -5 + \frac{5}{2}x_2,\ x_5\right) \qquad (3)$$

Σημείωση

Στις λύσεις (3) καταλήγουμε και ως εξής:

Επειδή καθένα από τα a_2, a_3, a_5 και b με τα a_1 και a_4 είναι γραμμικώς εξαρτημένα, βρίσκουμε ότι είναι:

$$a_2 = \frac{5}{2}a_1 - \frac{5}{2}a_4, \quad a_3 = -3a_1, \quad a_5 = 2a_1, \quad b = 2a_1 - 5a_4$$

Ετσι το σύστημα (2) γράφεται ισοδύναμα:

$$a_1x_1 + a_4x_4 = b - a_2x_2 - a_3x_3 - a_5x_5 = (2a_1 - 5a_4) - (\frac{5}{2}a_1 - \frac{5}{2}a_4)x_2 + 3a_1x_3 - 2a_1x_5$$

$$= a_1(2 - \frac{5}{2}x_2 + 3x_3 - 2x_5) + a_4(-5 + \frac{5}{2}x_2)$$

Επειδή τώρα τα a_1, a_4 αποτελούν βάση του V θα έχουμε (§ 3.11) τις λύσεις (3) του συστήματος.

2. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x+\alpha y+z = 2\alpha \\ x+y+\alpha z = 0 \\ (\alpha+1)x+\alpha y+z = \alpha \end{cases} \qquad (4)$$

Θέτουμε $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha+1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ και το σύστημα γράφεται:

$$a_1x + a_2y + a_3z = b \qquad (5)$$

Έστω V ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα a_1, a_2, a_3.

Με τον κανόνα Sarrus βρίσκουμε $D = |a_1\ a_2\ a_3| = \alpha^3 - \alpha = \alpha(\alpha-1)(\alpha+1)$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

I. $D \neq 0 \Leftrightarrow (\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 1$ και $\alpha \neq -1) \Leftrightarrow$ τα a_1, a_2, a_3 γραμμικώς ανεξάρτητα. Τότε ο υπόχωρος V που παράγουν τα a_1, a_2, a_3 είναι φανερό ότι είναι ο $\mathbb{R}^3$ και επειδή τώρα $b \in \mathbb{R}^3$, το (4) είναι σύστημα Cramer και έχει τη μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-(\alpha^3-\alpha)}{\alpha^3-\alpha} = -1, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{\alpha(\alpha+1)(2\alpha-1)}{\alpha^3-\alpha} = \frac{2\alpha-1}{\alpha-1}, \quad z = \frac{-\alpha(\alpha+1)}{\alpha^3-\alpha} = -\frac{1}{\alpha-1}$$

II. $D = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 0$ ή $\alpha = 1$ ή $\alpha = -1) \Leftrightarrow$ τα a_1, a_2, a_3 γραμμικώς εξαρτημένα. Τότε:

1. αν $\alpha = 0$, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x+z = 0 \\ x+y = 0 \\ x+z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z = 0 \\ x+y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = -x \end{cases}$$

δηλαδή έχει τις λύσεις $(x, y, z) = (x, -x, -x)$.

2. αν $\alpha = 1$, το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} x+y+z = 2 \\ x+y+z = 0, \\ 2x+y+z = 1 \end{cases}$ που είναι φανερό ότι είναι αδύνατο.

3. αν $\alpha = -1$, το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} x-y+z = -2 \\ x+y-z = 0. \\ -y+z = -1 \end{cases}$ Παρατηρούμε τώρα ότι υπάρχει ελάσσων ορίζουσα της D μη μηδενική, π.χ. είναι $A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Έτσι τα a_1, a_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και συνεπώς αυτά παράγουν τον υπόχωρο V του $\mathbb{R}^3$.

Επειδή όμως $|a_1\ a_2\ b| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, θα είναι $b \in V$ και το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με ελεύθερο τον άγνωστο z, που βρίσκονται από τις δυο τελευταίες εξισώσεις του. Το σύστημά τους γράφεται: $\begin{cases} x+y = z \\ y = z+1 \end{cases}$ και έχει τις λύσεις $(x, y, z) = (-1, z+1, z)$, οι οποίες είναι και λύσεις του αρχικού.

3. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = \alpha+2 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 - 3x_4 = \alpha-3 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 = \alpha+1 \end{cases} \qquad (6)$$

Το σύστημα (6), αν θέσουμε $a_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $a_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} \alpha+2 \\ \alpha-3 \\ \alpha+1 \end{bmatrix}$

γράφεται

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b \qquad (7)$$

Με τον κανόνα Sarrus βρίσκουμε $D = |a_1\ a_2\ a_3| = (\alpha-1)^2(\alpha+2)$. Έτσι διακρίνουμε τίς περιπτώσεις:

I. $D \neq 0 \Leftrightarrow (\alpha \neq 1$ και $\alpha \neq -2)$. Τότε τα a_1, a_2, a_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως το $\{a_1, a_2, a_3\}$ είναι βάση του χώρου V που παράγουν τα a_1, a_2, a_3 και a_4. Έτσι θα είναι $V = \mathbb{R}^3$ και συνεπώς, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, $b \in V$, οπότε το σύστημα (6) θα έχει άπειρες λύσεις με ελεύθερο τον άγνωστο x_4. Για να βρούμε τις λύσεις αυτές γράφουμε το (6) ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = \alpha+2-2x_4 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = \alpha-3+3x_4, \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = \alpha+1-x_4 \end{cases}$$

Τότε με τον κανόνα Cramer βρίσκουμε τις λύσεις του:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{(\alpha^2+\alpha+4) - 2(\alpha+2)x_4}{(\alpha-1)(\alpha+2)}, \frac{(\alpha^2-4\alpha-6)+3(\alpha+2)x_4}{(\alpha-1)(\alpha+2)}, \frac{(\alpha^2+2) - (\alpha+2)x_4}{(\alpha-1)(\alpha+2)}, x_4 \right)$$

II. $D = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 1$ ή $\alpha = -2)$, οπότε τα a_1, a_2, a_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Τότε:

- αν $\alpha = 1$ θα είναι $a_1 = a_2 = a_3$ και βάση του χώρου V θα είναι το $\{a_1, a_4\}$, αφού τα a_1 και a_4 είναι φανερό ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Τώρα, όπως φαίνεται αμέσως, είναι $b = a_1 + a_4$. Έτσι για αυθαίρετες τιμές των αγνώστων x_2, x_3 το σύστημα γράφεται:

$$a_1x_1 + a_4x_4 = b - a_2x_2 - a_3x_3 = a_1 + a_4 - a_1x_2 - a_1x_3 = a_1(1-x_2-x_3) + a_4 \cdot 1$$

και συνεπώς, έχει τις λύσεις:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1-x_2-x_3, x_2, x_3, 1),$$

- αν $\alpha = -2$. Τότε διαπιστώνουμε εύκολα ότι τρία οποιαδήποτε από τα διανύσματα a_1, a_2, a_3, a_4 είναι γραμμικώς εξαρτημένα, ενώ δύο, π.χ. τα a_1, a_2, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και συνεπώς το $\{a_1, a_2\}$ είναι βάση του χώρου V.

Επειδή τώρα είναι $|a_1\ a_2\ b| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$, θα έχουμε $b \notin V$. Άρα το σύστημα δεν έχει λύση (αδύνατο).

Ασκήσεις: 35, 36, 37, 38, 39.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στο σύνολο $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ορίζουμε, για κάθε $v = (x_1, x_2)$, $u = (y_1, y_2)$ του V και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τις πράξεις + και · με:
$$v + u = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \qquad \lambda \cdot v = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$
Να επαληθεύσετε ότι το V είναι διανυσματικός χώρος.

2. Στο σύνολο $A = \{x + y\sqrt{5}: x, y \in \mathbb{Q}\}$ ορίζουμε την εσωτερική πράξη $\oplus$ με $(x_1 + y_1\sqrt{5}) \oplus (x_2 + y_2\sqrt{5}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{5}$ και την εξωτερική · με $\lambda \cdot (x + y\sqrt{5}) = \lambda x + \lambda y\sqrt{5}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$. Να αποδειχτεί ότι το A είναι διανυσματικός χώρος με συντελεστές ρητούς ως προς τις πράξεις $\oplus$ και ·

3. Να αποδειχτεί ότι σε κάθε διανυσματικό χώρο V, για κάθε $u, v \in V$ και $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν:
(i) $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$
(ii) $(\mu - \lambda)u = \mu u - \lambda u$

4. Έστω V_1, V_2 δυο διανυσματικοί χώροι. Στο σύνολο $V = V_1 \times V_2$ ορίζουμε, για κάθε $v = (v_1, v_2)$, $u = (u_1, u_2)$ του V και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τις πράξεις + και · με:
$$v + u = (v_1 + u_1, v_2 + u_2),$$
$$\lambda \cdot v = (\lambda v_1, \lambda v_2)$$
Να αποδειχτεί ότι το V είναι διανυσματικός χώρος.

5. Στο σύνολο $\mathbb{R}^*_+$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*_+$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ορίζουμε τις πράξεις:
$$x + y = xy \quad \text{και} \quad \lambda \cdot x = x^\lambda$$
Να αποδειχτεί ότι το $\mathbb{R}^*_+$ ως προς τις πράξεις + και · είναι διανυσματικός χώρος.

6. Να δείξετε ότι ένα σύνολο $V \neq \varnothing$ είναι διανυσματικός χώρος, αν και μόνο αν το V είναι προσθετική ομάδα και στο V έχει οριστεί μια εξωτερική πράξη · με συντελεστές πραγματικούς, τέτοια ώστε για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $u, v \in V$ να ισχύουν:
$$\lambda \cdot (v + u) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot u,\ (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v,\ \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v \text{ και } 1 \cdot v = v.$$

7. Να δείξετε ότι τα $V_1 = \{(0, x) \in \mathbb{R}^2\}$ και $V_2 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$.

8. Αν $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1 + x_3 = x_2\}$ να δείξετε ότι ο V είναι ένας **γνήσιος** διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

9. Θεωρούμε τα σύνολα: $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1 - x_2 = x_3\}$ και
$$V_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1 = x_2 \text{ και } 2x_3 = \frac{3}{2}x_2\}$$
(i) Να εξετάσετε αν τα V_1, V_2 είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$.
(ii) Να βρείτε το σύνολο $V_1 \cup V_2$ και να εξετάσετε, αν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

10. Να δείξετε ότι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^2$ παράγεται από τα στοιχεία του $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (-2, 1)$.

11. Έστω $V_1 = \{(1, 0), (-1, 1), (0, 1)\}$ ένα υποσύνολο του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$. Να εξετάσετε, αν κάθε διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του V_1.

12. Έστω $\vec{v_1} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\vec{v_2} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ δυο μη συγγραμμικά διανύσματα του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ και V το σύνολο των διανυσμάτων του $\mathcal{E}$ τα οποία είναι κάθετα στα $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$. Να αποδειχτεί ότι το V είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathcal{E}$ και συγκεκριμένα μια διανυσματική ευθεία του. (Βλέπε σχετικά, Αναλυτική Γεωμετρία § 5.4)

13. Έστω ότι για τα στοιχεία v_1, v_2, v_3 του διανυσματικού χώρου V υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 \cdot \lambda_3 \neq 0$, ώστε $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \mathbf{O}$. Να δείξετε ότι ο διανυσματικός υπόχωρος του V που παράγεται από τα v_1, v_2 είναι ο ίδιος με εκείνον που παράγεται από τα v_2, v_3.

14. Να αποδειχτεί ότι τα στοιχεία του $\mathbb{R}^2$: $v_1 = (2, 1)$, $v_2 = (1, 3)$, $v_3 = (-2, 3)$, είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

15. Να αποδειχτεί ότι τα διανύσματα $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 0, 0)$, $v_4 = (1, 0, 0, 0)$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

16. Αν v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, τότε να αποδειχτεί ότι και τα $v_1 + v_2$, $v_1 - v_2$, $v_2 + v_3 - 3v_1$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα.

17. Αν $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (\alpha, \alpha^3, \alpha^5)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, είναι τρία στοιχεία του $\mathbb{R}^3$: (i) να προσδιορίσετε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε τα στοιχεία v_1, v_2, v_3 να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (ii) για τις τιμές του α που θα βρείτε, να εξετάσετε αν οποιοδήποτε διάνυσμα $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικός συνδυασμός των v_1, v_2, v_3.

18. Να δείξετε ότι τα στοιχεία $v_1 = (0, \sqrt{3}, 2)$, $v_2 = (0, 2, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και κατόπιν να εκφράσετε το στοιχείο (0, 1, 0) ως γραμμικό συνδυασμό των v_1, v_2.

19. Έστω $v_1 = (-4, 9, 7)$, $v_2 = (1, \alpha, 5)$, $v_3 = (2, -1, \beta)$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τρία στοιχεία του $\mathbb{R}^3$. Να βρεθεί η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα α, β, ώστε τα v_1, v_2, v_3 να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

20. Έστω V ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα στοιχεία $u_1 = (0, 1, 2, 0)$, $u_2 = (1, 0, 0, 1)$ και $u_3 = (1, 1, 0, -1)$. Να δείξετε ότι: (i) το $v = (4, 1, -2, 0) \in \mathbb{R}^4$ ανήκει στον V και (ii) να εκφράσετε το u_1 ως γραμμικό συνδυασμό των v, u_2, u_3.

21. Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_k$ (με τη διάταξη αυτή) $k \geqslant 2$ μη μηδενικά διανύσματα του χώρου V. Να δείξετε ότι τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αν και μόνο αν κάποιο από αυτά εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των προηγουμένων του.

22. Έστω V΄ ο υπόχωρος του V που παράγεται από τα μη μηδενικά διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$. Να δείξετε ότι τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αν και μόνο αν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ που παράγει επίσης το χώρο V΄.

23. Αν τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου V, να δείξετε ότι το διάνυσμα $v \in V$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \ldots, v_k$, αν και μόνο αν τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$, v είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

24. Να εξετάσετε, αν τα διανύσματα $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ με $v_1 = (-3, 1, 5)$, $v_2 = (-3, 6, 2)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ παράγουν το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$.

25. Να δείξετε ότι τα σύνολα $A = \{(2, 1), (1, -1)\}$ και $B = \{(1, 3), (-1, 2)\}$ είναι δυο βάσεις του $\mathbb{R}^2$ και κατόπιν να εκφράσετε τα $v = (3, 3)$, $v' = (3, -3)$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του A.

26. Αν $v_1 = (1, 2)$ και $v_2 = (3, 1)$, τότε να δείξετε ότι το σύνολο $\{v_1, v_2\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^2$.

Επίσης αν (4, 10) είναι το ζεύγος των συντεταγμένων ενός διανύσματος $v_3 \in \mathbb{R}^2$ ως προς το ζεύγος (v_1, v_2) των διανυσμάτων της βάσης, να βρεθούν οι συντεταγμένες του v_3 ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.

27. Θεωρούμε το σύνολο $E = \{\lambda A + \mu I : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, όπου $A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ με $\alpha + \delta = -1$ και $\alpha\delta - \beta\gamma = -2$. Να αποδείξετε ότι:
(i) Το E είναι διανυσματικός υπόχωρος του Π_2. (ii) Το $\{A, I\}$ είναι μια βάση του E. (iii) Ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} \in E$.

28. Έστω $\{e_1', e_2', e_3'\}$ μια βάση του $\mathbb{R}^3$ και (0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 3) οι τριάδες των συντεταγμένων τριών διανυσμάτων v_1, v_2, v_3 αντιστοίχως ως προς την τριάδα (e_1', e_2', e_3') των διανυσμάτων της βάσης.
(i) Να αποδειχτεί ότι το $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι επίσης μια βάση του $\mathbb{R}^3$
(ii) Αν (3, 2, 1) είναι η τριάδα των συντεταγμένων ενός διανύσματος $v_4 \in \mathbb{R}^3$ ως προς την $\{e_1', e_2', e_3'\}$ να βρεθεί η τριάδα των συντεταγμένων του v_4 ως προς την $\{v_1, v_2, v_3\}$

29. Αν V είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (1, 2, 1, 3)$, $v_2 = (0, 2, 1, 2)$, $v_3 = (3, 4, 2, 7)$, να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του V.

30. Να βρεθεί η διάσταση του υπόχωρου V του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 όπου $v_1 = (1, 3, 2)$, $v_2 = (1, 2, -1)$, $v_3 = (0, 1, 3)$

31. Έστω V το σύνολο λύσεων του συστήματος: $\begin{cases} x+4y+4z = 0 \\ 2x+y+10z = 0 \end{cases}$, $x,y,z \in \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι το V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε τη διάστασή του.

32. Έστω V_1, V_2 δυο διανυσματικοί υπόχωροι ενός χώρου V. Αν οι V_1, V_2 έχουν την ίδια διάσταση και είναι $V_1 \subseteq V_2$, τότε να δείξετε ότι θα είναι $V_1 = V_2$.

33. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} -x_1+2x_2-3x_3 = 7 \\ 3x_1+6x_2-x_3 = 2 \end{cases}$

34. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 3x_1-4x_2+x_3 = 8 \\ x_1+2x_2 = 0 \\ 3x_2+2x_3 = -7 \\ 3x_1+2x_3 = 2 \end{cases}$

35. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x+\alpha y+2\omega = 0 \\ -x+2y+\alpha\omega = 0 \\ \alpha x-3y+(\alpha+1)\omega = 0 \end{cases}$

36. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+4x_5 = 4 \\ 6x_1+3x_2+6x_3+12x_5 = 12 \\ x_1+x_3+x_4+2x_5 = -3 \end{cases}$

37. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 9x_1-4x_2+2x_3 = 8 \\ 3x_1+2x_2 = 0 \\ 3x_2+4x_3 = -7 \\ 9x_1+4x_3 = 2 \end{cases}$

38. Να λυθούν τα συστήματα: (i) $\begin{cases} \lambda x+y+z = 1 \\ x+\lambda y+z = \lambda \\ x+y+\lambda z = \lambda^2 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x-y+z = 3 \\ x+y+\lambda z = 1 \\ x+\lambda y+z = \lambda \end{cases}$

39. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x+\mu y+z = 1 \\ x+\lambda\mu y+z = 1 \\ x+\mu y+\lambda z = 1 \end{cases}$

4

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Η επέκταση του σώματος των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ στο σώμα των μιγαδικών $\mathbb{C}$ είναι η τελευταία από μια σειρά ανάλογων επεκτάσεων που έχει ήδη συναντήσει ο μαθητής του Λυκείου.
Η κατασκευή του $\mathbb{C}$ παρουσιάζεται –σύμφωνα και με το πνεύμα διδασκαλίας σε μαθητές της πρώτης δέσμης– ως πλήρης και αυστηρή λύση ενός συγκεκριμένου προβλήματος. Κατά τη λύση προβάλλεται ο «ισομορφισμός» του $\mathbb{R}$ με υποσύνολο του $\mathbb{C}$, που είναι άλλωστε το ουσιαστατικό χαρακτηριστικό της επέκτασης. Βασική επιδίωξη της όλης παρουσίασης και της διδασκαλίας πρέπει να είναι η συνειδητοποίηση από τους μαθητές και της αναγκαιότητας και της χρησιμότητας του νέου συνόλου. Το ότι κάθε δευτεροβάθμια εξίσωση έχει λύση στο $\mathbb{C}$ παρουσιάζεται ως συνέπεια της κατασκευής του $\mathbb{C}$ και πάντως όχι ως ο βασικός στόχος αυτής της κατασκευής. Εξάλλου τα στοιχεία του $\mathbb{C}$ δεν είναι «εξωπραγματικά», αφού εμφανίζονται με τη μορφή σημείων ή διανυσμάτων του επιπέδου και μπορούν να εκφράσουν με σαφήνεια και συντομία ένα πλήθος εννοιών από τα μαθηματικά ή τη φυσική.
Επισημαίνεται ότι κατά την ανάπτυξη ορισμένων θεμάτων τηρείται η βασική αρχή να μην εισάγονται σύμβολα για έννοιες που δεν ορίζονται«μονοσήμαντα», όπως π.χ. για τις ρίζες και τα ορίσματα ενός μιγαδικού. Έτσι αποφεύγεται η σύγχυση που προκαλεί η χρήση τέτοιων συμβολων. Επίσης σημειώνεται ότι η θεωρία για τις νιοστές ρίζες μιγαδικών στηρίζεται στη μελέτη της πολλαπλασιαστικής ομάδας των νιοστών ριζών του 1. Με το τελευταίο μέρος του κεφαλαίου επεκτείνονται οι γνώσεις των μαθητών και σε πολυωνυμικές εξισώσεις στο $\mathbb{C}$. Πέραν της τεχνικής για την επίλυση μιας τέτοιας εξίσωσης, αποσαφηνίζεται εδώ η έννοια της πολλαπλής ρίζας καθώς και η σχέση του πλήθους των ριζών με το βαθμό της εξίσωσης.

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ανάγκη επέκτασης του $\mathbb{R}$

4.1 Αν α και β είναι φυσικοί αριθμοί, η εξίσωση $\beta + x = \alpha$, στην περίπτωση $\beta > \alpha$, δεν έχει λύση στο $\mathbb{N}$. Με την εισαγωγή των αρνητικών ακεραίων έχουμε μια πρώτη επέκταση του $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{Z}$, στο οποίο η παραπάνω εξίσωση έχει πάντα λύση.

Εξάλλου η εξίσωση $\beta x = \alpha$ $(\beta \neq 0)$, αν και εκφράζει ένα συνηθισμένο πρόβλημα, το «μερισμό του α σε β ίσα μέρη», δεν έχει λύση στο $\mathbb{Z}$, παρά μόνο αν ο β είναι διαιρέτης του α. Έτσι υπήρξε ανάγκη επέκτασης του $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Q}$, στο οποίο η $\beta x = \alpha$ έχει πάντα λύση.

Τέλος το $\mathbb{Q}$ δεν επαρκεί να εκφράσει τα μέτρα ορισμένων μεγεθών, όπως π.χ. τη διαγώνιο x ενός τετραγώνου με πλευρά 1, αφού η αντίστοιχη εξίσωση $x^2 = 2$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{Q}$. Με την επέκταση του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ κάθε εξίσωση $x^2 = \vartheta$ με $\vartheta \geqslant 0$ έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

Όλες οι παραπάνω επεκτάσεις υπαγορεύτηκαν από την ανάγκη να εκφραστεί η λύση προβλημάτων που θέτει η καθημερινή πρακτική· συνδέονται με τη δυνατότητα επίλυσης αντίστοιχων εξισώσεων και χαρακτηριστικό τους είναι, όχι μόνο η διεύρυνση του παλαιού συνόλου με νέα στοιχεία, αλλά και η παράλληλη επέκταση των πράξεων και των κανόνων λογισμού.

Όμως και στο σύνολο $\mathbb{R}$ υπάρχουν εξισώσεις που δεν έχουν λύση, π.χ. η

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

και γενικά κάθε δευτεροβάθμια εξίσωση με διακρίνουσα αρνητική (που ανάγεται τελικά, όπως θα δούμε, στη $x^2 + 1 = 0$). Θα μπορούσε να σκεφτεί κανείς μια νέα διεύρυνση του $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε στο νέο σύνολο εξισώσεις όπως οι προηγούμενες να έχουν λύση. Αλλά υπάρχουν **πρακτικοί λόγοι** που να συνηγορούν για κάτι παρόμοιο;

Προφανείς πρακτικοί λόγοι όπως αυτοί που αναφέρθηκαν παραπάνω (ο μερισμός σε ίσα μέρη, η μέτρηση μεγεθών) δεν υπήρξαν. Όμως στην ιστορία των Μαθηματικών εμφανίστηκαν περιπτώσεις που για την εξυπηρέτηση του αλγεβρικού λογισμού θα ήταν χρήσιμο ένα σύνολο K ευρύτερο του $\mathbb{R}$, στο οποίο θα ίσχυαν οι κανόνες λογισμού του $\mathbb{R}$ και το οποίο θα περιείχε μια τουλάχιστο ρίζα της εξίσωσης (1), δηλαδή ένα στοιχείο i, τέτοιο ώστε:

$$i^2 = -1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών της μορφής x^2-y^2 είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό. Πράγματι:

$$\begin{aligned}(\alpha^2-\beta^2)(\gamma^2-\delta^2) &= (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\gamma+\delta)(\gamma-\delta) = (\alpha+\beta)(\gamma+\delta)(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)\\ &= [(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)]\,[(\alpha\gamma+\beta\delta)-(\alpha\delta+\beta\gamma)]\\ &= (\alpha\gamma+\beta\delta)^2-(\alpha\delta+\beta\gamma)^2\end{aligned}$$

Με την προϋπόθεση ότι υπάρχει το ευρύτερο σύνολο K που αναφέραμε παραπάνω, θα μπορούσαμε με την ίδια μέθοδο να αποδείξουμε ότι το ίδιο ισχύει για τους πραγματικούς αριθμούς της μορφής x^2+y^2. Πράγματι έχουμε:

$$x^2+y^2 = x^2-(-y^2) = x^2-i^2y^2 = x^2-(iy)^2$$

Άρα

$$\begin{aligned}(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2) &= [\alpha^2-(i\beta)^2]\,[\gamma^2-(i\delta)^2]\\ &= (\alpha\gamma+i^2\beta\delta)^2-(i\alpha\delta+i\beta\gamma)^2\\ &= (\alpha\gamma-\beta\delta)^2-i^2(\alpha\delta+\beta\gamma)^2\\ &= (\alpha\gamma-\beta\delta)^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)^2\end{aligned}$$

Σημείωση

Το στοιχείο i είναι αρχικό της λέξης imaginaire (= φανταστικός). Τα μη πραγματικά στοιχεία του K στην αρχή θεωρήθηκαν ως «εξωπραγματικά». Αργότερα συνδέθηκαν με την πραγματικότητα καί φάνηκε η πολλαπλή χρησιμότητά τους.

Το πρόβλημα

4.2 Όσα εκθέσαμε στην προηγούμενη παράγραφο οδηγούν στο ακόλουθο πρόβλημα:

Να οριστεί ένα σώμα K, τέτοιο ώστε:

(i) *Να είναι ευρύτερο του* $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \subset$ K) *και να περιέχει ένα στοιχείο i με*

$$i^2 = -1 \tag{2}$$

(ii) *Η πρόσθεση ⊕ και ο πολλαπλασιασμός ⊙ στο K να είναι επεκτάσεις των αντίστοιχων πράξεων + και · στον $\mathbb{R}$, που σημαίνει ότι για κάθε α,β∈$\mathbb{R}$:*

$$\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \quad \text{και} \quad \alpha \odot \beta = \alpha \cdot \beta$$

Για το λόγο αυτό δεν είναι αναγκαία η διαφοροποίηση των συμβόλων των πράξεων στα σύνολα $\mathbb{R}$ και K. Μπορούμε να χρησιμοποιούμε τα σύμβολα + και · και για τις πράξεις στο K.

Ανάλυση

4.3 Έστω ότι υπάρχει ένα σώμα K με τα χαρακτηριστικά (i) και (ii). Τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε αμέσως τα εξής:

1. Τα δυο ουδέτερα στοιχεία **O** και **1** του K είναι αντίστοιχα οι πραγματικοί αριθμοί 0 και 1. Πράγματι είναι

   $$\mathbf{O} + 0 = 0 = 0 + 0 \text{ και } \mathbf{1}\cdot 1 = 1 = 1\cdot 1$$

   οπότε με εφαρμογή των νόμων της διαγραφής, που ισχύουν σε κάθε σώμα, έχουμε

   $$\mathbf{O} = 0 \text{ και } \mathbf{1} = 1$$

2. Αφού $\mathbb{R} \subset$ K και i∈K, το K περιέχει όλα τα στοιχεία της μορφής βi (= β·i) με β∈$\mathbb{R}$. Το σύνολό τους, που θα το συμβολίζουμε με I, περιέχει ειδικότερα τα

   $$i\ (= 1i) \text{ και } 0\ (= 0i)$$

3. Το K περιέχει ακόμη όλα τα στοιχεία της μορφής α+βi με α,β∈$\mathbb{R}$. Έστω $\mathbb{C}$ το σύνολο των στοιχείων αυτών. Στο $\mathbb{C}$ περιέχεται:
   - και το $\mathbb{R}$, αφού α = α+0i (α∈$\mathbb{R}$)
   - και το I, αφού βi = 0+βi (β∈$\mathbb{R}$)

4. Τι άλλα στοιχεία περιέχει το K; Φυσικά περιέχει και κάθε **άθροισμα** και **γινόμενο** στοιχείων του $\mathbb{C}$ καθώς καί τα **αντίθετα** και **αντίστροφα** των στοιχείων του $\mathbb{C}$. Αλλά:

$$(\alpha_1+\beta_1 i) + (\alpha_2+\beta_2 i) = (\alpha_1+\alpha_2) + (\beta_1+\beta_2) i$$

$$(\alpha_1+\beta_1 i)\cdot(\alpha_2+\beta_2 i) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 i + \alpha_2\beta_1 i + \beta_1\beta_2 i^2 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) i$$

$$-(\alpha+\beta i) = (-\alpha) + (-\beta) i$$

$$\frac{1}{\alpha+\beta i} = \frac{\alpha-\beta i}{(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)} = \frac{\alpha-\beta i}{\alpha^2-\beta^2 i^2} = \frac{\alpha-\beta i}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}\, i \quad (|\alpha| + |\beta| \neq 0)$$

Όλα αυτά τα νέα στοιχεία **ανήκουν στο** $\mathbb{C}$

Αφού λοιπόν το $\mathbb{C}$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και περιέχει τα αντίθετα των στοιχείων του είναι *προσθετική ομάδα* (§ 2.13). Ομοίως το $\mathbb{C}^*$ είναι *πολλαπλασιαστική ομάδα.*

Ώστε: **Το $\mathbb{C}$ είναι σώμα**

Το $\mathbb{C}$ ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του προβλήματος που θέσαμε. Είναι λοιπόν φυσικό να περιοριστούμε στην κατασκευή του σώματος $\mathbb{C}$.

Παρατηρούμε τώρα ότι σε κάθε στοιχείο $(\alpha+\beta i)$ του $\mathbb{C}$ αντιστοιχίζεται ένα ζεύγος (α,β) πραγματικών αριθμών και αντιστρόφως. Άρα το $\mathbb{C}$ μπορεί να «υποκατασταθεί» από το σύνολο $\mathbb{R}^2$, που είναι **γνωστό σύνολο,** με την προϋπόθεση ότι το τελευταίο αυτό σύνολο θα εφοδιαστεί με πράξεις που να εναρμονίζονται, ως προς τα αποτελέσματά τους, με τις πράξεις του $\mathbb{C}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ[1]

1. Αν $\alpha+\beta i$ και $\alpha'+\beta' i$ είναι στοιχεία του $\mathbb{C}$, να δειχτεί ότι:

(i) $\alpha+\beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$, (ii) $\alpha+\beta i = \alpha'+\beta' i \Leftrightarrow \alpha=\alpha'$ και $\beta=\beta'$

(i) Έχουμε

$$\alpha+\beta i = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta i \Rightarrow \alpha^2 = (-\beta i)^2 \Rightarrow \alpha^2 = -\beta^2 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2 = 0 \Rightarrow \alpha=\beta=0$$

Το αντίστροφο είναι φανερό.

(ii) Έχουμε:

$$\alpha+\beta i = \alpha'+\beta' i \Leftrightarrow (\alpha+\beta i) - (\alpha'+\beta' i) = 0 \Leftrightarrow (\alpha-\alpha') + (\beta-\beta') i = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha-\alpha' = 0 \text{ και } \beta-\beta' = 0 \Leftrightarrow \alpha=\alpha' \text{ και } \beta=\beta'$$

(1) Με την προϋπόθεση ότι υπάρχει το $\mathbb{C}$

2. Να δειχτεί ότι η εξίσωση $x^2+px+q=0$ με $p,q\in\mathbb{R}$ και $p^2-4q<0$ έχει λύση στο $\mathbb{C}$.

Έχουμε:

$$x^2+px+q = 0 \Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4} = 0 \quad (1)$$

Αν θέσουμε $\frac{p}{2} = -\alpha$ και $\frac{4q-p^2}{4} = \beta^2$ (οπότε επειδή $4q-p^2>0$ θα είναι $\beta\in\mathbb{R}$), θα έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow (x-\alpha)^2+\beta^2 = 0 \Leftrightarrow (x-\alpha)^2 - (\beta i)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i) = 0.$$

Συνεπώς η $x^2+px+q=0$ έχει στο $\mathbb{C}$ τις λύσεις $x=\alpha+\beta i$ και $x=\alpha-\beta i$

Ασκήσεις: 1, 2, 3

Κατασκευή του $\mathbb{C}$

4.4 Ύστερα από τις σκέψεις που κάναμε στην προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε να κατασκευάσουμε το $\mathbb{C}$ ως εξής.

1. Στο σύνολο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε πρόσθεση $\oplus$ και πολλαπλασιασμό $\odot$

$$(\alpha_1,\beta_1)\oplus(\alpha_2,\beta_2) = (\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_1+\beta_2) \quad (4)$$

$$(\alpha_1,\beta_1)\odot(\alpha_2,\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2,\ \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1) \quad (5)$$

Οι πράξεις αυτές (§ 2.21 εφαρμ. 3) είναι **αντιμεταθετικές** και **προσεταιριστικές. Ουδέτερο** στοιχείο για την $\oplus$ είναι το $(0,0)$ και για την $\odot$ το $(1,0)$. **Αντίθετο** του (α_1,β_1) είναι το $(-\alpha_1,-\beta_1)$ και **αντίστροφό** του το $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2+\beta_1^2}, \frac{-\beta_1}{\alpha_1^2+\beta_1^2}\right)$
Επιπλέον ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση.

Ώστε: **Το $\mathbb{R}^2$ με πράξεις $\oplus$ και $\odot$ είναι σώμα**

2. Ας θεωρήσουμε το υποσύνολο $R_0 = \mathbb{R}\times\{0\}$ του $\mathbb{R}^2$ το οποίο σχηματίζεται από τα στοιχεία της μορφής $(\alpha,0)$. Τότε η απεικόνιση

$$R_0 \to \mathbb{R}$$

που αντιστοιχίζει σε κάθε $(\alpha,0)\in R_0$ το $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι «1-1 και επί». Επιπλέον λόγω των (4) και (5) είναι

$$(\alpha_1, 0)\oplus(\alpha_2, 0) = (\alpha_1+\alpha_2,\ 0) \quad (6)$$

$$(\alpha_1, 0)\odot(\alpha_2, 0) = (\alpha_1\alpha_2,\ 0) \quad (7)$$

Τα σύνολα R_0 με πράξεις $\oplus, \odot$ και $\mathbb{R}$ με πράξεις $+, \cdot$ χαρακτηρίζονται με τον όρο **«ισόμορφα»** και τα αντίστοιχα στοιχεία τους $(\alpha, 0)$ και α θεωρούνται ταυτιζόμενα.

Με την παραδοχή της ταύτισης των $(\alpha, 0)\in R_0$ και $\alpha\in\mathbb{R}$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$:

- **το $\mathbb{R}^2$ περιέχει το $\mathbb{R}$**
- **η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{R}^2$, λόγω των (6) και (7), είναι επεκτάσεις των αντίστοιχων πράξεων του $\mathbb{R}$ και μπορεί να συμβολίζονται με + και · αντιστοίχως.**
- Εξάλλου, αν θέσουμε:

$$\mathbf{i = (0, 1)}$$

έχουμε $$i^2 = (0, 1)\cdot(0, 1) = (-1, 0)$$

ή $$\boxed{i^2 = -1}$$

΄Ωστε **Το $\mathbb{R}^2$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις (i) και (ii) του προβλήματος της § 4.2 και συνεπώς είναι το σώμα $\mathbb{C}$**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το $\mathbb{C}$ είναι διανυσματικός χώρος (βλέπε § 3.5).

Η μορφή α+βi

4.5 Παρατηρούμε ακόμη ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ είναι:

1. $(0, \beta) = (\beta, 0)\cdot(0, 1)$ και συνεπώς

$$\mathbf{(0, \beta) = \beta i}$$

Δηλαδή, **κάθε στοιχείο του $\mathbb{C}$ της μορφής $(0, \beta)$ είναι γινόμενο του πραγματικού αριθμού β και του i.**

΄Ενα τέτοιο στοιχείο του $\mathbb{C}$ θα ονομάζεται **φανταστικός αριθμός**. Το σύνολο των φανταστικών αριθμών συμβολίζεται με **I**.

2. Επίσης είναι $(\alpha, \beta) = (\alpha, 0) + (0, \beta)$ και συνεπώς

$$\mathbf{(\alpha, \beta) = \alpha+\beta i}$$

Δηλαδή, **κάθε στοιχείο του $\mathbb{C}$ είναι άθροισμα ενός φανταστικού και ενός πραγματικού αριθμού.**

Γι' αυτό τα στοιχεία του $\mathbb{C}$ ονομάζονται **μιγαδικοί αριθμοί** και το $\mathbb{C}$ **σύνολο μιγαδικών αριθμών.**

Η γραφή του (α, β) ως $\alpha+\beta i$ είναι μοναδική, γιατί, αν το (α, β) γραφόταν και ως $\alpha'+\beta' i$, θα είχαμε

$$\alpha+\beta i = \alpha'+\beta' i \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (\alpha', \beta') \Leftrightarrow \alpha = \alpha' \text{ και } \beta = \beta'$$

΄Ωστε: **Για κάθε $z\in\mathbb{C}$ υπάρχουν μοναδικοί $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε**

$$\mathbf{z = \alpha+\beta i}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστεί η δύναμη i^k για κάθε $k\in\mathbb{Z}$.

Επειδή το $\mathbb{C}$ είναι σώμα έχουμε, σύμφωνα με την § 2.21:

$$i^0 = 1,\quad i^1 = i,\quad i^2 = -1,\quad i^3 = i^2\cdot i = -i,\quad i^4 = (i^2)^2 = 1\ldots,$$

και γενικά, επειδή κάθε $k\in\mathbb{Z}$ γράφεται $4\lambda+\upsilon$ με $0 \leqslant \upsilon < 4$, θα είναι

$$i^k = i^{4\lambda}\cdot i^\upsilon = (i^4)^\lambda\cdot i^\upsilon = i^\upsilon = \begin{cases} 1, & \text{αν } \upsilon = 0 \\ i, & \text{αν } \upsilon = 1 \\ -1, & \text{αν } \upsilon = 2 \\ -i, & \text{αν } \upsilon = 3 \end{cases}$$

2. Να γίνει γινόμενο παραγόντων το $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$

΄Εχουμε:

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 = \alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} + \beta^2 = (\alpha + \frac{\beta}{2})^2 + \frac{3\beta^2}{4} = (\alpha + \frac{\beta}{2})^2 - \frac{3\beta^2}{4}i^2$$

$$= (\frac{2\alpha+\beta}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}\beta i}{2})^2 = (\frac{2\alpha+\beta}{2} + \frac{\sqrt{3}\beta}{2}i)(\frac{2\alpha+\beta}{2} - \frac{\sqrt{3}\beta}{2}i)$$

3. Αν $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι ο $z_1 = (\lambda z^2+\mu z)(\mu z^2+\lambda z)$ είναι πραγματικός.

Είναι $z_1 = (\lambda z^2+\mu z)(\mu z^2+\lambda z) = \lambda\mu z^4+(\lambda^2+\mu^2) z^3+\lambda\mu z^2$

Υπολογίζουμε τις δυνάμεις z^2, z^3 και z^4

$$z^2 = (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 2\frac{\sqrt{3}}{4}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z^3 = z^2 z = (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$z^4 = z^3 z = 1 \cdot z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

'Αρα $z_1 = \lambda\mu (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) + (\lambda^2+\mu^2) \cdot 1 + \lambda\mu (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i)$

$$= \lambda\mu (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i) + \lambda^2+\mu^2 = \lambda^2+\mu^2-\lambda\mu$$

Δηλαδή $z_1 \in \mathbb{R}$

4. Να γράψετε στη μορφή α+βi το μιγαδικό

$$z = \frac{5+12i}{8-6i} + \frac{(1+2i)^2}{2+i}$$

$$z = \frac{(5+12i)(8+6i)}{(8-6i)(8+6i)} + \frac{(1-4+4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{40+30i+96i-72}{64+36} + \frac{-6+3i+8i+4}{4+1}$$

$$= \frac{-32+126i}{100} + \frac{-2+11i}{5} = \frac{-32+126i-40+220i}{100} = \frac{-72+346i}{100} = -\frac{18}{25} + \frac{173}{50} i$$

Ασκήσεις: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

Ορισμός

4.6 Στην εφαρμογή 2 της § 4.3 είδαμε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+px+q = 0$ είναι οι α+βi και α-βi. 'Ετσι, αν είναι γνωστή η μια απ' αυτές μπορούμε να βρούμε και την άλλη, με αλλαγή του προσήμου του φανταστικού μέρους. Ο α-βi χαρακτηρίζεται ως *συζυγής* του α+βi.

Γενικά, δίνουμε τον ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ **Ονομάζεται *συζυγής* ενός μιγαδικού z = α+βi και συμβολίζεται $\bar{z}$ ο μιγαδικός α-βi. Δηλαδή**

$$\overline{\alpha+\beta i} = \alpha-\beta i$$

'Ετσι π.χ. συζυγής του -3 + 2i είναι ο -3 - 2i, του 2 - 7i είναι ο 2 + 7i, του -5i ο 5i κτλ.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι συζυγής του $\bar{z}$ = α-βi είναι α+βi. Δηλαδή

$$\boxed{\overline{(\bar{z})} = z} \qquad (1)$$

Γι' αυτό οι z και $\bar{z}$ λέγονται απλά συζυγείς.

Εξάλλου, με εκτέλεση των πράξεων βρίσκουμε εύκολα τις

$$z+\bar{z} = 2\alpha \qquad (2)$$
$$z-\bar{z} = 2\beta i \qquad (3)$$
$$z\bar{z} = \alpha^2+\beta^2 \qquad (4)$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι:

- Αν β = 0, δηλαδή αν ο z είναι πραγματικός, έχουμε από την (3) $z-\bar{z} = 0$ ή $z = \bar{z}$. Το αντίστροφο είναι φανερό. 'Αρα

$$\boxed{z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}} \qquad (5)$$

- Αν α = 0, δηλαδή αν ο z είναι φανταστικός, έχουμε από τη (2) $z+\bar{z} = 0$ ή $z = -\bar{z}$ και αντιστρόφως. 'Αρα

$$\boxed{z \in I \Leftrightarrow z = -\bar{z}} \qquad (6)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τις (2) και (4) συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα και το γινόμενο δυο συζυγών μιγαδικών είναι πραγματικός αριθμός.

Συζυγής και πράξεις

4.7 Αν θεωρήσουμε τους μιγαδικούς $z_1 = \alpha_1+\beta_1 i$ και $z_2 = \alpha_2+\beta_2 i$, τότε:

- $\overline{z_1+z_2} = \overline{(\alpha_1+\alpha_2) + (\beta_1+\beta_2)i} = (\alpha_1+\alpha_2) - (\beta_1+\beta_2) i$

$$= (\alpha_1-\beta_1 i) + (\alpha_2-\beta_2 i) = \bar{z}_1+\bar{z}_2$$

Δηλαδή

$$\boxed{\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2} \qquad (1)$$

● Είναι $\overline{z_1 z_2} = \overline{(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\, i} = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2) - (\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\, i$

και $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (\alpha_1-\beta_1 i)\,(\alpha_2-\beta_2 i) = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2) + [\alpha_1(-\beta_2) + \alpha_2(-\beta_1)]i$

$= (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2) - (\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i$

΄Αρα

$$\boxed{\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}} \tag{2}$$

● Αν είναι $z_2 \neq 0$ και θέσουμε $z = \dfrac{z_1}{z_2}$, έχουμε διαδοχικά

$z\, z_2 = z_1 \Leftrightarrow \overline{z\, z_2} = \overline{z_1} \Leftrightarrow \overline{z}\,\overline{z_2} = \overline{z_1} \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

΄Ωστε

$$\boxed{\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}} \tag{3}$$

Από τις (1) και (2) αποδεικνύεται επαγωγικά ότι για κάθε $\nu \geqslant 2$ έχουμε

$$\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\nu} = \overline{z_1}+\overline{z_2}+\ldots+\overline{z_\nu} \tag{4}$$

$$\overline{z_1\ z_2 \ldots z_\nu} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}\ldots\ \overline{z_\nu} \tag{5}$$

Τέλος, από την (5) για $z_1 = z_2 = \ldots = z_\nu = z$ παίρνουμε την

$$\boxed{\overline{(z^\nu)} = (\overline{z})^\nu} \tag{6}$$

ενώ από την (3) για $z_1 = 1$ και $z_2 = z$ προκύπτει η

$$\boxed{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}} \tag{7}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. ΄Εστω $z = (2-3i)\,(-4+i)$. Τότε

$\overline{z} = (2+3i)\,(-4-i) = (-8+3) + (-2-12)\, i = -5-14\, i$

2. Αν $z = \dfrac{3-i}{1+2i}$, τότε

$\overline{z} = \dfrac{3+i}{1-2i} = \dfrac{(3+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{(3-2)+(6+1)i}{1+4} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{5}\, i$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

΄Εστω η εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ (1) με $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbb{R}$ και $\alpha_\nu \neq 0$. Να αποδείξετε ότι, αν η (1) έχει ρίζα το μιγαδικό z, θα έχει ρίζα και τον $\overline{z}$.

Αφού ο z είναι ρίζα της (1) θα είναι

$$\alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1}z^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0$$

από την οποία έχουμε διαδοχικά:

$$\overline{\alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1}z^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0} = \overline{0}$$

$$\overline{\alpha_\nu z^\nu} + \overline{\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}} + \ldots + \overline{\alpha_1 z} + \overline{\alpha_0} = 0$$

$$\overline{\alpha_\nu}\cdot\overline{z^\nu} + \overline{\alpha_{\nu-1}}\ \overline{z^{\nu-1}} + \ldots + \overline{\alpha_1}\overline{z} + \alpha_0 = 0$$

$$\alpha_\nu(\overline{z})^\nu + \alpha_{\nu-1}(\overline{z})^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1\overline{z} + \alpha_0 = 0$$

Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι ο $\overline{z}$ είναι ρίζα της (1).

Ασκήσεις: 12, 13, 14, 15, 16, 17

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΣΤΟ $\mathbb{C}$

Τετραγωνικές ρίζες μιγαδικού

4.8 **Τετραγωνική ρίζα** ενός μιγαδικού $a = \alpha+\beta i$ ονομάζεται κάθε μιγαδικός z τέτοιος ώστε

$$z^2 = a \tag{1}$$

΄Εστω z_0 μια τετραγωνική ρίζα του a. Αν και ο z_1 είναι επίσης τετραγωνική ρίζα του a, τότε $z_1^2 = z_0^2$ (= a). Αλλά

$$z_1^2 = z_0^2 \Leftrightarrow z_1^2 - z_0^2 = 0 \Leftrightarrow (z_1-z_0 = 0 \quad \text{ή} \quad z_1+z_0 = 0)$$

$$\Leftrightarrow (z_1 = z_0 \quad \text{ή} \quad z_1 = -z_0)$$

Επομένως ο a έχει **δύο το πολύ** τετραγωνικές ρίζες.
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. **β = 0**, δηλαδή $a = \alpha \in \mathbb{R}$. Τότε ειδικότερα

● αν $\alpha > 0$, οι τετραγωνικές ρίζες του a είναι οι $\sqrt{\alpha}$ και $-\sqrt{\alpha}$

- αν $\alpha = 0$, τότε $a = 0$ και έχει μια τετραγωνική ρίζα, το 0.
- αν $\alpha < 0$, οι τετραγωνικές ρίζες του a είναι οι $i\sqrt{-\alpha}$ και $-i\sqrt{-\alpha}$

2. **$\beta \neq 0$.** Έστω ότι μια τετραγωνική ρίζα του a είναι ο x+yi. Τότε η (1) γίνεται

$$(x+yi)^2 = \alpha+\beta i \Leftrightarrow (x^2-y^2) + 2xyi = \alpha+\beta i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = \alpha & (2) \\ 2xy = \beta & (3) \end{cases}$$

Επειδή $\beta \neq 0$, από την (3) προκύπτει ότι $xy \neq 0$, οπότε $y = \frac{\beta}{2x}$. Έτσι η (2) γράφεται

$$x^2 - \frac{\beta^2}{4x^2} = \alpha \Leftrightarrow 4x^4-4\alpha x^2-\beta^2 = 0 \qquad (4)$$

Επειδή $-\beta^2 < 0$, η *επιλύουσα* $4\omega^2-4\alpha\omega-\beta^2 = 0$ $(\omega = x^2)$ της (4) έχει δυο ρίζες ετερόσημες. Η αρνητική ρίζα απορρίπτεται γιατί $\omega = x^2$ και $x,y \in \mathbb{R}$, ενώ από τη θετική προκύπτουν δυο αντίθετες τιμές του x, έστω x_1 και $-x_1$.

Από την $y = \frac{\beta}{2x}$ παίρνουμε τότε δυο αντίθετες τιμές για το y, έστω τις y_1 και $-y_1$, οπότε ο a έχει τετραγωνικές ρίζες τις x_1+y_1i και $-x_1-y_1i$. Άρα:

Καθε μιγαδικός $a \neq 0$ έχει δυο αντίθετες τετραγωνικές ρίζες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι μια τετραγωνική ρίζα του 3-4i είναι ο x+yi. Τότε

$$(x+yi)^2 = 3-4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 3 \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases}$$

Η πρώτη εξίσωση γράφεται:

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \Leftrightarrow x^4-3x^2-4 = 0$$

Η επιλύουσα της εξίσωσης αυτής έχει ρίζες $\rho_1 = 4$ και $\rho_2 = -1$. Η ρ_2 απορρίπτεται, ενώ από την $\rho_1 = 4$ παίρνουμε τη $x^2 = 4$ απ' όπου $x_1 = 2$ και $x_2 = -2$. Για τις τιμές αυτές του x έχουμε $y_1 = -1$ και $y_2 = 1$. Άρα τετραγωνικές ρίζες του 3-4i είναι οι 2-i και -2+i.

Η εξίσωση $az^2+bz+c = 0$ με $a \neq 0$, $b,c \in \mathbb{C}$.

4.9 Επειδή το $\mathbb{C}$ είναι σώμα, για την επίλυση της εξίσωσης αυτής εργαζόμαστε όπως και στην περίπτωση δευτεροβάθμιας εξίσωσης στο $\mathbb{R}$, τη μετα-

σχηματίζουμε δηλαδή στη μορφή

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad (1)$$

Έστω d η μια από τις τετραγωνικές ρίζες[1] της «διακρίνουσας» $\Delta = b^2-4ac$. Τότε είναι $d^2 = \Delta$ και η (1) γράφεται ισοδύναμα

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{d}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} = \frac{d}{2a} \quad ή \quad z+\frac{b}{2a} = -\frac{d}{2a}\right)$$

Δηλαδή η εξίσωση έχει δυο μιγαδικές ρίζες, τις

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm d}{2a}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η εξίσωση $z^2-(3-i)z-3i = 0$

Είναι: $\Delta = (3-i)^2+12i = 9-1-6i+12i = 8+6i$

Έχουμε: $8+6i = 9-1+2\cdot 3\cdot i = 3^2+i^2+2\cdot 3\cdot i = (3+i)^2$,
οπότε τετραγωνικές ρίζες του 8+6i είναι οι 3+i και -3-i.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ και $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

2. Η εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$, έχει:

- Δυο πραγματικές ρίζες, τις $\rho_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, όταν $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma > 0$
- Μια διπλή πραγματική ρίζα, τη $\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$, όταν $\Delta = 0$
- Δυο ρίζες μιγαδικές συζυγείς, τις $\rho_{1,2} = \frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, όταν $\Delta < 0$

(1) Για τους μιγαδικούς δε χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\sqrt{a}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $(3z^2+z+1)^2 + (z^2+2z+2)^2 = 0$ **(1)**

Έχουμε: (1) $\Leftrightarrow (3z^2+z+1)^2 - i^2(z^2+2z+2)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow [(3z^2+z+1) + i(z^2+2z+2)][(3z^2+z+1) - i(z^2+2z+2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow [(3+i)z^2 + (1+2i)z + (1+2i) = 0 \quad ή \quad (3-i)z^2 + (1-2i)z + (1-2i) = 0]$$

Η διακρίνουσα της πρώτης είναι $-7-24i$ που έχει τετραγωνικές ρίζες τις $-3+4i$ και $3-4i$. Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι

$$z_1 = \frac{-(1+2i)+3-4i}{2(3+i)} = -i \text{ και } z_2 = \frac{-(1+2i)-3+4i}{2(3+i)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

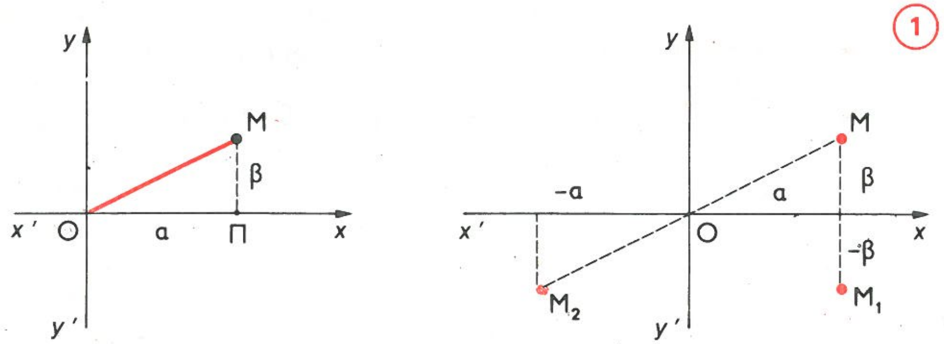
Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι οι ρίζες τις δεύτερης είναι $z_3 = i$ και $z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Ασκήσεις: 18, 19, 20, 21

ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Γεωμετρική παράσταση μιγαδικού

4.10 Έστω Oxy ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς στο επίπεδο. Τότε σε κάθε μιγαδικό $z = \alpha + \beta i$, δηλαδή σε κάθε ζεύγος (α, β) με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το σημείο M με συντεταγμένες α και β. Αντίστροφα σε κάθε σημείο M του επιπέδου αντιστοιχίζεται το ζεύγος (α, β) των συντεταγμένων του, δηλαδή ο μιγαδικός $\alpha + \beta i$ (σχ. 1α). Ορίζεται έτσι μια απεικόνιση «1 - 1 και επί» του συνόλου $\mathbb{C}$ στο σύνολο των σημείων του επιπέδου.



α β

Με την απεικόνιση αυτή:

- Ο $z = 0$ απεικονίζεται στην αρχή O.
- Οι πραγματικοί, δηλαδή οι μιγαδικοί της μορφής $\alpha+0i$, απεικονίζονται στον άξονα x΄x (*άξονας των πραγματικών αριθμών*).
- Οι φανταστικοί, δηλαδή οι μιγαδικοί της μορφής $0+\beta i$, απεικονίζονται στον άξονα y΄y (*άξονας των φανταστικών αριθμών*).

Το επίπεδο του οποίου τα σημεία παριστάνουν τους μιγαδικούς ονομάζεται **μιγαδικό επίπεδο.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Δυο συζυγείς μιγαδικοί απεικονίζονται σε σημεία με την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες, άρα σε σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x (σχ. 1β).
2. Δυο αντίθετοι μιγαδικοί απεικονίζονται σε σημεία με αντίθετες συντεταγμένες, άρα σε σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή O.

Μέτρο μιγαδικού

4.11 Έστω M η εικόνα του μιγαδικού $z = \alpha+\beta i$ στο μιγαδικό επίπεδο (σχ. 1α). Η διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ έχει μέτρο $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

Αν ειδικότερα είναι $z = \alpha \in \mathbb{R}$, θα έχουμε $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

Το μέτρο του $\overrightarrow{OM}$ λέγεται και *μέτρο* (ή *απόλυτη τιμή*) του z και συμβολίζεται $|z|$.

Ώστε:

ΟΡΙΣΜΟΣ *Μέτρο* **ή** *απόλυτη τιμή* **ενός μιγαδικού αριθμού $z = \alpha+\beta i$ ονομάζεται ο μη αρνητικός αριθμός**

$$|z| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Από τον ορισμό αυτό προκύπτουν για το $|z|$ οι ιδιότητες:

- $\boxed{z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0}$ (1)

- Είναι $|z| = |\alpha+\beta i| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = |\alpha-\beta i| = |-\alpha-\beta i| = |-\alpha+\beta i|$

Δηλαδή

$$\boxed{|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|} \qquad (2)$$

- Έχουμε $z\,\bar{z} = (\alpha+\beta i)\,(\alpha-\beta i) = \alpha^2+\beta^2$. Δηλαδή

$$\boxed{|z|^2 = z\,\bar{z}} \qquad (3)$$

- Αν $z \in \mathbb{R}$, τότε (§ 4.6) είναι $z = \bar{z}$. Επομένως η (3) γίνεται $|z|^2 = z^2$

Αντιστρόφως, αν $|z|^2 = z^2$ έχουμε, λόγω της (3):

$z\,\bar{z} = z^2 \Rightarrow z\,\bar{z} - z^2 = 0 \Rightarrow z\,(\bar{z} - z) = 0 \Rightarrow (z = 0 \;\; ή \;\; \bar{z} = z) \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

Έχουμε λοιπόν την ισοδυναμία

$$\boxed{z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2 = z^2} \qquad (4)$$

- Με όμοια εργασία αποδεικνύεται και η ισοδυναμία

$$\boxed{z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow |z|^2 = -z^2} \qquad (5)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Επισημαίνεται ότι η $|z|^2 = z^2$ ισχύει μόνο για πραγματικούς αριθμούς.
2. Αν $|z| = 1$, τότε έχουμε από την (3) $z\,\bar{z} = 1$, οπότε $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = \sqrt{3}-i$ και $z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Είναι:

$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$, $\quad |z_2| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ **να αποδειχτεί ότι:**

(i) $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

(ii) $|z_1+z_2| = |z_1| = |z_2| \Rightarrow |z_1-z_2| = \sqrt{3}\,|z_2|$

(i) Έχουμε: $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = (z_1+z_2)\,(\bar{z}_1+\bar{z}_2) + (z_1-z_2)\,(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$

$= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$

$= 2z_1\bar{z}_1 + 2z_2\bar{z}_2$

$= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

(ii) Αφού $|z_1+z_2| = |z_1| = |z_2|$, από την (i) έχουμε:

$$|z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 - |z_1+z_2|^2 = 2|z_2|^2 + 2|z_2|^2 - |z_2|^2 = 3|z_2|^2$$

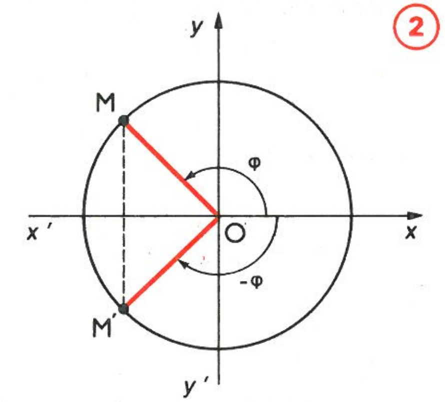
Άρα $\qquad |z_1 - z_2| = \sqrt{3}\,|z_2|$

Ασκήσεις: 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28.

Ορίσματα μιγαδικού

4.12 Ας θεωρήσουμε ένα μιγαδικό $z \neq 0$ με $|z| = \rho$. Επειδή $\rho \neq 0$, η εικόνα M του z στο μιγαδικό επίπεδο (σχ. 2) είναι ένα σημείο του κύκλου (O,ρ). Η θέση του M καθορίζεται πλήρως όταν δοθεί η κυρτή προσανατολισμένη γωνία $(\widehat{Ox,OM})$. Η αλγεβρική τιμή φ_0 της γωνίας αυτής ονομάζεται **πρωτεύον όρισμα** του z και συμβολίζεται[1] **Argz**. Ώστε η θέση του M καθορίζεται από το ζεύγος των αριθμών $\rho = |z|$ και $\varphi_0 = \text{Arg}z$, που λέγονται **πολικές συντεταγμένες** του M.

2



Από τον ορισμό του Argz προκύπτουν τα εξής:

- αν $z \neq 0$, τότε $-\pi < \text{Arg}z \leqslant \pi$
- αν $z \in \mathbb{R}^*_+$, τότε $\text{Arg}z = 0$

(1) Argument = όρισμα

- αν $z \in \mathbb{R}^*_-$, τότε $\mathrm{Arg}z = \pi$
- αν $z = \beta i$ με $\beta > 0$ $(\beta < 0)$, τότε $\mathrm{Arg}z = \frac{\pi}{2}$ $\left(\mathrm{Arg}z = -\frac{\pi}{2}\right)$
- Είναι γενικά (σχ. 2) $\mathrm{Arg}\bar{z} = -\mathrm{Arg}z$, εκτός από την περίπτωση $z \in \mathbb{R}^*_-$, που είναι $\mathrm{Arg}\bar{z} = \mathrm{Arg}z = \pi$.

Η εικόνα Μ του μιγαδικού z μπορούσε να καθοριστεί από το $|z|$ και από την αλγεβρική τιμή φ οποιασδήποτε γωνίας με αρχική πλευρά Ox και τελική πλευρά ΟΜ. Ο αριθμός φ, που όπως είναι γνωστό είναι ίσος με $\mathrm{Arg}z + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, λέμε ότι είναι *ένα όρισμα* του z.

ΟΡΙΣΜΟΣ **Ονομάζουμε *όρισμα* ενός μιγαδικού z κάθε πραγματικό**

$$\varphi = \mathrm{Arg}z + 2k\pi, \text{ με } k \in \mathbb{Z}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν $z = 0$, δεν έχει νόημα ο όρος «όρισμα». Γι' αυτό στα επόμενα όταν αναφερόμαστε σε όρισμα μιγαδικού z θα εννοούμε $z \neq 0$.
2. Αν φ είναι ένα όρισμα του z, τότε:
   - Ο $-\varphi$ είναι ένα όρισμα του $\bar{z}$
   - Ο $\pi + \varphi$ είναι ένα όρισμα του $-z$

Ισότητα μιγαδικών

4.13 Είναι φανερό ότι δύο (μη μηδενικοί) μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 είναι ίσοι, αν και μόνο αν απεικονίζονται στο ίδιο σημείο του μιγαδικού επιπέδου, δηλαδή αν και μόνο αν

$$|z_1| = |z_2| \text{ και } \mathrm{Arg}z_1 = \mathrm{Arg}z_2$$

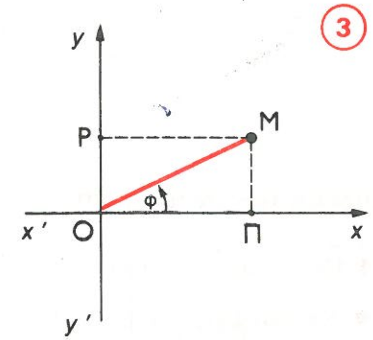
Έστω τώρα φ_1 και φ_2 ορίσματα των z_1 και z_2 αντιστοίχως. Για να απεικονίζονται οι z_1 και z_2 στο ίδιο σημείο του μιγαδικού επιπέδου, πρέπει και αρκεί να είναι $|z_1| = |z_2|$ και τα φ_1, φ_2 να διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο του 2π (βλέπε σχετικά και Άλγεβρα Α΄ Λυκείου, § 7.9).
Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο κριτήριο ισότητας μιγαδικών:

ΘΕΩΡΗΜΑ **Για να είναι ίσοι δυο μη μηδενικοί μιγαδικοί πρέπει και αρκεί να έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά δυο οποιωνδήποτε ορισμάτων τους να είναι πολλαπλάσιο του 2π.**

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού

4.14 Έστω φ ένα όρισμα του μιγαδικού $z = \alpha + \beta i$, του οποίου η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σημείο Μ (σχ. 3). Αν Π και Ρ είναι οι προβολές του Μ στους άξονες, θα έχουμε

3



$$\overline{O\Pi} = |\overrightarrow{OM}|\ \text{συν}\varphi$$

και $$\overline{OP} = |\overrightarrow{OM}|\ \text{ημ}\varphi$$

Δηλαδή

$$\alpha = |z|\ \text{συν}\varphi \qquad\qquad (1)$$
$$\beta = |z|\ \text{ημ}\varphi$$

οπότε είναι

$$\mathbf{z = |z|\ (συν\varphi + iημ\varphi)} \qquad (2)$$

Το δεύτερο μέλος της (2) λέγεται **τριγωνομετρική μορφή** του z.

Αντιστρόφως, έστω $\lambda > 0$ και

$$z = \lambda\ (\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta) \qquad (3)$$

Τότε, το δεύτερο μέλος της (3) είναι τριγωνομετρική μορφή του z, δηλαδή λ είναι το μέτρο και θ είναι ένα όρισμα του z.

Πράγματι έχουμε
$|z|^2 = \lambda^2 (\text{συν}^2\theta + \text{ημ}^2\theta) = \lambda^2$ και επειδή $\lambda > 0$ είναι $|z| = \lambda$. Επίσης, αν φ είναι ένα όρισμα του z, τότε σύμφωνα με τη (2) θα είναι

$$z = \lambda\ (\text{συν}\varphi + i\text{ημ}\varphi) \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι συνθ = συνφ και ημθ = ημφ, οπότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $\theta = \varphi + 2k\pi$. Άρα ο θ είναι ένα όρισμα του z.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ο μιγαδικός $z = \lambda$ (συνθ + iημθ) με $\lambda < 0$ γράφεται
$$z = -\lambda\,(-\text{συν}\theta - i\text{ημ}\theta) = -\lambda\,[\text{συν}\,(\pi+\theta) + i\text{ημ}\,(\pi+\theta)]$$
Δηλαδή ο z έχει μέτρο το $-\lambda$, ενώ ένα όρισμά του είναι ο $\pi + \theta$.

2. Ένας μιγαδικός z έχει μέτρο 1 αν και μόνο αν υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $z = \text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta$.

Εύρεση τριγωνομετρικής μορφής

4.15 Για να γράψουμε ένα μιγαδικό $z = \alpha + \beta i$ σε τριγωνομετρική μορφή:

- Υπολογίζουμε το μέτρο του
$$|z| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$
- Προσδιορίζουμε ένα όρισμά του φ ως εξής: Από τους τύπους (1) έχουμε
$$\text{συν}\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \text{ημ}\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \qquad (5)$$

Από τους (5) προκύπτει μια μοναδική λύση φ_0 = Arg$z$ στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θα γράψουμε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς $z_1 = -2$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$

Είναι:

$|z_1| = \sqrt{(-2)^2+0} = 2$ και Arg$z_1 = \pi$, οπότε $z_1 = 2(\text{συν}\pi + i\text{ημ}\pi)$

$|z_2| = \sqrt{0+(-2)^2} = 2$ και Arg$z_2 = -\frac{\pi}{2}$. Άρα $z_2 = 2\left[\text{συν}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$|z_3| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$. Συνεπώς, αν φ = Argz_3, τότε συν$\varphi = \frac{1}{2}$ και ημ$\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, οπότε $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Άρα $z_3 = 2\left(\text{συν}\frac{\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν $z_1 = 2\left(\text{συν}\frac{\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)$ και $z_2 = \frac{5+11\sqrt{3}i}{7-4\sqrt{3}i}$, να υπολογίσετε το γινόμενο z_1z_2.

Έχουμε

$$z_1 = 2\left(\text{συν}\frac{\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+\sqrt{3}i \quad \text{και}$$

$$z_2 = \frac{5+11\sqrt{3}i}{7-4\sqrt{3}i} = \frac{(5+11\sqrt{3}i)(7+4\sqrt{3}i)}{(7-4\sqrt{3}i)(7+4\sqrt{3}i)} = \frac{-97+97\sqrt{3}i}{97} = -1+\sqrt{3}i$$

Άρα $z_1z_2 = (1+\sqrt{3}i)(-1+\sqrt{3}i) = (\sqrt{3}i)^2 - 1 = -3-1 = -4$

2. Να γραφεί ο $z = \frac{4+12i}{1-2i}$ σε τριγωνομετρική μορφή.

Έχουμε $z = \frac{(4+12i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-20+20i}{1+4} = -4+4i$

Άρα $|z| = \sqrt{(-4)^2+4^2} = 4\sqrt{2}$.

Αν φ = Arg$z$, τότε συν$\varphi = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και ημ$\varphi = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Επομένως $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, οπότε $z = 4\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{3\pi}{4} + i\text{ημ}\frac{3\pi}{4}\right)$

3. Αν $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, να βρεθεί το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού $z = \text{ημ}\theta + (1+\text{συν}\theta)\,i$.

Είναι $z = 2\text{ημ}\frac{\theta}{2}\text{συν}\frac{\theta}{2} + 2\,\text{συν}^2\frac{\theta}{2}\,i = 2\,\text{συν}\frac{\theta}{2}\left(\text{ημ}\frac{\theta}{2} + i\,\text{συν}\frac{\theta}{2}\right)$

$$= 2\,\text{συν}\frac{\theta}{2}\left[\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\right]$$

Επομένως:

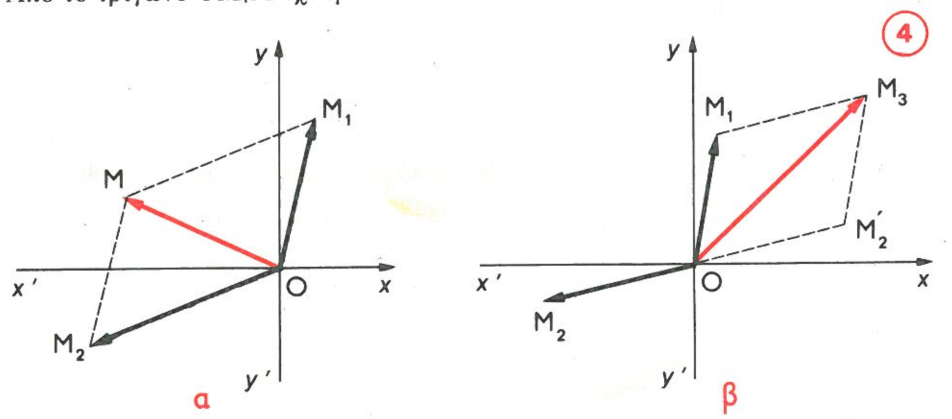
- Αν $0 \leqslant \theta < \pi$, τότε $2\,\text{συν}\frac{\theta}{2} > 0$, οπότε το μέτρο του z είναι $2\,\text{συν}\frac{\theta}{2}$ και ένα όρισμά του είναι το $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$
- Αν $\theta = \pi$, είναι $\text{συν}\frac{\theta}{2} = 0$ και συνεπώς $z = 0$
- Αν $\pi < \theta \leqslant 2\pi$, τότε $2\,\text{συν}\frac{\theta}{2} < 0$, οπότε (§ 4.14, παρατ. 1) το μέτρο του z είναι ο $-2\,\text{συν}\frac{\theta}{2}$ και ένα όρισμά του είναι το $\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} = \frac{3\pi-\theta}{2}$

Ασκήσεις: 29, 30, 31, 32, 33.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΤΡΟ

Μέτρο αθροίσματος μιγαδικών

4.16 Αν $\overrightarrow{OM_1}$ και $\overrightarrow{OM_2}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες που αντιστοιχούν στους $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, και $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$, τότε (σχ. 4α) $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM}$ είναι η διανυσματική ακτίνα που αντιστοιχεί στο άθροισμα $z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)i$, ενώ (σχ. 4β) $\overrightarrow{OM_3}$ είναι η διανυσματική ακτίνα που αντιστοιχεί στη διαφορά $z_1 - z_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2)i$.
Από το τρίγωνο OM_1M έχουμε



$$||\overrightarrow{OM_1}| - |\overrightarrow{M_1M}|| \leqslant |\overrightarrow{OM}| \leqslant |\overrightarrow{OM_1}| + |\overrightarrow{M_1M}|$$

ή

$$||\overrightarrow{OM_1}| - |\overrightarrow{OM_2}|| \leqslant |\overrightarrow{OM}| \leqslant |\overrightarrow{OM_1}| + |\overrightarrow{OM_2}| .$$

Άρα

$$\boxed{||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|} \qquad (1)$$

Αν αντικαταστήσουμε στην (1) το z_2 με το $-z_2$, τότε αυτή γράφεται

$$\boxed{||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|} \qquad (2)$$

Εξάλλου αποδεικνύεται επαγωγικά ότι:

$$\boxed{|z_1 + z_2 + \dots + z_\nu| \leqslant |z_1| + |z_2| + \dots + |z_\nu|} \qquad (3)$$

Τέλος, από τις ισότητες $z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)i$ και $z_1 - z_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2)i$ προκύπτουν οι:

$$\boxed{|z_1 + z_2| = \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2}\,, \quad |z_1 - z_2| = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2} = |\overrightarrow{M_1M_2}|}$$

Σημείωση

Ισχύει η ισοδυναμία: $z_1 = \lambda z_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{OM_2},\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Μέτρο και ορίσματα του γινομένου μιγαδικών

4.17 Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση στο $\mathbb{C}$ διευκολύνονται όταν οι μιγαδικοί δίνονται με την τριγωνομετρική μορφή τους, γιατί τότε αξιοποιούνται γνώσεις από την τριγωνομετρία.

Έστω ρ_1, ρ_2 τα μέτρα και φ_1, φ_2 ορίσματα των μιγαδικών z_1, z_2 αντιστοίχως. Τότε:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1(\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + i\eta\mu\varphi_1)\rho_2(\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + i\eta\mu\varphi_2) \\ &= \rho_1\rho_2[(\sigma\upsilon\nu\varphi_1\sigma\upsilon\nu\varphi_2 - \eta\mu\varphi_1\eta\mu\varphi_2) + i(\eta\mu\varphi_1\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + \eta\mu\varphi_2\sigma\upsilon\nu\varphi_1)] \\ &= \rho_1\rho_2[\ \sigma\upsilon\nu(\varphi_1 + \varphi_2) + i\eta\mu(\varphi_1 + \varphi_2)\ ] \end{aligned}$$

Αλλά $\rho_1\rho_2 > 0$, οπότε (§4.14) το μέτρο του z_1z_2 είναι $\rho_1\rho_2$, ενώ ένα όρισμά του είναι $\varphi_1 + \varphi_2$.

Το παραπάνω συμπέρασμα γενικεύεται, με επαγωγή, και για $\nu > 2$.

Έχουμε λοιπόν το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί $z_1, z_2, \dots, z_\nu$ και φ_i ένα όρισμα του z_i, $i = 1, 2, \dots, \nu$. Το γινόμενο $z_1 z_2 \dots z_\nu$ έχει**

- **μέτρο, το γινόμενο των μέτρων, δηλαδή**

$$|z_1 z_2 \dots z_\nu| = |z_1|\,|z_2| \dots |z_\nu| \qquad (1)$$

- **ένα όρισμα, το άθροισμα $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_\nu$**

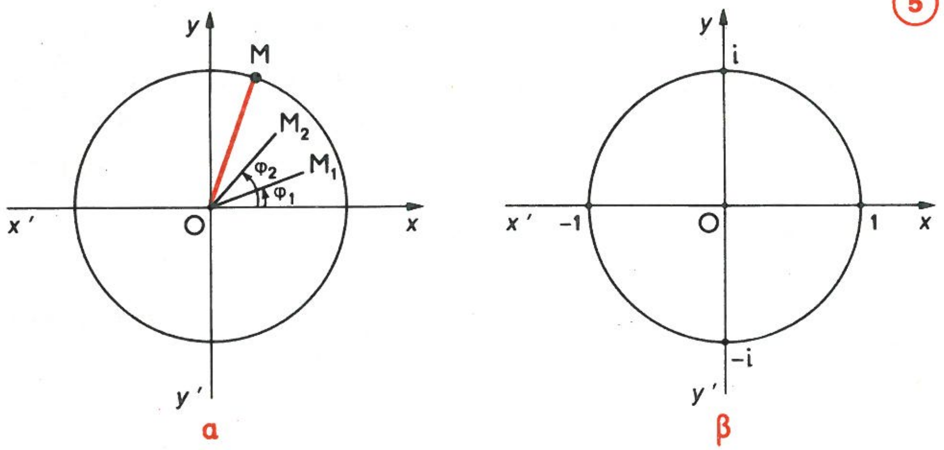
Η (1) ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που υπάρχει μηδενικός παράγοντας.
Άμεση συνέπεια του θεωρήματος είναι το

ΠΟΡΙΣΜΑ **Αν $z_1 = z_2 = \dots = z_\nu = z$ και φ είναι ένα όρισμα του z, τότε**

- $|z^\nu| = |z|^\nu$
- **το νφ είναι ένα όρισμα του z^ν.**

Στο σχήμα 5α έχουμε τη γεωμετρική παράσταση του γινομένου δυο μιγαδικών. Εικόνα του z_1z_2 είναι η τομή του κύκλου (O, $\rho_1\rho_2$) και της τελικής πλευράς της γωνίας που έχει αλγεβρική τιμή $\varphi_1+\varphi_2$.

5



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού z με οποιοδήποτε μιγαδικό της μορφής συνθ + iημθ (που έχει μέτρο 1) στρέφει τη διανυσματική ακτίνα που αντιστοιχίζεται στο μιγαδικό z κατά γωνία θ. Π.χ. ο πολλαπλασιασμός του z με το $i = \text{συν}\,\frac{\pi}{2} + i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{2}$ σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας κατά $\frac{\pi}{2}$.

Έτσι έχουμε (σχ. 5β) $1\cdot i = i,\ \ i\cdot i = -1,\ \ -1\cdot i = -i,\ \ -i\cdot i = 1$

Μέτρο και ορίσματα πηλίκου μιγαδικών

4.18 Έστω φ ένα όρισμα του μιγαδικού $z \neq 0$ και θ ένα όρισμα του $\frac{1}{z}$.

Επειδή $z\,\frac{1}{z} = 1$, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα το θ+φ είναι ένα όρισμα του 1. Επομένως υπάρχει $k\in\mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $\theta+\varphi = \text{Arg}1+2k\pi$, δηλαδή

$$\theta = -\varphi+2k\pi$$

Εξάλλου είναι $\left|z\,\frac{1}{z}\right| = |1|$ ή $|z|\left|\frac{1}{z}\right| = 1$, δηλαδή

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

Ώστε:

ΘΕΩΡΗΜΑ **Ο αντίστροφος ενός μιγαδικού $z \neq 0$ έχει μέτρο τον αντίστροφο του μέτρου του z, ενώ ένα όρισμά του είναι ο αντίθετος ενός ορίσματος του z.**

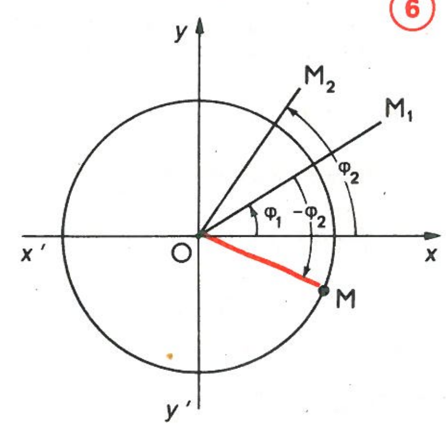
Από το θεώρημα αυτό συμπεραίνουμε εύκολα το

ΠΟΡΙΣΜΑ **Αν οι μιγαδικοί $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ έχουν ορίσματα φ_1, φ_2 αντιστοίχως, τότε**

- $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (1)$$
- **το $\varphi_1-\varphi_2$ είναι ένα όρισμα του $\frac{z_1}{z_2}$**

Η (1) ισχύει προφανώς και όταν $z_1=0$. Στο σχήμα 6 εικόνα του πηλίκου είναι το σημείο M στο οποίο τέμνει τον κύκλο (O, $\frac{|z_1|}{|z_2|}$) η τελική πλευρά της γωνίας $\varphi_1-\varphi_2$.

6



Δύναμη με εκθέτη ακέραιο

4.19 Μια ακόμη συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι το

ΘΕΩΡΗΜΑ **΄Εστω μιγαδικός $z \neq 0$ και φ ένα όρισμά του. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{Z}$:**

- $|z^k| = |z|^k$
- **Το $k\varphi$ είναι ένα όρισμα του z^k**

Απόδειξη

Το θεώρημα έχει αποδειχτεί όταν $k \in \mathbb{N}$ (§ 4.17). Αν $k = -\nu$ με $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε

- $|z^k| = |z^{-\nu}| = \left|\frac{1}{z^\nu}\right| = \frac{1}{|z^\nu|} = \frac{1}{|z|^\nu} = |z|^{-\nu} = |z|^k$
- Αφού ο φ είναι ένα όρισμα του z, ο $\nu\varphi$ είναι ένα όρισμα του z^ν και συνεπώς, σύμφωνα με το θεώρημα, ο $-\nu\varphi = k\varphi$ είναι ένα όρισμα του $\frac{1}{z^\nu} = z^{-\nu} = z^k$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. ΄Εστω $z_1 = 4i$ και $z_2 = 1+i\sqrt{3}$.

Τότε $z_1 = 4\,(0+i) = 4\,(\text{συν}\,\frac{\pi}{2} + i\text{ημ}\,\frac{\pi}{2})$ και

$$z_2 = 2\,(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\,(\text{συν}\,\frac{\pi}{3} + i\text{ημ}\,\frac{\pi}{3}).$$

$$\text{΄Αρα } \frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2}\left[\text{συν}\,(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) + i\text{ημ}\,(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})\right] = 2\,(\text{συν}\,\frac{\pi}{6} + i\text{ημ}\,\frac{\pi}{6})$$

$$= 2\,(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}) = \sqrt{3}+i$$

2. ΄Εστω ο μιγαδικός $z = 1+i$

Είναι $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, οπότε $z = \sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}\,(\text{συν}\,\frac{\pi}{4} + i\text{ημ}\,\frac{\pi}{4})$

$$\text{΄Αρα } z^{10} = (\sqrt{2})^{10}\,(\text{συν}\,\frac{10\pi}{4} + i\text{ημ}\,\frac{10\pi}{4}) = 32\,(\text{συν}\,\frac{\pi}{2} + i\text{ημ}\,\frac{\pi}{2}) = 32\,i$$

$$z^{-8} = \frac{1}{(\sqrt{2})^8}\,(\text{συν}\,\frac{-8\pi}{4} + i\text{ημ}\,\frac{-8\pi}{4}) = \frac{1}{16}\,(1 + i\cdot 0) = \frac{1}{16}$$

Τύπος του De Moivre

4.20 ΄Εστω $\mathbb{U}$ το σύνολο των μιγαδικών που έχουν μέτρο 1.

Αν $z \in \mathbb{U}$, τότε (§ 4.14 παρατηρ. 2) υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$z = \text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta$$

Επομένως, σύμφωνα με την § 4.19, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ θα έχουμε

$$z^k = \text{συν}\,(k\theta) + i\text{ημ}\,(k\theta)$$

δηλαδή

$$\boxed{(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)^k = \text{συν}(k\theta) + i\text{ημ}(k\theta)} \qquad (1)$$

Η ισότητα αυτή είναι γνωστή ως **τύπος του De Moivre**. Μια εφαρμογή του τύπου του De Moivre είναι η εύρεση των τριγωνομετρικών αριθμών των πολλαπλασίων ενός τόξου θ από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του θ, όπως φαίνεται στο επόμενο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θα υπολογίσουμε το ημ4θ και συν4θ

΄Εχουμε

$$(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)^4 = \text{συν}4\theta + i\text{ημ}4\theta \qquad (2)$$

Με εκτέλεση των πράξεων στο α΄ μέλος έχουμε

$$(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)^4 = \text{συν}^4\theta + i4\text{συν}^3\theta\text{ημ}\theta - 6\text{ημ}^2\theta\text{συν}^2\theta - i4\text{συν}\theta\text{ημ}^3\theta + \text{ημ}^4\theta$$

$$= \text{συν}^4\theta - 6\text{συν}^2\theta\,(1-\text{συν}^2\theta) + (1-\text{συν}^2\theta)^2 + i4\text{συν}\theta\,[(1-\text{ημ}^2\theta)\text{ημ}\theta - \text{ημ}^3\theta)$$

$$= \text{συν}^4\theta - 6\text{συν}^2\theta + 6\text{συν}^4\theta + 1 + \text{συν}^4\theta - 2\text{συν}^2\theta + i4\text{συν}\theta(\text{ημ}\theta - 2\text{ημ}^3\theta)$$

$$= (8\text{συν}^4\theta - 8\text{συν}^2\theta + 1) + i4\text{συν}\theta(\text{ημ}\theta - 2\text{ημ}^3\theta)$$

΄Αρα η (2) γίνεται

$$(8\text{συν}^4\theta - 8\text{συν}^2\theta + 1) + i4\text{συν}\theta(\text{ημ}\theta - 2\text{ημ}^3\theta) = \text{συν}4\theta + i\text{ημ}4\theta$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\mathbf{\text{συν}4\theta = 8\text{συν}^4\theta - 8\text{συν}^2\theta + 1}$$

και

$$\mathbf{\text{ημ}4\theta = 4\text{συν}\theta(\text{ημ}\theta - 2\text{ημ}^3\theta)}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\mathbf{U}$ των μιγαδικών που έχουν μέτρο 1 είναι πολλαπλασιαστική ομάδα.

Έστω $z, z_1, z_2 \in \mathbf{U}$. Τότε:

- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| = 1 \cdot 1 = 1$, δηλαδή $(z_1 z_2) \in \mathbf{U}$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$, δηλαδή $\frac{1}{z} \in \mathbf{U}$

Ώστε το $\mathbf{U}$ είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό, ενώ ο αντίστροφος κάθε στοιχείου του $\mathbf{U}$ ανήκει επίσης στο $\mathbf{U}$. Επομένως (§ 2.13) το $\mathbf{U}$ είναι πολλαπλασιαστική ομάδα.

2. Να αποδειχτεί με αλγεβρική μέθοδο η σχέση

$$\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

Έχουμε:

(i)
$$\begin{aligned}
\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \leqslant |z_1 + z_2| &\Leftrightarrow \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big|^2 \leqslant |z_1 + z_2|^2 \\
&\Leftrightarrow (\,|z_1| - |z_2|\,)^2 \leqslant (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\
&\Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|\,|z_2| \leqslant z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \\
&\Leftrightarrow -2\,|z_1|\,|z_2| \leqslant z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 \\
&\Leftrightarrow -2\,|z_1|\,|\bar{z}_2| \leqslant z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\
&\Leftrightarrow -2\,|z_1\bar{z}_2| \leqslant z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Αν $z_1\bar{z}_2 = \alpha + \beta i$, τότε $z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 2\alpha$, οπότε η (1) γράφεται

$$-2\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \leqslant 2\alpha \Leftrightarrow -\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \leqslant \alpha \qquad (2)$$

Αν $\alpha > 0$, τότε, η (2) είναι αληθής. Αν $\alpha \leqslant 0$, τότε η (2) γράφεται

$(\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^2 \geqslant (-\alpha)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2 \geqslant \alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2 \geqslant 0$ που είναι αληθής. Άρα είναι αληθής και η αποδεικτέα.

(ii) $|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$. Αν εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι η αποδεικτέα είναι ισοδύναμη με την:

$$z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} \leqslant 2|z_1\bar{z}_2| \qquad (3)$$

Αν $z_1\bar{z}_2 = \alpha + \beta i$ η (3) γράφεται

$$2\alpha \leqslant 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \Leftrightarrow \alpha \leqslant \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \qquad (4)$$

Αν $\alpha < 0$ τότε η (4) είναι αληθής. Αν $\alpha \geqslant 0$ τότε η (4) γράφεται

$$\alpha^2 \leqslant \alpha^2+\beta^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant \beta^2, \quad \text{αληθής}$$

Άρα είναι αληθής και η αποδεικτέα.

3. Να αποδείξετε την ισότητα 2 της § 4.7 με τη βοήθεια της έννοιας του ορίσματος μιγαδικών.

Έστω οι μιγαδικοί $z_1 \neq 0$ και $z_2 \neq 0$. Τότε:

- $|\overline{z_1 z_2}| = |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| = |\bar{z}_1|\,|\bar{z}_2|$
- Αν φ_1, φ_2 είναι ορίσματα των z_1, z_2 αντιστοίχως, τότε το $\varphi_1+\varphi_2$ είναι ένα όρισμα του $z_1 z_2$. Επομένως (§ 4.12, παρατηρ. 2) ένα όρισμα του $\overline{z_1 z_2}$ είναι το $-(\varphi_1+\varphi_2) = (-\varphi_1)+(-\varphi_2)$, που είναι και όρισμα του $\bar{z}_1\bar{z}_2$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$$

Ασκήσεις: 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44.

ΡΙΖΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

Νιοστές ρίζες της μονάδας

4.21 Γενικεύοντας την έννοια της τετραγωνικής ρίζας μιγαδικού, την οποία ορίσαμε την § 4.8, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ **Ονομάζεται** ***νιοστή ρίζα*** **ενός μιγαδικού αριθμού a κάθε μιγαδικός z τέτοιος ώστε**

$$z^\nu = a$$

Θα υπολογίσουμε πρώτα τις νιοστές ρίζες της μονάδας, δηλαδή θα βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης

$$z^\nu = 1$$

Για να είναι νιοστή ρίζα του 1 ένας μιγαδικός $\zeta = |\zeta|$ (συνθ + iημθ), πρέπει και αρκεί να είναι $\zeta^\nu = 1$, δηλαδή

$$|\zeta|^\nu (\text{συν}\nu\theta + i\text{ημ}\nu\theta) = 1$$

Επειδή όμως είναι $|1| = 1$ και $\text{Arg}1 = 0$, ο ζ είναι ρίζα του 1 αν και μόνο αν (§ 4.13) υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε

$$|\zeta^\nu| = 1 \quad \text{και} \quad \nu\theta = 2k\pi$$

$$\text{ή} \quad |\zeta| = 1 \quad \text{και} \quad \theta = \frac{2k\pi}{\nu}$$

Δηλαδή νιοστή ρίζα της μονάδας είναι κάθε αριθμός της μορφής

$$\boxed{\zeta_k = \text{συν}\,\frac{2k\pi}{\nu} + i\text{ημ}\,\frac{2k\pi}{\nu}\,,\ k \in \mathbb{Z}} \qquad (1)$$

Έτσι π.χ. νιοστές ρίζες της μονάδας είναι οι αριθμοί

$$\zeta_0 = \text{συν}0 + i\text{ημ}0 = 1 \qquad (2)$$

$$\zeta_1 = \text{συν}\,\frac{2\pi}{\nu} + i\text{ημ}\,\frac{2\pi}{\nu} \qquad (3)$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει αμέσως ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ είναι

$$\boxed{\zeta_k = \zeta_1^k}$$

Είναι λοιπόν

$$\zeta_2 = \zeta_1^2,\ \zeta_3 = \zeta_1^3,\ \ldots,\ \zeta_{\nu-1} = \zeta_1^{\nu-1},\ \zeta_\nu = \zeta_1^\nu = 1,\ \zeta_{\nu+1} = \zeta_1^{\nu+1} = \zeta_1^\nu \zeta_1 = \zeta_1,\ \ldots$$

Παρατηρούμε ότι οι νιοστές ρίζες της μονάδας που δίνονται από την (1) δεν είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους.

Θα εξετάσουμε για ποιές τιμές του k έχουμε ρίζες διαφορετικές. Επειδή για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ υπάρχουν ακέραιοι ρ και υ ώστε να είναι

$$k = \rho\nu + \upsilon \text{ με } 0 \leqslant \upsilon < \nu,$$

θα έχουμε $\qquad \zeta_k = \zeta_1^k = \zeta_1^{\rho\nu+\upsilon} = (\zeta_1^\nu)^\rho \zeta_1^\upsilon = \zeta_1^\upsilon = \zeta_\upsilon$

Δηλαδή:

Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ η ρίζα ζ_k ταυτίζεται με μια από τις $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{\nu-1}$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι οι $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{\nu-1}$ είναι ανά δυο διαφορετικές μεταξύ τους.

Πράγματι: έστω ότι είναι $\zeta_\lambda = \zeta_\mu$, όπου $0 \leqslant \lambda < \mu < \nu$. Τότε θα έχουμε διαδοχικά

$$\zeta_1^\lambda = \zeta_1^\mu \Leftrightarrow \zeta_1^\mu : \zeta_1^\lambda = 1 \Leftrightarrow \zeta_1^{\mu-\lambda} = 1 \Leftrightarrow \zeta_{\mu-\lambda} = 1$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε

$\dfrac{2(\mu-\lambda)\pi}{\nu} = 2k\pi$ ή $\dfrac{\mu-\lambda}{\nu} = k$, που είναι άτοπο.

Μετά την παραπάνω ανάλυση μπορούμε να διατυπώσουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Νιοστές ρίζες της μονάδας είναι οι ν αριθμοί**

$$\zeta_\upsilon = \text{συν}\,\frac{2\upsilon\pi}{\nu} + i\text{ημ}\,\frac{2\upsilon\pi}{\nu}$$

όπου $\upsilon = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Οι τέταρτες ρίζες της μονάδας είναι

$\zeta_0 = 1$

$$\zeta_1 = \text{συν}\,\frac{2\pi}{4} + i\text{ημ}\,\frac{2\pi}{4} = \text{συν}\,\frac{\pi}{2} + i\text{ημ}\,\frac{\pi}{2} = i$$

$$\zeta_2 = \text{συν}\,\frac{2\cdot 2\pi}{4} + i\text{ημ}\,\frac{2\cdot 2\pi}{4} = \text{συν}\pi + i\text{ημ}\pi = -1$$

$$\zeta_3 = \text{συν}\,\frac{3\cdot 2\pi}{4} + i\text{ημ}\,\frac{3\cdot 2\pi}{4} = \text{συν}\,\frac{3\pi}{2} + i\text{ημ}\,\frac{3\pi}{2} = -i$$

Ιδιότητες των νιοστών ριζών της μονάδας

4.22 Έστω Ε το σύνολο των νιοστών ριζών της μονάδας, δηλαδή

$$E = \{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{\nu-1}\}$$

1. Αν θεωρήσουμε τις ρίζες ζ_λ και $\zeta_{\nu-\lambda}$, τότε

$$\zeta_\lambda \zeta_{\nu-\lambda} = \zeta_1^\lambda \zeta_1^{\nu-\lambda} = \zeta_1^\nu = 1$$

Δηλαδή:

Ο αντίστροφος της ρίζας ζ_λ είναι η ρίζα $\zeta_{\nu-\lambda}$

2. Είναι $\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_{\nu-1} = 1 + \zeta_1 + \zeta_1^2 + \dots + \zeta_1^{\nu-1} = \dfrac{\zeta_1^{\nu}-1}{\zeta_1-1}$

Αλλά $\zeta_1^{\nu} = 1$, οπότε

$$\boxed{\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_{\nu-1} = 0}$$

3. Αν $\zeta_\lambda, \zeta_\mu \in E$, τότε $(\zeta_\lambda \zeta_\mu)^{\nu} = \zeta_\lambda^{\nu}\zeta_\mu^{\nu} = 1 \cdot 1 = 1$

Αυτό σημαίνει ότι $(\zeta_\lambda\zeta_\mu) \in E$, δηλαδή το E είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Επίσης, σύμφωνα με την ιδιότητα 1, ο αντίστροφος κάθε στοιχείου του E ανήκει στο E.

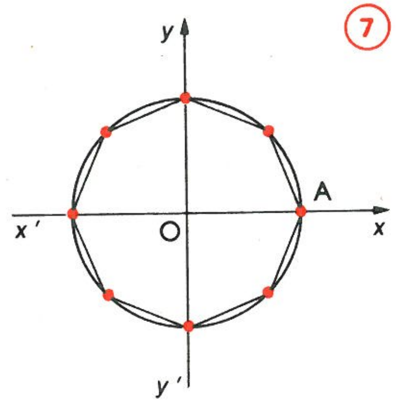
Άρα (§ 2.13)

Το σύνολο των νιοστών ριζών της μονάδας είναι πολλαπλασιαστική ομάδα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι νιοστές ρίζες του 1 έχουν το ίδιο μέτρο (= 1) και τα ορίσματα δύο διαδοχικών ριζών διαφέρουν κατά $\frac{2\pi}{\nu}$. Επομένως οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 1 (σχ. 7).

7



Νιοστές ρίζες μιγαδικού

4.23 Θα υπολογίσουμε τώρα τις νιοστές ρίζες ενός οποιουδήποτε μιγαδικού a, δηλαδή θα βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης

$$z^{\nu} = a$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $a = 0$, τότε η μόνη νιοστή ρίζα του a είναι ο 0, αφού

$$z^{\nu} = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

- Αν $a \neq 0$ και φ είναι ένα όρισμα του a, τότε

$$a = |a|\,(\text{συν}\varphi + i\text{ημ}\varphi) \qquad (1)$$

Για να είναι ένας αριθμός $z = |z|\,(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)$ νιοστή ρίζα του a, πρέπει και αρκεί να είναι

$$|z|^{\nu}\,(\text{συν}\nu\theta + i\text{ημ}\nu\theta) = a \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει (§ 4.13) ότι

$$|z|^{\nu} = |a| \quad \text{ή} \quad |z| = \sqrt[\nu]{|a|}$$

και υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε

$$\nu\theta = \varphi + 2k\pi \;\text{ ή }\; \theta = \frac{\varphi+2k\pi}{\nu}$$

Επομένως νιοστή ρίζα του a είναι κάθε αριθμός της μορφής

$$\boxed{z_k = \sqrt[\nu]{|a|}\,\left(\text{συν}\,\frac{\varphi+2k\pi}{\nu} + i\text{ημ}\,\frac{\varphi+2k\pi}{\nu}\right),\; k \in \mathbb{Z}} \qquad (3)$$

Είναι:

$$z_k = \sqrt[\nu]{|a|}\,\left[\text{συν}\left(\frac{\varphi}{\nu} + \frac{2k\pi}{\nu}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{\varphi}{\nu} + \frac{2k\pi}{\nu}\right)\right]$$

$$= \sqrt[\nu]{|a|}\,\left(\text{συν}\,\frac{\varphi}{\nu} + i\text{ημ}\,\frac{\varphi}{\nu}\right)\left(\text{συν}\,\frac{2k\pi}{\nu} + i\text{ημ}\,\frac{2k\pi}{\nu}\right).$$

Αλλά $\sqrt[\nu]{|a|}\,\left(\text{συν}\,\frac{\varphi}{\nu} + i\text{ημ}\,\frac{\varphi}{\nu}\right) = z_0$, ενώ ο $\text{συν}\,\frac{2k\pi}{\nu} + i\text{ημ}\,\frac{2k\pi}{\nu}$ είναι μια νιοστή ρίζα ζ_k της μονάδας. Είναι λοιπόν

$$\boxed{z_k = z_0\,\zeta_k} \qquad (4)$$

Από την (4) συμπεραίνουμε ότι **ο a έχει ν νιοστές ρίζες**, που τις βρίσκουμε αν πολλαπλασιάσουμε τη z_0 με τις νιοστές ρίζες του 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θα υπολογίσουμε τις τέταρτες ρίζες του $a = 8 + 8i\sqrt{3}$.

Είναι $|a| = \sqrt{64+64\cdot 3} = 16$, οπότε

$$a = 16\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16\left(\text{συν}\,\frac{\pi}{3} + i\text{ημ}\,\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{'Αρα } z_0 = \sqrt[4]{16}\left(\text{συν}\frac{\frac{\pi}{3}}{4} + i\,\text{ημ}\frac{\frac{\pi}{3}}{4}\right) = 2\left(\text{συν}\frac{\pi}{12} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\cdot i$$

Επομένως οι άλλες ρίζες είναι (§ 4.21, παραδ.)

$$z_1 = z_0\cdot i = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\,i$$

$$z_2 = z_0(-1) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\,i$$

$$z_3 = z_0(-i) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\,i$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

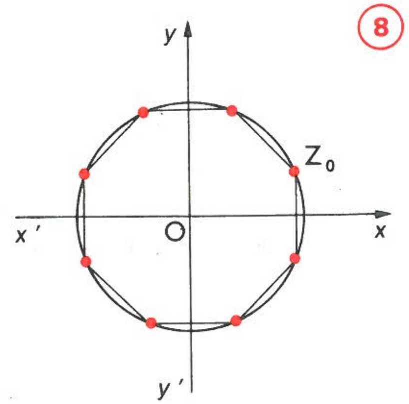
1. Οι εικόνες των νιοστών ριζών του μιγαδικού a στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου (σχ. 8).

2. Οι νιοστές ρίζες του a προκύπτουν από μια οποιαδήποτε νιοστή ρίζα του (όχι κατ' ανάγκη από τη z_0) με πολλαπλασιασμό επί τις νιοστές ρίζες της μονάδας. Πράγματι, για κάθε $\lambda \in \{0, 1, ..., \nu-1\}$ έχουμε

$$(z_k\zeta_\lambda)^\nu = z_k^\nu\,\zeta_\lambda^\nu = a\cdot 1 = a.$$

Δηλαδή ο $z_k\zeta_\lambda$ είναι μια νιοστή ρίζα του a.

8



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η εξίσωση: $z^6 - (1+i)z^3 + i = 0$ (1)

Θέτουμε $z^3 = \omega$ και η (1) γίνεται $\omega^2-(1+i)\omega+i = 0$ (2)

Η διακρίνουσα της (2) είναι

$$\Delta = (1+i)^2-4i = 1^2+i^2+2i-4i = 1^2+i^2-2i = (1-i)^2$$

Επομένως ρίζες της (2) είναι οι

$$\omega_1 = \frac{1+i+1-i}{2} = 1 \text{ και } \omega_2 = \frac{1+i-1+i}{2} = i$$

'Ετσι ρίζες της (1) είναι οι ρίζες των εξισώσεων

$$z^3 = 1 \quad (3) \qquad \text{και} \qquad z^3 = i \quad (4)$$

- Ρίζες της (3) είναι οι κυβικές ρίζες του 1, δηλαδή οι

$$\zeta_0 = 1$$

$$\zeta_1 = \text{συν}\frac{2\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\zeta_2 = \text{συν}\frac{4\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Ρίζες της (4) είναι οι κυβικές ρίζες του i, που είναι οι

$$z_0 = \text{συν}\frac{\pi}{6} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i$$

$$z_1 = z_0\cdot\zeta_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i$$

$$z_2 = z_0\cdot\zeta_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -i$$

Ασκήσεις: 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟ ℂ

Γενικά

4.24 Στο σύνολο ℂ ορίζονται πολυωνυμικές συναρτήσεις και πολυώνυμα όπως και στο ℝ. Δηλαδή, αν $a_0, a_1, ..., a_\nu$ με $a_\nu \neq 0$ είναι ν+1 μιγαδικοί αριθμοί, τότε η συνάρτηση $P:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$P(z) = a_\nu z^\nu + a_{\nu-1}z^{\nu-1} + ... + a_1 z + a_0$$

ονομάζεται **πολυωνυμική συνάρτηση** ν βαθμού και το P(z) **πολυώνυμο** ν βαθμού στο ℂ με συντελεστές $a_0, a_1, ..., a_\nu$.

Η αντίστοιχη εξίσωση

$$a_\nu z^\nu + a_{\nu-1}z^{\nu-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0,\ z\in\mathbb{C}$$

λέγεται **πολυωνυμική εξίσωση** ν βαθμού στο $\mathbb{C}$.

Κάθε $z_0\in\mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $P(z_0) = 0$ λέγεται **ρίζα** της πολυωνυμικής εξίσωσης, όπως επίσης και ρίζα του πολυωνύμου $P(z)$.

Ήδη μας είναι γνωστή η επίλυση μιας εξίσωσης πρώτου ή δεύτερου βαθμού (§ 4.9) καθώς και κάθε εξίσωσης ν βαθμού της μορφής $z^\nu - a = 0$, η οποία έχει ν ρίζες, τις νιοστές ρίζες του a (§ 4.23).

Λύση πολυωνυμικής εξίσωσης με παραγοντοποίηση

4.25 Μια πολυωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$ στο $\mathbb{C}$ μπορεί, γενικά, να λυθεί με παραγοντοποίηση του α΄ μέλους της, όπως γίνεται με τις εξισώσεις στο $\mathbb{R}$.

Το πολυώνυμο

$$P(z) = a_\nu z^\nu + a_{\nu-1}z^{\nu-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

όταν $\nu \geqslant 1$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί, αν γνωρίζουμε μια ρίζα του.
Πράγματι, για κάθε $z_0\in\mathbb{C}$ είναι:

$$P(z)-P(z_0) = \alpha_\nu(z^\nu - z_0^\nu) + \alpha_{\nu-1}(z^{\nu-1}-z_0^{\nu-1}) + \dots + \alpha_1(z-z_0) \quad (1)$$

Επειδή, αν $k\in\mathbb{N}^*$ είναι

$$z^k - z_0^k = (z-z_0)(z^{k-1} + z_0 z^{k-2} + \dots + z_0^{k-1})$$

η (1) γράφεται

$$P(z)-P(z_0) = (z-z_0)\,Q(z) \quad (2)$$

όπου το $Q(z)$ είναι πολυώνυμο ν-1 βαθμού με μεγιστοβάθμιο όρο $\alpha_\nu z^{\nu-1}$.
Αν τώρα το z_0 είναι ρίζα του $P(z)$, τότε $P(z_0) = 0$ και η (2) γίνεται

$$P(z) = (z-z_0)\,Q(z) \quad (3)$$

Συνεπώς το $z-z_0$ είναι παράγοντας του $P(z)$.

Αντιστρόφως, αν το $z-z_0$ είναι παράγοντας του $P(z)$, δηλαδή υπάρχει πολυώνυμο $Q(z)$, τέτοιο ώστε να ισχύει η (3), τότε θα έχουμε $P(z_0) = 0$ και το z_0 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(z)$.

Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ **Το πολυώνυμο $P(z)$ βαθμού $\nu \geqslant 1$ έχει παράγοντα το $z-z_0$, αν και μόνο αν το z_0 είναι ρίζα του**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η εξίσωση $z^3+2z-i = 0$ έχει ρίζα τη $z_0 = i$, γιατί $i^3+2i-i = -i+2i-i = 0$.
Επειδή:

$$z^3+2z-i = (z^3+i) + 2(z-i) = (z^3-i^3) + 2(z-i) = (z-i)(z^2+iz+1)$$

η εξίσωση $z^3+2z-i = 0$ θα έχει ως ρίζες και τις ρίζες της εξίσωσης $z^2+iz+1 = 0$, που είναι οι $z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}i$ και $z_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}i$

Θεώρημα D' Alembert

4.26 Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$ βαθμού $\nu \geqslant 1$. Πόσες ρίζες μπορεί να έχει μια τέτοια εξίσωση; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό στηρίζεται στο ακόλουθο θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας που είναι γνωστό[1] ως **θεώρημα του D' Alembert.**

ΘΕΩΡΗΜΑ *D' Alembert* **Κάθε πολυώνυμο στο $\mathbb{C}$ βαθμού $\nu \geqslant 1$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα**

Έτσι, αν z_1 είναι μια ρίζα του πολυωνύμου

$$P(z) = a_\nu z^\nu + a_{\nu-1}z^{\nu-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

θα έχουμε

$$P(z) = (z-z_1)Q_1(z) \quad (4)$$

Το $Q_1(z)$ είναι πολυώνυμο ν-1 βαθμού. Επομένως, αν $\nu \geqslant 2$ θα έχει τουλάχιστο μια ρίζα, έστω z_2. Τότε θα είναι $Q_1(z) = (z-z_2)Q_2(z)$ και συνεπώς

$$P(z) = (z-z_1)(z-z_2)Q_2(z)$$

Δηλαδή η z_2 είναι ρίζα και του $P(z)$.

(1) Η απόδειξη είναι έξω από το σκοπό του βιβλίου

'Ετσι, αν $\nu \geqslant k$ υπάρχουν ρίζες $z_1, z_2, \ldots, z_k$ του $P(z)$, τέτοιες ώστε

$$P(z) = (z-z_1)(z-z_2) \ldots (z-z_k)\, Q_k(z)$$

όπου $Q_k(z)$ είναι πολυώνυμο ν-k βαθμού με μεγιστοβάθμιο όρο $a_\nu z^{\nu-k}$.
'Αρα για $k = \nu$ έχουμε

$$\boxed{P(z) = a_\nu(z-z_1)(z-z_2) \ldots (z-z_\nu)} \qquad (5)$$

Αν από τις ρίζες $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ υπάρχουν μ ίσες με r, τότε θα είναι

$$P(z) = (z-r)^\mu Q(z)$$

όπου $Q(z)$ είναι πολυώνυμο ν-μ βαθμού με $Q(r) \neq 0$.

Τότε θα λέμε ότι ο μ είναι **βαθμός πολλαπλότητας** της ρίζας r ή ότι η r είναι **μ-πλή** ρίζα του $P(z)$.

Αποδεικνύεται[1] ότι η γραφή του $P(z)$ ως γινόμενο του a_ν με παράγοντες της μορφής $(z-r)^\mu$ είναι μοναδική. Αυτό σημαίνει ότι το $P(z)$ δεν έχει άλλες ρίζες εκτός από τις παραπάνω. Δηλαδή έχει το πολύ ν διαφορετικές ρίζες και καθεμιά σε ορισμένο βαθμό πολλαπλότητας.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο**
$$P(z) = (\text{συν}\varphi + z\text{ημ}\varphi)^\nu - \text{συν}\nu\varphi - z\text{ημ}\nu\varphi$$
έχει παράγοντα το z^2+1

Είναι $z^2+1 = z^2-i^2 = (z-i)(z+i)$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $P(z)$ έχει ρίζες τις i και -i. Είναι:

$$\begin{aligned} P(i) &= (\text{συν}\varphi+i\text{ημ}\varphi)^\nu - (\text{συν}\nu\varphi+i\text{ημ}\nu\varphi) \\ &= (\text{συν}\nu\varphi+i\text{ημ}\nu\varphi) - (\text{συν}\nu\varphi+i\text{ημ}\nu\varphi) = 0 \end{aligned}$$

'Αρα το $P(z)$ έχει ρίζα το i, οπότε (βλέπε § 4.7, εφαρμ.) θα έχει ρίζα και τον συζυγή του i, δηλαδή το -i.

2. **Να λυθεί η εξίσωση** $\quad P(z) = z^3 + (2-i)z^2 + (5-2i)z - 5i = 0 \qquad (1)$

Η (1) έχει μια ρίζα τη $z_1 = i$, γιατί $P(i) = i^3+(2-i)i^2+(5-2i)i-5i = 0$

(1) Η απόδειξη είναι έξω από το σκοπό του βιβλίου

'Εστω az^2+bz+c το πολυώνυμο, τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} z^3+(2-i)z^2+(5-2i)z-5i &= (z-i)(az^2+bz+c) \qquad (2) \\ &= az^3+(b-ai)z^2+(c-bi)z-ci \end{aligned}$$

Επειδή το az^2+bz+c είναι μοναδικό, από τη (2) θα έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b-ai = 2-i \\ c-bi = 5-2i \\ -ci = -5i \end{cases}$$

από το οποίο βρίσκουμε $\quad a = 1, \quad b = 2, \quad c = 5$

'Ετσι θα είναι:

$$(1) \Leftrightarrow (z-i)(z^2+2z+5) = 0 \Leftrightarrow (z = i \;\; \text{ή} \;\; z^2+2z+5 = 0)$$

Η $z^2+2z+5 = 0$ έχει ρίζες τις $z_1 = -1+2i$ και $z_2 = -1-2i$, οι οποίες είναι και ρίζες της (1).

(Το z^2+2z+5 θα μπορούσε να βρεθεί και με το σχήμα Horner).

Ασκήσεις: 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ

Μιγαδική παράσταση ημιτονοειδών συναρτήσεων

4.27 Στη φυσική η μελέτη *εναλλασσόμενων* μεγεθών περιγράφεται με περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου. Ειδικότερα, όταν τα μεγέθη είναι *αρμονικά*, όπως π.χ. η *αρμονική ταλάντωση*, η *αρμονική τάση*, η *αρμονική ένταση* ρεύματος κτλ., τότε η μελέτη αυτών των μεγεθών περιγράφεται με **ημιτονοειδείς συναρτήσεις του χρόνου** της μορφής

$$f(t) = \alpha\, \text{ημ}(\omega t + \varphi) \qquad (1)$$

όπου α είναι το πλάτος, ω είναι η κυκλική συχνότητα και φ η αρχική φάση του αρμονικού μεγέθους.

Ας θεωρήσουμε το σύνολο S_ω των ημιτονοειδών συναρτήσεων της μορφής (1) με σταθερή κυκλική συχνότητα ω. Κάθε συνάρτηση $f \in S_\omega$ χαρακτηρίζεται από ένα ζεύγος αριθμών (α, φ) όπου

$$\alpha > 0 \quad \text{και} \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

Μπορούμε λοιπόν σε κάθε $f \in S_\omega$ με $f(t) = \alpha\,\eta\mu(\omega t + \varphi)$ να αντιστοιχίσουμε το μιγαδικό αριθμό z που έχει μέτρο α και όρισμα φ. Αντιστρόφως για κάθε μιγαδικό $z \neq 0$ μπορούμε να ορίσουμε ένα μοναδικό όρισμά του φ στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Άρα στο μιγαδικό z μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τη συνάρτηση $f(t) = |z|\,\eta\mu(\omega t + \varphi)$.

Από τα παραπάνω ορίζεται μια «1-1 και επί» απεικόνιση του S_ω στο $\mathbb{C}^*$ ή του S_ω στο μιγαδικό επίπεδο (με εξαίρεση το Ο).

Έτσι π.χ. η αρμονική τάση ρεύματος $U = U_0\,\eta\mu(\omega t + \varphi)$ παριστάνεται με το μιγαδικό $U_0\,(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)$, η αρμονική ένταση ρεύματος $I = I_0\,\eta\mu(\omega t)$ παριστάνεται με το μιγαδικό $I_0\,(\sigma\upsilon\nu 0 + i\eta\mu 0)$ κτλ.

Άθροισμα ημιτονοειδών συναρτήσεων

4.28 Η παραπάνω «1-1» αντιστοιχία των S_ω και $\mathbb{C}^*$ παρουσιάζει ενδιαφέρον στην περίπτωση που δύο ομοειδή αρμονικά μεγέθη της ίδιας κυκλικής συχνότητας ω επηρεάζουν ταυτόχρονα ένα φαινόμενο. Αν $f_1, f_2 \in S_\omega$ είναι οι συναρτήσεις οι οποίες περιγράφουν τα αρμονικά αυτά μεγέθη, τότε το αποτέλεσμα της σύγχρονης επίδρασής τους στο φαινόμενο, περιγράφεται με τη συνάρτηση $f_1 + f_2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

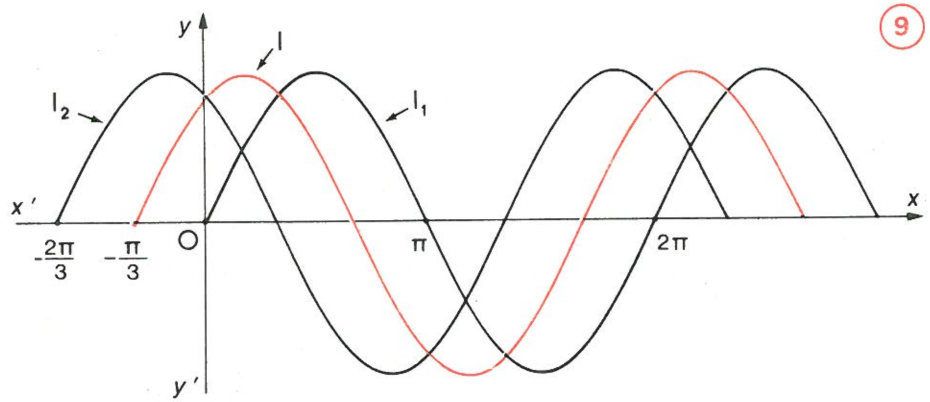
Θεωρούμε ένα αγωγό από τον οποίο διέρχονται δυο αρμονικώς μεταβαλλόμενα ρεύματα της ίδιας κυκλικής συχνότητας ω. Αν οι στιγμιαίες εντάσεις τους δίνονται από τους τύπους

$I_1 = 2\,\eta\mu\omega t$ και $I_2 = 2\,\eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$, τότε ολική ένταση I είναι:

$$I = I_1 + I_2 = 2\eta\mu\omega t + 2\eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(\eta\mu\omega t + \eta\mu\omega t\,\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} + \eta\mu\frac{2\pi}{3}\,\sigma\upsilon\nu\omega t\right)$$

$$= 2\left(\eta\mu\omega t - \frac{1}{2}\eta\mu\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\omega t\right) = 2\left(\frac{1}{2}\eta\mu\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\omega t\right)$$

$$= 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\,\eta\mu\omega t + \eta\mu\frac{\pi}{3}\,\sigma\upsilon\nu\omega t\right) = 2\,\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$



9

Ιδιότητες

4.29 Θα αποδείξουμε ότι το S_ω είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση, δηλαδή:

Αν f_1, f_2 είναι ημιτονοειδείς συναρτήσεις με κυκλική συχνότητα ω, τότε η $f_1 + f_2$ είναι επίσης ημιτονοειδής συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα.

Απόδειξη. Έστω ότι $f_1(t) = \alpha_1\,\eta\mu(\omega t + \varphi_1)$ και $f_2(t) = \alpha_2\,\eta\mu(\omega t + \varphi_2)$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχουν αριθμοί α και φ τέτοιοι ώστε

$$(f_1 + f_2)(t) = \alpha\,\eta\mu(\omega t + \varphi)$$

Έχουμε: $(f_1 + f_2)(t) = \alpha_1\,\eta\mu(\omega t + \varphi_1) + \alpha_2\,\eta\mu(\omega t + \varphi_2)$

$$= \alpha_1\,\eta\mu\omega t\,\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + \alpha_1\,\sigma\upsilon\nu\omega t\,\eta\mu\varphi_1 + \alpha_2\,\eta\mu\omega t\,\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + \alpha_2\,\sigma\upsilon\nu\omega t\,\eta\mu\varphi_2$$

$$= (\alpha_1\,\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + \alpha_2\,\sigma\upsilon\nu\varphi_2)\,\eta\mu\omega t + (\alpha_1\,\eta\mu\varphi_1 + \alpha_2\,\eta\mu\varphi_2)\,\sigma\upsilon\nu\omega t \qquad (1)$$

Θέτουμε: $\alpha_1\,\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + \alpha_2\,\sigma\upsilon\nu\varphi_2 = \alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi$ (2) και $\alpha_1\,\eta\mu\varphi_1 + \alpha_2\,\eta\mu\varphi_2 = \alpha\,\eta\mu\varphi$ (3)

Από τις (2) και (3) με ύψωση στο τετράγωνο και πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\alpha_1^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi_1 + \alpha_2^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi_2 + \alpha_1^2\eta\mu^2\varphi_1 + \alpha_2^2\eta\mu^2\varphi_2 + 2\alpha_1\alpha_2\,\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2) = \alpha^2(\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi)$$

Άρα:
$$\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\,\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad (4)$$

Επομένως οι (2) και (3) δίνουν

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\alpha_1\,\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + \alpha_2\,\sigma\upsilon\nu\varphi_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\,\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2)}} \qquad (5)$$

και

$$\eta\mu\varphi = \frac{\alpha_1\,\eta\mu\varphi_1 + \alpha_2\,\eta\mu\varphi_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\,\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2)}} \qquad (6)$$

Με τις (5) και (6) ορίζεται ένας μοναδικός $\varphi \in [0, 2\pi)$. Έτσι η (1) γράφεται

$$(f_1 + f_2)(t) = \alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi\,\eta\mu\omega t + \alpha\,\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\omega t = \alpha\,\eta\mu(\omega t + \varphi)$$

Επίσης θα αποδείξουμε ότι:

Αν στις συναρτήσεις f_1, $f_2 \in S_\omega$ αντιστοιχίζονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, τότε στη συνάρτηση $f_1 + f_2$ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός $z_1 + z_2$.

Απόδειξη. Στις συναρτήσεις f_1 και f_2 αντιστοιχίζονται οι μιγαδικοί

$$z_1 = \alpha_1 (\text{συν}\varphi_1 + i\text{ημ}\varphi_1) \quad \text{και} \quad z_2 = \alpha_2 (\text{συν}\varphi_2 + i\text{ημ}\varphi_2)$$

ενώ στο άθροισμα $(f_1 + f_2)$ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός $z = \alpha (\text{συν}\varphi + i\text{ημ}\varphi)$.

$$\begin{aligned} \text{Αλλά } z_1 + z_2 &= \alpha_1 (\text{συν}\varphi_1 + i\text{ημ}\varphi_1) + \alpha_2 (\text{συν}\varphi_2 + i\text{ημ}\varphi_2) \\ &= (\alpha_1 \text{συν}\varphi_1 + \alpha_2 \text{συν}\varphi_2) + i (\alpha_1 \text{ημ}\varphi_1 + \alpha_2 \text{ημ}\varphi_2) \qquad [\text{λόγω των (2), (3)}] \\ &= \alpha \text{συν}\varphi + i \alpha \text{ημ}\varphi \\ &= \alpha (\text{συν}\varphi + i\text{ημ}\varphi) = z \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω δυο αρμονικά μεγέθη που αντιστοιχίζονται στους μιγαδικούς z_1 και z_2. Αν $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ είναι οι αντίστοιχες διανυσματικές ακτίνες τους στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το συνιστάμενο αρμονικό μέγεθος αντιστοιχίζεται στη διανυσματική ακτίνα

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Ο λογισμός για τη μελέτη αρμονικών μεγεθών ανάγεται σε λογισμό με μιγαδικούς ή με διανύσματα του μιγαδικού επιπέδου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Αν στα άκρα πηνίου L χωρίς ωμική αντίσταση εφαρμοστεί αρμονική τάση U, τότε αποδεικνύεται ότι η *επαγωγική αντίσταση* Z_K παριστάνεται με το φανταστικό $L\omega i$

2. Αν ένα κύκλωμα περιέχει στη σειρά ωμική αντίσταση R και επαγωγική αντίσταση $L\omega i$ τότε η *εμπέδηση* του κυκλώματος παριστάνεται με το μιγαδικό $z = R + L\omega i$

3. Αν από ένα κύκλωμα που περιέχει πυκνωτή με χωρητικότητα C, περάσει αρμονικό ρεύμα, τότε αποδεικνύεται ότι η *χωρητική* αντίσταση παριστάνεται με το φανταστικό $-\dfrac{1}{c\omega}i$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογιστεί το άθροισμα τριών μονοφασικών αρμονικών ρευμάτων που έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα ω το ίδιο πλάτος εντάσεως I_0 και καθένα ως προς το προηγούμενο ή το επόμενό του παρουσιάζει διαφορά φάσεως $\dfrac{2\pi}{3}$.

Οι στιγμιαίες εντάσεις των ρευμάτων αυτών δίδονται από τους τύπους:

$$I_1 = I_0 \text{ημ}\omega t, \quad I_2 = I_0 \text{ημ}\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right), \quad I_3 = I_0 \text{ημ}\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Παριστάνουμε τα ρεύματα αυτά με τη μιγαδική τους μορφή και προσθέτουμε

$$\begin{aligned} I &= I_0 (\text{συν}0 + i\text{ημ}0) + I_0 \left(\text{συν}\frac{2\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{3}\right) + I_0 \left(\text{συν}\frac{4\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= I_0 \left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = I_0 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Με την προϋπόθεση ότι υπάρχει το $\mathbb{C}$ να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν λύση στο $\mathbb{C}$.

   (i) $3x^2-3x+1 = 0$, (ii) $4x^2-12x+13 = 0$, (iii) $x^2+2\sqrt{3}x+4 = 0$

2. Ομοίως για τις εξισώσεις

   (i) $x^3-x^2+x-1 = 0$, (ii) $x^4+7x^2+12 = 0$

3. Με την προϋπόθεση ότι υπάρχει το $\mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι:

   (i) Το σύνολο $I = \{\beta i : \beta \in \mathbb{R}\}$ είναι προσθετική ομάδα.

   (ii) Το σύνολο $I^* \cup \mathbb{R}^*$ είναι πολλαπλασιαστική ομάδα.

4. Αν $z_1 = 2-3i$ και $z_2 = 1-2i$, να υπολογίσετε τους μιγαδικούς

(i) z_1-z_2, (ii) $3z_1+4z_2$, (iii) z_1z_2, (iv) $(1-z_1)(5+z_2)$

5. Αν $z = (5+4i)(\lambda-\mu) + (4+5i)(5\lambda+6\mu)$, να υπολογίσετε τους $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι

(i) $z = 0$, (ii) $z = 7+20i$

6. Να υπολογίσετε τα $x,y \in \mathbb{R}$ ώστε:

(i) $(x+yi)(5-2i) = 7+3i$, (ii) $(x-3yi)^2 = 2xi$

7. Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta i$ τις παραστάσεις

(i) $(-3+2i)^2 + (5-i)(3+2i)$, (ii) $(2-i)^2(1+i)$, (iii) $(3-4i)^2 + (3+4i)^2$

(iv) $\dfrac{2+i}{1-i}$ (v) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + \dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$

8. Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta i$ τις παραστάσεις

(i) $(2-3i)^2 - \dfrac{5+2i}{i} + (2+i)(3-5i) + 12i(1+i)$, (ii) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$

9. Να υπολογιστούν οι x, y έτσι ώστε

$$\frac{x}{1-2i} + \frac{y}{2-3i} = \frac{6+7i}{1-8i}$$

10. Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$(1+i)z + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}i = 2i-2-z$$

11. Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ το σύστημα

$$\begin{cases} (3+2i)z - 2i\omega = -8+7i \\ (5-2i)z + (2-i)\omega = 7+12i \end{cases}$$

12. Για ποιες τιμές των πραγματικών α και β είναι συζυγείς οι μιγαδικοί $z_1 = \alpha+\beta^2-3i$ και $z_2 = 2-\alpha\beta^2 i$

13. Είναι γνωστό ότι:

(i) Το άθροισμα δυο συζυγών μιγαδικών είναι πραγματικός αριθμός.
(ii) Το γινόμενο δυο συζυγών μιγαδικών είναι πραγματικός αριθμός.

Να εξετάσετε αν αληθεύουν τα αντίστροφα των προτάσεων αυτών.

14. Να αποδείξετε ότι: αν το άθροισμα και το γινόμενο δυο μη πραγματικών μιγαδικών είναι πραγματικός αριθμός, τότε οι μιγαδικοί είναι συζυγείς.

15. Να βρείτε τους μιγαδικούς που επαληθεύουν την εξίσωση (i) $\bar{z} = z^2$, (ii) $\bar{z} = 2-z$

16. Αν z_1 και z_2 είναι δυο οποιοιδήποτε μιγαδικοί, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$ είναι πραγματικός αριθμός.

17. Αν $z \in \mathbb{C}$, να δείξετε ότι οι αριθμοί $z^2 + \bar{z}^2$ και $\dfrac{z+1}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}+1}{z}$ είναι πραγματικοί.

18. Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες των μιγαδικών:

(i) $-8-6i$, (ii) $(-1+i)^3 - 2i^3$

19. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ τις εξισώσεις

(i) $z^2+2iz-1 = 0$, (ii) $z^2-2iz-1+2i = 0$, (iii) $z^2-(4+5i)z+7i-1 = 0$

20. Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις

(i) $2iz^2-3z-1-3i = 0$, (ii) $z^2-(5-4\sqrt{3}i)z+9 = 0$

21. Αν $x,y \in \mathbb{R}$, να λύσετε στο $\mathbb{C}$ το σύστημα

$$\begin{cases} ix^2-(1+i)y = -4 \\ (1+2i)x+iy = -2 \end{cases}$$

22. Να παρασταθούν στο μιγαδικό επίπεδο οι αριθμοί

$3+2i$, -1, $-1+3i$, $-2-3i$, $2+3i$

23. Να υπολογίσετε το μέτρο των μιγαδικών

$1+i$, $-1-i$, $2(1+\sqrt{3}i)$, $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i}$, $\dfrac{2}{1-i}$, $\dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$

24. Αν $z_1 = (x-2) + (y+1)i$ $(x,y \in \mathbb{R})$ και $z_2 = 1+2i$, να βρεθεί στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x,y) που είναι τέτοια ώστε:

(i) $|z_1| = 2$, (ii) $z_1 z_2 \in I$

25. Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού z όταν

(i) $|z+16| = 4|z+1|$, (ii) $|2z-1| = |z-2|$

26. Αν $z_1 = \alpha_1+\beta_1 i$, $z_2 = \alpha_2+\beta_2 i$ $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \in \mathbb{R})$ και $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_2-z_1|^2$, να δείξετε ότι $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0$.

27. Αν $z = \alpha+\beta i$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $|z|\sqrt{2} \geqslant |\alpha|+|\beta|$

28. Έστω U το σύνολο των μιγαδικών με μέτρο 1.

(i) Να συγκρίνετε τον αντίστροφο και τον συζυγή ενός στοιχείου του U.

(ii) Αν z_1 και z_2 είναι στοιχεία του U τέτοια ώστε $z_1 z_2 \neq -1$, να αποδείξετε ότι ο $z^* = \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ είναι πραγματικός και ο $z' = \dfrac{z_1-z_2}{1+z_1z_2}$ είναι φανταστικός αριθμός.

29. Να βρείτε τα πρωτεύοντα ορίσματα των μιγαδικών της άσκησης 23.

30. Να βρείτε τις πολικές συντεταγμένες των μιγαδικών 1, -3, 3i, -5i, $-1+i\sqrt{3}$.

31. Δυο μιγαδικοί z_1 και z_2 έχουν αντίστοιχα μέτρα $|z_1| = 2\mu-1$, $|z_2| = 5-\mu$ και ορίσματα $\varphi_1 = \dfrac{(5\lambda+1)\pi}{6}$, $\varphi_2 = \dfrac{(2\lambda+5)\pi}{3}$. Να βρείτε τις τιμές των λ και μ για τις οποίες είναι $z_1 = z_2$

32. Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους αριθμούς

$$z_1 = -\sqrt{2}(1+i), \quad z_2 = -1+i\sqrt{3}, \quad z = \frac{z_1}{z_2}$$

33. Να γραφούν σε τριγωνομετρική μορφή οι αριθμοί

$$z_1 = 3(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7} - i\eta\mu\frac{\pi}{7}), \quad z_2 = -2(\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8} + i\eta\mu\frac{3\pi}{8}), \quad z_3 = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} + i\eta\mu\frac{\pi}{9}$$

34. Να γίνουν οι πράξεις

(i) $(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{5} - i\eta\mu\dfrac{\pi}{5})(\sqrt{3}+i)$, (ii) $(-1-\sqrt{3}i)^5 \cdot (1-i)$

35. Αν z και z΄ είναι δυο μιγαδικοί με $|z| = |z'| = 1$, $z_1 = z+z'+\alpha zz'+1$ και $z_2 = z+z'+zz'+\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), να αποδείξετε ότι: (i) $z_1 = zz'\bar{z}_2$, (ii) $|z_1| = |z_2|$

36. Να γραφεί στη μορφή α+βi ο μιγαδικός

$$z = \frac{2\,(\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{9} + i\eta\mu\frac{5\pi}{9})}{\sqrt{3}\,(\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{9} + i\eta\mu\frac{2\pi}{9})}$$

37. Να γραφούν σε τριγωνομετρική μορφή οι αριθμοί: (i) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$, (ii) $\dfrac{256}{(\sqrt{3}+i)^9}$

38. (i) Αν $z = 1-i$, να υπολογίσετε ένα όρισμα των μιγαδικών $z, z^2, z^3, \ldots, z^8$

(ii) Αν $m \in \mathbb{N}$ να υπολογίσετε ένα όρισμα του z^{8m}

(iii) Να υπολογίσετε ένα όρισμα του z^{1972}.

39. (i) Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $z^2-(3+4i)z + (-1+5i) = 0$.

(ii) Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης και Α, Β οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο. Να προσδιορίσετε σημείο Γ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισόπλευρό.

40. Έστω α ένας πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $-\pi < \alpha \leqslant \pi$.

(i) Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $z^2-4(\eta\mu\alpha)z+4 = 0$

(ii) Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να υπολογίσετε τις παραστάσεις $S = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$ και $S' = z_1^4 + z_2^4$

(iii) Για ποιές τιμές του α είναι $S' = 0$;

41. Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή το μιγαδικό $z = \dfrac{(1+i)^{2\nu+1}}{(1-i)^{2\nu-1}}$

42. Για ποιές τιμές του ν αληθεύει η ισότητα $(1+i)^\nu = (1-i)^\nu$

43. Αν συνα + συνβ + συνγ = 0 και ημα + ημβ + ημγ = 0 να αποδειχτεί ότι:

(i) συν3α + συν3β + συν3γ = 3συν (α+β+γ)

(ii) ημ3α + ημ3β + ημ3γ = 3ημ(α+β+γ)

44. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ είναι

$$\left(\frac{1+\eta\mu\varphi+i\sigma\upsilon\nu\varphi}{1+\eta\mu\varphi-i\sigma\upsilon\nu\varphi}\right)^\nu = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\nu\pi}{2} - \nu\varphi\right) + i\eta\mu\left(\frac{\nu\pi}{2} - \nu\varphi\right)$$

45. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ τις εξισώσεις

(i) $z^5-1 = 0$, (ii) $z^6-1 = 0$, (iii) $8z^3 = 1$, (iv) $1+z+z^2+z^3+z^4 = 0$

46. Αν $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ είναι οι κυβικές ρίζες της μονάδας, να αποδείξετε ότι:

(i) $\zeta_2^2 = \zeta_1$, (ii) $\zeta_1\zeta_2 = 1$, (iii) $(\zeta_0+2\zeta_1+3\zeta_2)(\zeta_0+2\zeta_2+3\zeta_1) = 3$

47. Αν $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ είναι οι κυβικές ρίζες της μονάδας, να αποδείξετε ότι:

(i) Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει $\zeta_0+\zeta_1^{3k+1}+\zeta_1^{3k+2} = \zeta_0+\zeta_2^{3k+1}+\zeta_2^{3k+2} = 0$

(ii) $(5\zeta_0+7\zeta_1+5\zeta_2)^{3} = 8$

48. Να αποδείξετε ότι:

(i) Ο συζυγής μιας νιοστής ρίζας του z είναι νιοστή ρίζα του $\bar{z}$

(ii) Οι μη πραγματικές νιοστές ρίζες της μονάδας είναι ανά δύο συζυγείς.

(iii) Η συζυγής τής νιοστής ρίζας ζ_λ της μονάδας $(0 < \lambda < \nu)$ είναι η $\xi_{\nu-\lambda}$.

49. Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $z^3 = -64$, (ii) $z^5+1 = 0$, (iii) $81z^4+1 = 0$, (iv) $z^3-1 = i$

50. (i) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή το μιγαδικό $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(ii) Να προσδιορίσετε τις τετραγωνικές ρίζες και τη δέκατη δύναμη του z

51. Να λυθούν οι εξισώσεις

(i) $z^3 = -4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$, (ii) $z^5-1-i\sqrt{3} = 0$

52. Να λύσετε την εξίσωση $z^{10}-z^5-992 = 0$

53. (i) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τις ρίζες της εξίσωσης $z^4 = 8\,(1-i\sqrt{3})$

(ii) Να επαληθεύσετε ότι ο μιγαδικός $a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ είναι μια τέταρτη ρίζα του $8(1-i\sqrt{3})$.

54. Έστω η εξίσωση στο $\mathbb{C}$

$$z^2+\lambda z+1 = 0 \qquad (1)$$

όπου z είναι ο άγνωστος και λ μια παράμετρος.

(i) Αν ο λ είναι πραγματικός:

α) Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του λ τις ρίζες της εξίσωσης (1).

β) Να λύσετε την (1) για $\lambda = 1$. Να προσδιορίσετε το μέτρο και ένα όρισμα και έπειτα τη νιοστή δύναμη κάθε μιας από τις ρίζες που θα βρείτε.

(ii) Αν ο λ δεν είναι πραγματικός:

α) Να αποδείξετε ότι η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της (1) είναι φανταστικοί αριθμοί αν και μόνο αν ο λ είναι φανταστικός αριθμός.

55. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(z) = z^{4\nu_1} + z^{4\nu_2+1} + z^{4\nu_3+2} + z^{4\nu_4+3}$ ($\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ φυσικοί) έχει παράγοντα το z^3+z^2+z+1

56. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$P(z) = z^{\nu}ημφ-ρ^{\nu-1}zημνφ+ρ^{\nu}ημ\,[(\nu-1)φ]$$

έχει παράγοντα το z^2-2οzσυνφ+$ρ^2$

57. Έστω $1, z_1, z_2, \ldots, z_{\nu-1}$ οι ρίζες της εξίσωσης $z^{\nu} = 1$. Να αποδείξετε ότι

$$(1-z_1)\,(1-z_2)\,\ldots\,(1-z_{\nu-1}) = \nu$$

58. Για ποιες τιμές των p και q το διώνυμο z^4+1 έχει παράγοντα το z^2+pz+q

59. Να λυθεί η εξίσωση $4z^3+8iz^2+3z+6i = 0$

60. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $z^3-(3+5i)z^2-(5-16i)z+7-11i = 0$, αν είναι γνωστό ότι η μια ρίζα είναι πραγματικός αριθμός.

61. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $z^3-4z^2+(4+i)z-3(1+i) = 0$, αν είναι γνωστό ότι η μια ρίζα είναι φανταστικός αριθμός.

62. Αφού υπολογίσετε τις δυνάμεις $(2+i)^3$ και $(1-i)^3$, να λύσετε την εξίσωση $z^6-9iz^3+18-26i = 0$.

63. Δίνεται το πολυώνυμο $P(z) = z^3+2(1+i)\,z^2+az+b$, με $a,b\in\mathbb{C}$. Να προσδιορίσετε τα a και b έτσι ώστε $P(3i) = 0$ και $P(-1) = 110-30i$. Κατόπιν να λύσετε την εξίσωση $P(z) = 0$.

5 ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες που είναι απαραίτητες για την κατανόηση και επίλυση προβλημάτων απαρίθμησης όπως αυτά που πολύ συχνά θέτει η καθημερινή πρακτική. Γι' αυτό, ιδιαίτερα εδώ, η θεωρητική ανάπτυξη κάθε ενότητας είναι συνδυασμένη με ένα αντίστοιχο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Αρχικά προτάσσεται η έννοια του γενικευμένου καρτεσιανού γινομένου και, ως πρώτο πρόβλημα απαρίθμησης, τίθεται η εύρεση του πληθικού του αριθμού. Στη συνέχεια, οι διατάξεις μ στοιχείων, που λαμβάνονται από ένα πεπερασμένο σύνολο Ε με ν στοιχεία, ορίζονται απλά ως διατεταγμένες μ-άδες. Πρόκειται ουσιαστικά για απεικονίσεις του συνόλου {1, 2, ..., μ} στο Ε. Με την εξειδίκευση των απεικονίσεων σε «1-1» γίνεται και η διάκριση των απλών διατάξεων από τις διατάξεις με επανάληψη.

Τέλος εισάγεται η έννοια των συνδυασμών και παρουσιάζονται οι βασικές τους ιδιότητες. Το τελευταίο αυτό μέρος περιέχει τον τύπο του διωνύμου, το τρίγωνο Pascal και άλλες ενδιαφέρουσες εφαρμογές.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Γενικά

5.1 Πολλές φορές παρουσιάζονται στην καθημερινή ζωή προβλήματα που αναφέρονται στην απαρίθμηση των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου. Τέτοια προβλήματα είναι π.χ. τα εξής:

- Στις εκλογές για την ανάδειξη του προεδρείου μιας τάξης ισοψήφισαν στην πρώτη θέση 6 μαθητές. Έτσι το προεδρείο (πρόεδρος, γραμματέας, ταμίας) θα αναδειχθεί με κλήρωση. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα της κλήρωσης;
- Πόσες το πολύ διαφορετικές στήλες μπορούμε να συμπληρώσουμε σ' ένα παιχνίδι ΠΡΟ-ΠΟ με 13 αγώνες;
- Οι πινακίδες των αυτοκινήτων περιέχουν 2 γράμματα που ακολουθούνται από ένα τετραψήφιο αριθμό. Πόσες διαφορετικές πινακίδες μπορούμε να κατασκευάσουμε;
- Στα ορκωτά δικαστήρια επιλέγονται 12 ένορκοι από ένα κατάλογο 50 πολιτών. Πόσες διαφορετικές ομάδες ενόρκων είναι δυνατό να σχηματιστούν;

Στα προβλήματα αυτά είναι δύσκολο να βρούμε το ζητούμενο με μια απ' ευθείας απαρίθμηση. Η επίλυσή τους επιτυγχάνεται με τη χρησιμοποίηση μεθόδων που θα αναπτύξουμε στη συνέχεια.

Γενίκευση της έννοιας του καρτεσιανού γινομένου

5.2 Έστω δύο μη κενά σύνολα Α και Β. Όπως είναι γνωστό ονομάζουμε καρτεσιανό γινόμενο του Α με το Β το σύνολο των ζευγών (α, β) όπου $\alpha \in A$ και $\beta \in B$. Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε $A \times B$. Είναι δηλαδή

$$A \times B = \{(\alpha, \beta): \alpha \in A \text{ και } \beta \in B\}$$

Ο ορισμός του καρτεσιανού γινομένου γενικεύεται και για τρία ή περισσότερα σύνολα.

Συγκεκριμένα έχουμε τον επόμενο ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ *Καρτεσιανό γινόμενο* **$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\nu$ των μη κενών συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ ονομάζεται το σύνολο των διατεταγμένων ν-άδων $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ με $\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2, \ldots, \alpha_\nu \in A_\nu$. Δηλαδή**

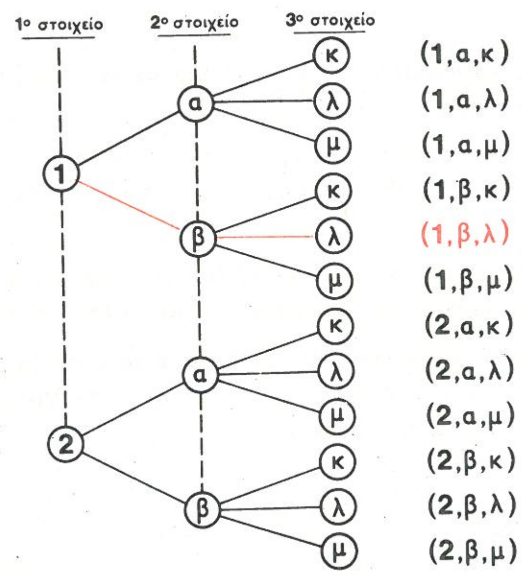
$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\nu = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu): \alpha_i \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots, \nu\}$$

Σε κάθε διατεταγμένη ν-άδα το στοιχείο α_i θα ονομάζεται **i-συνιστώσα** ή **i-συντεταγμένη** της ν-άδας.

Αν $A_1 = A_2 = \ldots = A_\nu = A$, τότε το γινόμενο $A \times A \times \ldots \times A$ το συμβολίζουμε A^ν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times A_2 \times A_3$, όπου $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{\alpha, \beta\}$ και $A_3 = \{\kappa, \lambda, \mu\}$. Τις διατεταγμένες τριάδες $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ με $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_2 \in A_2$, $\alpha_3 \in A_3$ τις βρίσκουμε με το επόμενο σχήμα, που λέγεται **δεντροδιάγραμμα**.



Ώστε: $A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(1, \alpha, \kappa), (1, \alpha, \lambda), (1, \alpha, \mu), (1, \beta, \kappa), (1, \beta, \lambda), (1, \beta, \mu), (2, \alpha, \kappa), (2, \alpha, \lambda), (2, \alpha, \mu), (2, \beta, \kappa), (2, \beta, \lambda), (2, \beta, \mu)\}$

Πληθικός αριθμός καρτεσιανού γινομένου

5.3 Είναι γνωστό ότι ένα μη κενό σύνολο Ε είναι πεπερασμένο, όταν είναι ισοδύναμο με ένα σύνολο της μορφής $\{1, 2, \ldots, \nu\}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Τότε ο ν δηλώνει το πλήθος των στοιχείων του πεπερασμένου συνόλου Ε και λέγεται **πληθικός αριθμός** του Ε. Γράφουμε συμβολικά **$N(E) = \nu$.**

Θα αποδείξουμε τώρα την επόμενη πρόταση.

ΘΕΩΡΗΜΑ **Ο πληθικός αριθμός του καρτεσιανού γινομένου ν πεπερασμένων συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ ισούται με το γινόμενο των πληθικών αριθμών των παραγόντων του, δηλαδή**

$$N(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\nu) = N(A_1) \cdot N(A_2) \cdot \ldots \cdot N(A_\nu)$$

Απόδειξη. Η πρόταση ισχύει για $\nu = 2$. Πράγματι, έστω το καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times A_2$ με $N(A_1) = \kappa_1$ και $N(A_2) = \kappa_2$. Τότε από ένα συγκεκριμένο στοιχείο α του A_1 προκύπτουν κ_2 ζεύγη της μορφής (α, α_2) με $\alpha_2 \in A_2$. Άρα από τα κ_1 στοιχεία του A_1 προκύπτουν $\kappa_1 \kappa_2$ ζεύγη της μορφής (α_1, α_2) με $\alpha_1 \in A_1$ και $\alpha_2 \in A_2$. Επομένως $N(A_1 \times A_2) = N(A_1) \cdot N(A_2)$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η πρόταση ισχύει για το φυσικό ν και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον ν+1. Πράγματι, έστω $N(A_i) = \kappa_i$, $i = 1, 2, \ldots, \nu, \nu+1$. Αφού η πρόταση ισχύει για το φυσικό ν, το σύνολο $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\nu$ έχει $\kappa_1 \kappa_2 \ldots \kappa_\nu$ στοιχεία της μορφής $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ με $\alpha_i \in A_i$. Αλλά από καθένα από τα στοιχεία αυτά προκύπτουν $\kappa_{\nu+1}$ στοιχεία της μορφής $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ με $\alpha_{\nu+1} \in A_{\nu+1}$. Επομένως από τα $\kappa_1 \kappa_2 \ldots \kappa_\nu$ στοιχεία του $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\nu$ προκύπτουν $(\kappa_1 \kappa_2 \ldots \kappa_\nu)\kappa_{\nu+1} = \kappa_1 \kappa_2 \ldots \kappa_\nu \kappa_{\nu+1}$ στοιχεία της μορφής $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu+1})$ με $\alpha_i \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots, \nu+1$.

Άρα η πρόταση ισχύει για κάθε $\nu \geqslant 2$.

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι το

ΠΟΡΙΣΜΑ **Αν $N(A) = \kappa$, τότε $N(A^\nu) = \kappa^\nu$**

Μιά βασική αρχή απαρίθμησης

5.4 Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι, αν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ είναι πεπερασμένα σύνολα, το καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\nu$ αποτελείται από $\kappa_1 \kappa_2 \ldots \kappa_\nu$ διατεταγμένες ν-αδες, όπου κ_i είναι ο πληθικός αριθμός του συνόλου A_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

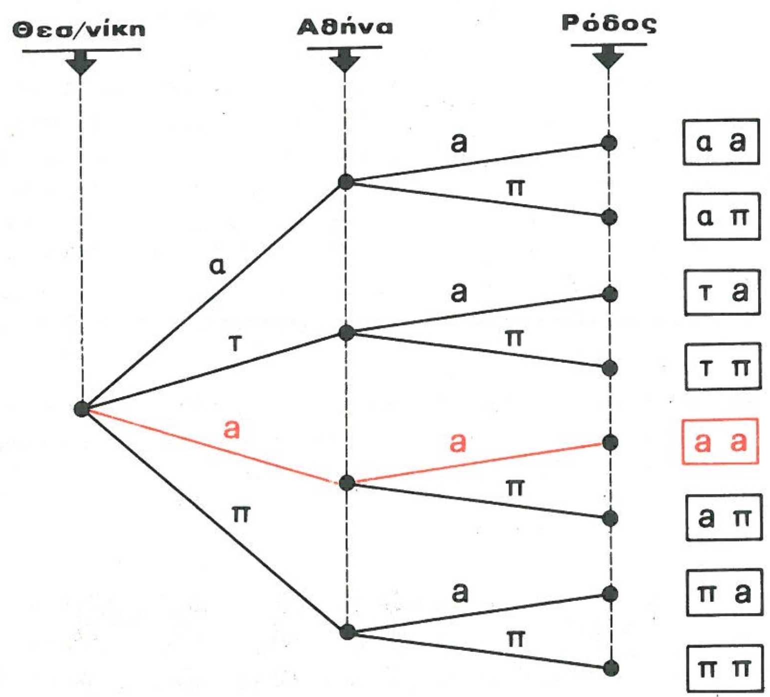
Για να σχηματίσουμε μια τέτοια ν-άδα επιλέγουμε μία-μία τις συνιστώσες της και, όπως φαίνεται στο δεντροδιάγραμμα της παρ. 5.2, για την επιλογή της i-συνιστώσας υπάρχουν κ_i δυνατότητες (όσα είναι τα στοιχεία του A_i). Επομένως μπορούμε να διατυπώσουμε την παρακάτω *αρχή*:

Αν υπάρχουν κ_1, κ_2, ..., κ_ν δυνατότητες για την επιλογή της 1ης, 2ης, ..., νης συνιστώσας αντιστοίχως μιας διατεταγμένης ν-άδας, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε $\kappa_1\kappa_2 ... \kappa_\nu$ διαφορετικές διατεταγμένες ν-άδες.

Γενικότερα, αν μια ορισμένη διαδικασία αναλύεται σε ν φάσεις που διεκπεραιώνονται με κ_1, κ_2, ..., κ_ν τρόπους αντιστοίχως, τότε η διαδικασία μπορεί να ολοκληρωθεί με $\kappa_1\kappa_2 ... \kappa_\nu$ τρόπους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το ταξίδι Θεσσαλονίκη-Ρόδος μπορεί να γίνει σε δύο φάσεις· Θεσσαλονίκη-Αθήνα και Αθήνα-Ρόδος. Η πρώτη φάση μπορεί να γίνει με 4 τρόπους: αυτοκίνητο (α), τραίνο (τ), αεροπλάνο (a), πλοίο (π) και η δεύτερη με 2 τρόπους: a, π. Επομένως το ταξίδι Θεσσαλονίκη-Ρόδος μπορεί να γίνει με $4 \cdot 2 = 8$ τρόπους. Τους τρόπους αυτούς τους βρίσκουμε με το επόμενο δεντροδιάγραμμα.



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Σε μια επιχείρηση που απασχολεί 6 εργοδηγούς, 18 ειδικευμένους εργάτες και 30 ανειδίκευτους εργάτες πρόκειται να επιλεγεί μια τριμελής αντιπροσωπεία (ένας εργοδηγός, ένας ειδικευμένος και ένας ανειδίκευτος εργάτης). Με πόσους τρόπους μπορεί να συγκροτηθεί η αντιπροσωπεία;**

Έστω Α, Β, Γ τα σύνολα των εργοδηγών, των ειδικευμένων εργατών και των ανειδίκευτων εργατών αντιστοίχως. Τότε κάθε τριμελής αντιπροσωπεία είναι ένα στοιχείο του συνόλου $A\times B\times \Gamma$, οπότε οι δυνατότητες επιλογής είναι τόσες, όσος είναι ο πληθικός αριθμός του $A\times B\times \Gamma$. Αλλά $N(A\times B\times \Gamma) = 6 \cdot 18 \cdot 30 = 3240$.

Επομένως η αντιπροσωπεία μπορεί να συγκροτηθεί κατά 3240 τρόπους.

2. **Πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5;**

Το ψηφίο των χιλιάδων μπορεί να επιλεγεί κατά 5 τρόπους (όσα είναι τα ψηφία εκτός από το 0), ενώ καθένα από τα ψηφία των εκατοντάδων, των δεκάδων και των μονάδων μπορεί να επιλεγεί κατά 6 τρόπους. Επομένως (§ 5.4), μπορούμε να σχηματίσουμε $5\cdot 6\cdot 6\cdot 6 = 1080$ αριθμούς.

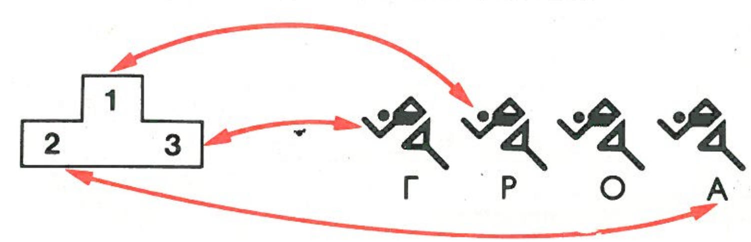
Ασκήσεις: 1, 2, 3, 4.

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

Η έννοια της διάταξης

5.5 Στους Πανευρωπαϊκούς αγώνες κλειστού στίβου προκρίθηκαν για τον τελικό του δρόμου των 400 m τέσσερις αθλητές· ένας Γερμανός (Γ), ένας Ρώσος (Ρ), ένας Ολλανδός (Ο) και ένας Άγγλος (Α). Έστω $E = \{\Gamma, P, O, A\}$ το σύνολο των αθλητών αυτών.

Η τριάδα των νικητών του τελικού που θα ανέβουν στα βάθρα 1, 2, 3, αντιστοιχεί σε μια «1-1» απεικόνιση του $\{1, 2, 3\}$ στο σύνολο Ε και αντιστρόφως μια τέτοια απεικόνιση αντιστοιχεί σε μια τριάδα νικητών. 1



Π.χ. η απεικόνιση f με f(1) = Ρ, f(2) = Α και f(3) = Γ (σχ. 1) αντιστοιχεί στη διατεταγμένη τριάδα (Ρ, Α, Γ) με συνιστώσες **διαφορετικά** στοιχεία του Ε, η οποία καθορίζει τους τρεις πρώτους νικητές (1ος ο Ρώσος, 2ος ο 'Αγγλος, 3ος ο Γερμανός). Κάθε τέτοια διατεταγμένη τριάδα λέγεται και **διάταξη** τριών στοιχείων του Ε. 'Αλλες διατάξεις τριών στοιχείων του Ε είναι π.χ. οι (Ο, Ρ, Α), (Γ, Ο, Α), (Α, Γ, Ο) κτλ.

Γενικά, δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ **'Εστω Ε ένα σύνολο με ν στοιχεία. Κάθε διατεταγμένη μ-αδα ($\mu \leqslant \nu$) της οποίας οι συνιστώσες είναι διαφορετικά στοιχεία του Ε ονομάζεται *διάταξη* μ στοιχείων του Ε.**

Μια τέτοια διάταξη αντιστοιχεί σε μια «1-1» απεικόνιση του {1, 2, ..., μ} στο Ε και αντιστρόφως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τον ορισμό της διάταξης μ στοιχείων του Ε προκύπτει ότι δυο διατάξεις είναι διαφορετικές, όταν υπάρχει έστω και ένα στοιχείο της μιας το οποίο ή δεν περιέχεται στην άλλη ή όταν περιέχεται είναι σε διαφορετική θέση.

Πλήθος διατάξεων μ στοιχείων του Ε

5.6 'Εστω ένα σύνολο Ε με ν στοιχεία. 'Οταν αναφερόμαστε στο σύνολο των διατάξεων μ στοιχείων από τα ν του Ε, χρησιμοποιούμε την έκφραση *«διατάξεις των ν ανά μ»*. Το πλήθος των διατάξεων των ν ανά μ το συμβολίζουμε[1] A^{ν}_{μ} και το υπολογίζουμε ως εξής:

Για την επιλογή της 1ης συνιστώσας υπάρχουν ν δυνατότητες, όσα είναι τα στοιχεία του Ε. Για την επιλογή της 2ης συνιστώσας, αφού έχει ήδη επιλεγεί η 1η, υπάρχουν **ν-1** δυνατότητες... Για την επιλογή της μ-συνιστώσας, αφού έχουν επιλεγεί οι μ-1 προηγούμενες, υπάρχουν ν-(μ-1) = **ν-μ+1** δυνατότητες. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή της απαρίθμησης (§ 5.4), θα έχουμε την ισότητα

$$\boxed{A^{\nu}_{\mu} = \nu(\nu-1)(\nu-2)\dots(\nu-\mu+1)} \qquad (1)$$

(1) Από το αρχικό της λέξης «arrangement».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ας υποθέσουμε ότι στις εκλογές για την ανάδειξη του προεδρείου μιας τάξης ισοψήφισαν στην πρώτη θέση οι μαθητές Α, Β, Γ, Δ, Ε και ότι το προεδρείο (πρόεδρος, γραμματέας, ταμίας) θα αναδειχτεί με κλήρωση. Καθένα από τα δυνατά αποτελέσματα της κλήρωσης είναι μια διάταξη των 5 (μαθητών) ανά 3. Επομένως τα δυνατά αποτελέσματα της κλήρωσης είναι $A^5_3 = 5\,(5-1)\cdot(5-2) = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$.
2. Εστω ότι σ' ένα λογοτεχνικό διαγωνισμό πήραν μέρος 80 λογοτέχνες. Τότε η τριάδα των λογοτεχνών που θα πάρουν τα τρία πρώτα βραβεία είναι μια από τις διατάξεις των 80 ανά 3. Επομένως το πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων απονομής των τριών πρώτων βραβείων είναι $80\cdot(80-1)(80-2) = 492960$.

Μεταθέσεις

5.7 'Εστω ένα σύνολο Ε με ν στοιχεία. Μια διάταξη **όλων** (των ν) των στοιχείων του Ε τη λέμε ειδικότερα **μετάθεση**. Επομένως, αν συμβολίσουμε[1] P_ν το πλήθος των μεταθέσεων των ν στοιχείων του Ε, θα είναι

$$P_\nu = A^{\nu}_{\nu} = \nu(\nu-1)(\nu-2)\dots(\nu-\nu+1) \quad \text{ή}$$

$$\boxed{P_\nu = 1\cdot 2\dots\nu} \qquad (2)$$

Το γινόμενο $1\cdot 2 \cdots \nu$ το συμβολίζουμε συνήθως **ν!** (διαβάζουμε ν παραγοντικό), οπότε η (2) γράφεται απλούστερα

$$\boxed{P_\nu = \nu!} \qquad (2')$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

'Εστω ότι μια κάλπη περιέχει 5 σφαίρες που είναι αριθμημένες από το 1 μέχρι το 5. Παίρνουμε μία-μία τις 5 σφαιρες και σχηματίζουμε πενταψήφιους αριθμούς (η πρώτη σφαίρα καθορίζει το ψηφίο των δεκάδων χιλιάδων, η δεύτερη το ψηφίο των χιλιάδων, κτλ.). Το πλήθος όλων των αριθμών που μπορούμε να σχηματίσουμε με τον τρόπο αυτό, είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων των 5 σφαιρών. Δηλαδή μπορούμε να σχηματίσουμε $P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$ αριθμούς.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η ισότητα (1) της § 5.6, που δίνει το πλήθος των διατάξεων των ν ανά μ, γράφεται και ως εξής:

$$A^{\nu}_{\mu} = \nu(\nu-1)\dots(\nu-\mu+1) = \frac{[\nu(\nu-1)\dots(\nu-\mu+1)]\,[(\nu-\mu)(\nu-\mu-1)\dots 2\cdot 1]}{1\cdot 2\dots(\nu-\mu)}$$

$$= \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!}. \text{ Δηλαδή}$$

(1) Ρ είναι το αρχικό της λέξης «permutation».

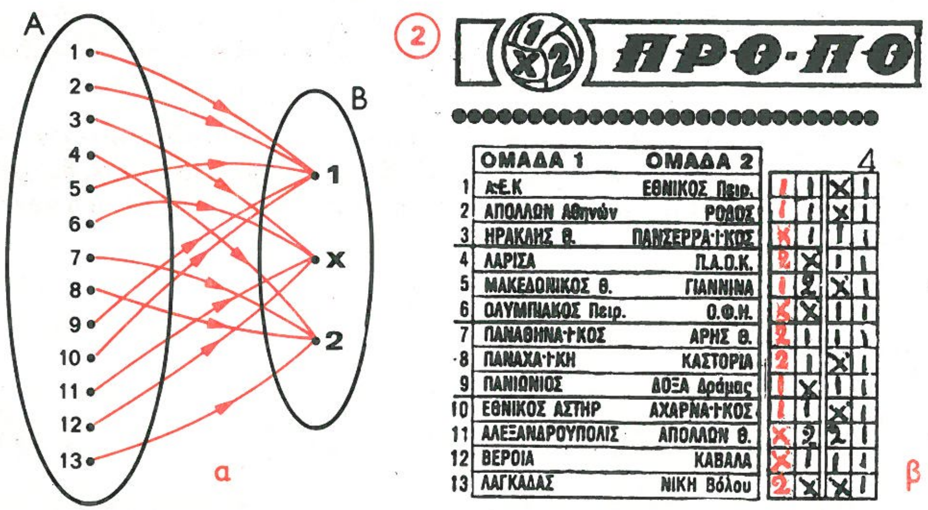
$$\boxed{A_\mu^\nu = \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!}}$$

Έτσι είναι π.χ. $A_3^5 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

Διατάξεις με επανάληψη

5.8 Είναι γνωστό ότι κάθε δελτίο ΠΡΟ-ΠΟ περιλαμβάνει 13 αγώνες. Για να συμπληρώσουμε λοιπόν μια στήλη, πρέπει να αντιστοιχίσουμε σε καθένα από τους 13 αγώνες (σχ. 2α) ένα από τα σύμβολα 1, X, 2. Με άλλα λόγια, κάθε στήλη του ΠΡΟ-ΠΟ ορίζεται από μια απεικόνιση του συνόλου

$$A = \{1, 2, 3, ..., 13\} \text{ στο } B = \{1, X, 2\}.$$



Π.χ. η απεικόνιση f: $A \longrightarrow B$, που το βελοδιάγραμμά της έχουμε στο σχήμα 2α, ορίζει τη διατεταγμένη 13-αδα (1, 1, X, 2, 1, X, 2, 2, 1, 1, X, X, 2) η οποία δίνει μια στήλη του ΠΡΟ-ΠΟ (η πρώτη στήλη στο σχήμα 2β).

Κάθε τέτοια διατεταγμένη 13-αδα λέγεται και **διάταξη με επανάληψη** στοιχείων του B. Γενικά δίνουμε τον επόμενο ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ **Έστω E ένα σύνολο με ν στοιχεία. Κάθε διατεταγμένη μ-άδα της οποίας οι συνιστώσες είναι στοιχεία του E, όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά, ονομάζεται *διάταξη με επανάληψη* στοιχείων του E.**

Μια τέτοια διάταξη αντιστοιχεί σε μια απεικόνιση του {1, 2, ..., μ} στο E και αντιστρόφως. Επομένως κάθε στοιχείο του E μπορεί να εμφανίζεται στη διάταξη μ το πολύ φορές.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ενώ στις διατάξεις των ν ανά μ είναι $\mu \leqslant \nu$, στις διατάξεις με επανάληψη μπορεί να είναι και $\mu > \nu$.

Πλήθος διατάξεων με επανάληψη

5.9 Έστω ένα σύνολο E με ν στοιχεία. Όταν αναφερόμαστε στο σύνολο των **διατάξεων με επανάληψη** στοιχείων του E οι οποίες έχουν μ συνιστώσες, χρησιμοποιούμε την έκφραση *«διατάξεις με επανάληψη των ν ανά μ»*. Το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των ν ανά μ το συμβολίζουμε $\mathcal{A}_\mu^\nu$ και το υπολογίζουμε ως εξής:

Για την επιλογή κάθε στοιχείου μιας τέτοιας διάταξης με επανάληψη υπάρχουν ν δυνατότητες (όσα είναι τα στοιχεία του E). Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή της απαρίθμησης (§ 5.4), το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των ν ανά μ θα είναι

$$\mathcal{A}_\mu^\nu = \underbrace{\nu \cdot \nu \cdot \nu \cdot \,...\, \cdot \nu}_{\mu \text{ παράγοντες}} = \nu^\mu$$

Άρα

$$\boxed{\mathcal{A}_\mu^\nu = \nu^\mu} \qquad (3)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Όλες οι διαφορετικές στήλες που μπορούμε να συμπληρώσουμε στο ΠΡΟ-ΠΟ, είναι όσες οι διατάξεις με επανάληψη των 3 ανά 13. Δηλαδή μπορούμε να συμπληρώσουμε $3^{13} = 1594323$ στήλες.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Σε μια διεθνή σύσκεψη συμμετέχουν 4 Αμερικανοί, 4 Γάλλοι και 5 Γερμανοί. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθήσουν στη σειρά έτσι, ώστε τα μέλη της ίδιας εθνικότητας να κάθονται μαζί;**

Οι τρεις εθνικότητες μπορούν να διαταχθούν κατά 3! τρόπους (όσες είναι οι μεταθέσεις των 3 εθνικοτήτων). Σε κάθε περίπτωση οι 4 Αμερικανοί μπορούν να καθήσουν κατά 4! τρόπους, οι 4 Γάλλοι επίσης κατά 4! τρόπους και οι 5 Γερμανοί κατά 5! τρόπους. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή της απαρίθμησης, τα 13 άτομα μπορούν να καθήσουν κατά $3!\ 4!\ 4!\ 5! = 414720$ τρόπους.

2. **Μια πινακίδα αυτοκινήτου περιέχει δύο γράμματα, τα οποία ακολουθούνται από ένα τετραψήφιο αριθμό. Πόσες διαφορετικές πινακίδες μπορούμε να κατασκευάσουμε, αν από τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου χρησιμοποιούμε μόνο εκείνα που υπάρχουν και στο λατινικό αλφάβητο;**

Από τα 24 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου πρέπει να εξαιρέσουμε τα Γ, Δ, Θ, Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ, Ω που δεν υπάρχουν στο λατινικό. Επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τα υπόλοιπα 14 γράμματα. Τότε το πρώτο τμήμα κάθε πινακίδας θα είναι μια διάταξη με επανάληψη των 14 γραμμάτων ανά 2. Το πλήθος αυτών των διατάξεων είναι $14^2 = \mathbf{196}$.

Καθένας από τους τετραψήφιους αριθμούς που αποτελούν το δεύτερο τμήμα της πινακίδας, είναι μια διάταξη με επανάληψη των 10 ψηφίων ανά 4, με την προϋπόθεση ότι δεν έχει πρώτο στοιχείο το 0. Αλλά οι αριθμοί που έχουν πρώτο ψηφίο το 0 είναι όσες οι διατάξεις με επανάληψη των 10 ψηφίων ανά 3. Επομένως το πλήθος όλων των τετραψήφιων αριθμών είναι $\mathcal{A}_4^{10} - \mathcal{A}_3^{10} = 10^4 - 10^3 = \mathbf{9000}$.

Αν συνδυάσουμε κάθε δυάδα γραμμάτων με κάθε τετραψήφιο αριθμό, θα κατασκευάσουμε $196 \cdot 9000 = 1764000$ διαφορετικές πινακίδες.

Ασκήσεις: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Συνδυασμοί μ στοιχείων του Ε

5.10 Από μια τάξη με 32 μαθητές θέλουμε να εκλέξουμε μια τριμελή εφορευτική επιτροπή, η οποία θα αναλάβει τη διεξαγωγή των εκλογών για την ανάδειξη του προεδρείου της τάξης. Αν ονομάσουμε Ε το σύνολο των μαθητών της τάξης, η εφορευτική επιτροπή είναι ένα υποσύνολο του Ε με τρία στοιχεία. Το υποσύνολο αυτό το λέμε **συνδυασμό** 3 στοιχείων του Ε. Γενικά

ΟΡΙΣΜΟΣ **Αν Ε είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, ονομάζεται *συνδυασμός* μ στοιχείων του Ε κάθε υποσύνολο του Ε με μ στοιχεία.**

Όταν αναφερόμαστε στο σύνολο των συνδυασμών μ στοιχείων από τα ν στοιχεία του Ε χρησιμοποιούμε την έκφραση *«συνδυασμοί των ν ανά μ»*. Το πλήθος των συνδυασμών των ν ανά μ το συμβολίζουμε[1] $\binom{\nu}{\mu}$ ή C_μ^ν και το υπολογίζουμε ως εξής:

(1) C είναι το αρχικό της λέξης «combination».

Ας θεωρήσουμε ένα τέτοιο συνδυασμό, π.χ. τον $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\mu\}$. Κάθε μετάθεση των στοιχείων του Α είναι και μια διάταξη μ στοιχείων του Ε. Επομένως από τον Α προκύπτουν μ! διατάξεις των ν ανά μ (όσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Α). Έτσι από όλους τους συνδυασμούς των ν ανά μ, που το πλήθος τους είναι $\binom{\nu}{\mu}$, προκύπτουν $\mu!\binom{\nu}{\mu}$ διατάξεις. Οι διατάξεις αυτές είναι ανά δύο διαφορετικές, γιατί διαφέρουν κατά ένα τουλάχιστο στοιχείο (αν προκύπτουν από διαφορετικούς συνδυασμούς) ή διαφέρουν κατά τη θέση ενός τουλάχιστο στοιχείου (αν προκύπτουν από τον ίδιο συνδυασμό).

Έστω τώρα μια οποιαδήποτε διάταξη μ στοιχείων του Ε. Η διάταξη αυτή ορίζει ένα αντίστοιχο συνδυασμό μ στοιχείων του Ε και συνεπώς είναι μια από τις $\mu!\binom{\nu}{\mu}$ παραπάνω διατάξεις.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι θα ισχύει η ισότητα $\mu!\binom{\nu}{\mu} = A_\mu^\nu$ ή $\binom{\nu}{\mu} = \frac{A_\mu^\nu}{\mu!}$, από την οποία προκύπτει η

$$\boxed{\binom{\nu}{\mu} = \frac{\nu(\nu-1)...(\nu-\mu+1)}{\mu!}} \qquad (1)$$

Ειδικότερα είναι:

$$\boxed{\binom{\nu}{1} = \nu, \quad \binom{\nu}{2} = \frac{\nu(\nu-1)}{2}, \quad \binom{\nu}{\nu} = 1}$$

Με τη βοήθεια της ισότητας (1΄) της § 5.7 έχουμε ακόμη:

$$\binom{\nu}{\mu} = \frac{A_\mu^\nu}{\mu!} = \frac{\frac{\nu!}{(\nu-\mu)!}}{\mu!}$$

ή τελικά

$$\boxed{\binom{\nu}{\mu} = \frac{\nu!}{\mu!\,(\nu-\mu)!}} \qquad (1΄)$$

Π.χ. $\binom{18}{16} = \frac{18!}{16!(18-16)!} = \frac{16!17 \cdot 18}{16!2!} = \frac{17 \cdot 18}{2} = 153$

Επειδή είναι $\binom{\nu}{\nu} = 1$, για να ισχύει η (1΄) και για μ = ν, ορίζουμε

$$\boxed{0! = 1}$$

Ιδιότητες των συνδυασμών

5.11 Έστω ένα σύνολο Ε με ν στοιχεία. Για κάθε $\mu \leqslant \nu$ ορίζονται δύο συμπληρωματικά υποσύνολα του Ε με μ και ν-μ στοιχεία αντιστοίχως. Επομένως σε κάθε συνδυασμό των ν ανά μ αντιστοιχίζεται ένας συνδυασμός των ν ανά ν-μ και αντιστρόφως. Συνεπώς

$$\boxed{\binom{\nu}{\mu} = \binom{\nu}{\nu-\mu}} \qquad (2)$$

Η (2) αποδεικνύεται και αλγεβρικά. Πράγματι, αν θέσουμε στην (1΄) όπου μ το ν-μ, έχουμε:

$$\binom{\nu}{\nu-\mu} = \frac{\nu!}{(\nu-\mu)![\nu-(\nu-\mu)]!} = \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!\mu!} = \binom{\nu}{\mu}$$

Επειδή είναι $\binom{\nu}{\nu} = 1$, για να ισχύει η (2) και για $\mu = \nu$, ορίζουμε

$$\boxed{\binom{\nu}{0} = 1}$$

5.12 Έστω Ε ένα σύνολο με ν στοιχεία και Σ το σύνολο των συνδυασμών μ στοιχείων του Ε. Το Σ διαμερίζεται σε δύο υποσύνολα: το Σ_α που περιλαμβάνει όλους τους συνδυασμούς οι οποίοι περιέχουν ένα συγκεκριμένο στοιχείο **α** και το Σ_α' που περιλαμβάνει τους υπόλοιπους.

Αν από κάθε συνδυασμό του Σ_α αφαιρέσουμε το α, προκύπτει ένας συνδυασμός των υπόλοιπων ν-1 στοιχείων ανά μ-1. Αντιστρόφως, αν σε κάθε τέτοιο συνδυασμό των ν-1 ανά μ-1 προσαρτηθεί το α, προκύπτει ένας από τους συνδυασμούς του Σ_α. Επομένως το πλήθος των στοιχείων του Σ_α είναι $\binom{\nu-1}{\mu-1}$.

Εξάλλου καθένας από τους συνδυασμούς του Σ_α' οι οποίοι δεν περιέχουν το α, προκύπτει αν πάρουμε μ στοιχεία από τα υπόλοιπα ν-1 στοιχεία του Ε. Επομένως το πλήθος των στοιχείων του Σ_α' είναι $\binom{\nu-1}{\mu}$

Επειδή όμως $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\alpha' = \varnothing$ και $\Sigma_\alpha \cup \Sigma_\alpha' = \Sigma$, θα έχουμε ότι:

$$\boxed{\binom{\nu}{\mu} = \binom{\nu-1}{\mu} + \binom{\nu-1}{\mu-1}} \qquad (3)$$

Η (3) μπορεί να προκύψει και αλγεβρικά με εφαρμογή της (1).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σε μια υπηρεσία εργάζονται 5 διοικητικοί και 6 τεχνικοί υπάλληλοι. Πόσες διαφορετικές πενταμελείς ομάδες μπορούμε να σχηματίσουμε, αν θέλουμε σε κάθε ομάδα να περιέχονται: (i) 3 διοικητικοί υπάλληλοι (ii) 3 τουλάχιστο τεχνικοί υπάλληλοι;

(i) Οι 3 διοικητικοί υπάλληλοι επιλέγονται κατά $\binom{5}{3}$ τρόπους, ενώ οι υπόλοιποι 5-3 = 2 τεχνικοί υπάλληλοι κάθε ομάδας επιλέγονται κατά $\binom{6}{2}$ τρόπους. Επομένως, σύμφωνα

με τη βασική αρχή της απαρίθμησης (§ 5.4), μπορούμε να σχηματίσουμε

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{6}{2} = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{6\cdot5}{1\cdot2} = 150 \text{ διαφορετικές ομάδες.}$$

(ii) Σε κάθε ομάδα θέλουμε να περιέχονται 3 ή 4 ή 5 τεχνικοί υπάλληλοι. Αν σκεφτούμε όπως προηγουμένως βρίσκουμε ότι:

- Με 3 τεχνικούς υπάλληλους μπορούμε να σχηματίσουμε
$$\binom{6}{3}\binom{5}{2} = \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{5\cdot4}{1\cdot2} = 200 \text{ διαφορετικές ομάδες}$$
- Με 4 τεχνικούς υπάλληλους μπορούμε να σχηματίσουμε
$$\binom{6}{4}\binom{5}{1} = 75 \text{ διαφορετικές ομάδες}$$
- Με 5 τεχνικούς υπάλληλους μπορούμε να σχηματίσουμε
$$\binom{6}{5}\binom{5}{0} = 6 \text{ διαφορετικές ομάδες}$$

Άρα μπορούμε να σχηματίσουμε 200+75+6=281 διαφορετικές ομάδες.

Ασκήσεις: 15, 16, 17, 18, 19

Τύπος του διωνύμου (Newton)

5.13 Σε προηγούμενες τάξεις μάθαμε τις ταυτότητες

$$(x+\alpha)^2 = x^2+2x\alpha+\alpha^2 \quad \text{και} \quad (x+\alpha)^3 = x^3+3x^2\alpha+3x\alpha^2+\alpha^3$$

Σ' αυτή την παράγραφο θα υπολογίσουμε το ανάπτυγμα του $(x+\alpha)^\nu$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$. Είναι:

$$(x+\alpha)^\nu = \underbrace{(x+\alpha)\,(x+\alpha)\,\ldots\,(x+\alpha)}_{\nu \text{ παράγοντες}} \qquad (I)$$

Αν εκτελέσουμε τις πράξεις στο β΄ μέλος της (Ι), κάθε όρος του εξαγομένου θα είναι της μορφής $\alpha^\kappa x^{\nu-\kappa}$, με $0 \leqslant \kappa \leqslant \nu$, και προκύπτει αν από κ παράγοντες της (Ι) ληφθεί ο α και από τους υπόλοιπους ν-κ παράγοντες ληφθεί ο x. Αλλά τους κ παράγοντες από τους οποίους θα ληφθεί ο α μπορούμε να τους επιλέξουμε κατά $\binom{\nu}{\kappa}$ τρόπους. Επομένως υπάρχουν στο ανάπτυγμα $\binom{\nu}{\kappa}$ όροι ίσοι με $\alpha^\kappa x^{\nu-\kappa}$, που το άθροισμά τους δίνει στην τελική μορφή του αναπτύγματος τον όρο $\binom{\nu}{\kappa}\alpha^\kappa x^{\nu-\kappa}$.

Έτσι, για $\kappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu$ προκύπτει ότι το ανάπτυγμα του $(x+\alpha)^\nu$ είναι:

$$\boxed{\begin{aligned}(x+\alpha)^{\nu} &= \binom{\nu}{0}x^{\nu} + \binom{\nu}{1}x^{\nu-1}\alpha + \ldots + \binom{\nu}{\kappa}x^{\nu-\kappa}\alpha^{\kappa} + \ldots + \binom{\nu}{\nu-1}x\alpha^{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu}\alpha^{\nu}\\ &= \sum_{\kappa=0}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa}x^{\nu-\kappa}\alpha^{\kappa}\end{aligned}} \quad (4)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το ανάπτυγμα του $(x+\alpha)^{\nu}$ έχει ν+1 όρους.
2. Ο όρος κ+1 τάξης έχει συντελεστή τον $\binom{\nu}{\kappa}$. Επομένως οι όροι κ+1 και ν-κ+1 τάξης, που *ισαπέχουν από τους άκρους όρους, έχουν συντελεστές* $\binom{\nu}{\kappa}$ και $\binom{\nu}{\nu-\kappa}$, *που είναι ίσοι.*
3. Από την ισότητα $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu-1}{\kappa-1} + \binom{\nu-1}{\kappa}$ προκύπτει ότι ο συντελεστής του όρου κ+1 τάξης του αναπτύγματος του $(x+\alpha)^{\nu}$ είναι ίσος με το άθροισμα των συντελεστών των όρων κ και κ+1 τάξης του αναπτύγματος του $(x+\alpha)^{\nu-1}$. Σ' αυτή την ιδιότητα στηρίζεται η κατασκευή του παρακάτω **τριγώνου του Pascal** το οποίο μας δίνει ένα πρακτικό κανόνα για τον υπολογισμό των συντελεστών των όρων του $(x+\alpha)^{\nu}$.

$$\begin{array}{llllllll}
(x+\alpha)^0 & 1 \\
(x+\alpha)^1 & 1 & 1 \\
(x+\alpha)^2 & 1 & 2 & 1 \\
(x+\alpha)^3 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
(x+\alpha)^4 & 1 & 4 & 6\ + & 4 & 1 \\
 & & & & \| & \\
(x+\alpha)^5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
(x+\alpha)^6 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

Π.χ. ο συντελεστής του 4ου όρου του αναπτύγματος του $(x+\alpha)^5$ είναι άθροισμα των συντελεστών του 3ου και 4ου όρου του αναπτύγματος του $(x+\alpha)^4$.

4. Αν θεωρήσουμε δύο διαδοχικούς όρους του αναπτύγματος, π.χ. τους $\binom{\nu}{\kappa}x^{\nu-\kappa}\alpha^{\kappa}$ και $\binom{\nu}{\kappa+1}x^{\nu-\kappa-1}\alpha^{\kappa+1}$, ο συντελεστής του δεύτερου όρου γράφεται διαδοχικά:

$$\binom{\nu}{\kappa+1} = \frac{\nu!}{(\kappa+1)!(\nu-\kappa-1)!} = \frac{\nu!}{\kappa!(\kappa+1)\frac{(\nu-\kappa)!}{\nu-\kappa}} = \binom{\nu}{\kappa}\cdot\frac{\nu-\kappa}{\kappa+1}$$

Έχουμε λοιπόν την ισότητα $\binom{\nu}{\kappa}\cdot\frac{\nu-\kappa}{\kappa+1} = \binom{\nu}{\kappa+1}$

Με τη βοήθεια της ισότητας αυτής, που εκφράζεται με τον παρακάτω κανόνα, βρίσκουμε εύκολα τους συντελεστές του αναπτύγματος:

«Αν πολλαπλασιάσουμε το συντελεστή ενός όρου με τον εκθέτη τού x στον όρο αυτό, και διαιρέσουμε το γινόμενο με τον αριθμό που φανερώνει την «τάξη» του όρου, βρίσκουμε το συντελεστή του επόμενου όρου».

Π.χ. για το ανάπτυγμα του $(x+\alpha)^8$ έχουμε(1):

	1ος	2ος	3ος	4ος	5ος
Συντ/στής	1	$\frac{1\cdot 8}{1}=8$	$\frac{8\cdot 7}{2}=28$	$\frac{28\cdot 6}{3}=56$	$\frac{56\cdot 5}{4}=70$
Όρος	x^8	$8x^7\alpha$	$28x^6\alpha^2$	$56x^5\alpha^3$	$70x^4\alpha^4$

Άρα:

$$(x+\alpha)^8 = x^8 + 8x^7\alpha + 28x^6\alpha^2 + 56x^5\alpha^3 + 70x^4\alpha^4 + 56x^3\alpha^5 + 28x^2\alpha^6 + 8x\alpha^7 + \alpha^8$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να βρεθεί το πλήθος όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου Α με N(A) = ν**

Είναι γνωστό ότι κάθε υποσύνολο του Α με μ στοιχεία είναι ένας συνδυασμός μ στοιχείων του Α. Επομένως το πλήθος των υποσυνόλων του Α με:

0 στοιχεία, είναι $\binom{\nu}{0}$

1 στοιχείο, είναι $\binom{\nu}{1}$

2 στοιχεία, είναι $\binom{\nu}{2}$

. . . .

ν στοιχεία, είναι $\binom{\nu}{\nu}$

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το άθροισμα $\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\ldots+\binom{\nu}{\nu}$

Η ισότητα (4) για x = α = 1 γίνεται:

$$(1+1)^{\nu} = \binom{\nu}{0}1^{\nu} + \binom{\nu}{1}1^{\nu-1}\cdot 1 + \binom{\nu}{2}1^{\nu-2}\cdot 1^2 + \ldots + \binom{\nu}{\nu}1^{\nu}$$

ή

$$\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\ldots+\binom{\nu}{\nu} = 2^{\nu}$$

Ώστε το πλήθος των υποσυνόλων του Α είναι 2^{ν}.

(1) Θα υπολογίσουμε μόνο τους συντελεστές των 5 πρώτων όρων, γιατί σύμφωνα με την παρατήρηση 2, είναι γνωστοί και οι υπόλοιποι.

2. Να αποδειχτεί ότι:

(i) Αν ν άρτιος, τότε $\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{2} + \ldots + \binom{\nu}{\nu} = \binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{3} + \ldots + \binom{\nu}{\nu-1}$

(ii) Αν ν περιττός, τότε $\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{2} + \ldots + \binom{\nu}{\nu-1} = \binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{3} + \ldots + \binom{\nu}{\nu}$

(i) Η ισότητα (4) για $x = 1$, $\alpha = -1$ και $\nu = 2\mu$ γίνεται:

$$(1-1)^{2\mu} = \binom{2\mu}{0}1^{2\mu} + \binom{2\mu}{1}1^{2\mu-1}(-1) + \binom{2\mu}{2}1^{2\mu-2}(-2)^2 + \ldots + \binom{2\mu}{2\mu-1}1 \cdot (-1)^{2\mu-1} + \binom{2\mu}{2\mu}(-1)^{2\mu}$$

ή

$$0 = \binom{2\mu}{0} - \binom{2\mu}{1} + \ldots - \binom{2\mu}{2\mu-1} + \binom{2\mu}{2\mu}$$

Άρα

$$\binom{2\mu}{0} + \binom{2\mu}{2} + \ldots + \binom{2\mu}{2\mu} = \binom{2\mu}{1} + \binom{2\mu}{3} + \ldots + \binom{2\mu}{2\mu-1}$$

ή

$$\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{2} + \ldots + \binom{\nu}{\nu} = \binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{3} + \ldots + \binom{\nu}{\nu-1}$$

(ii) Αποδεικνύεται ομοίως.

Ασκήσεις: 20, 21, 22, 23

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν είναι $A = \{5\}$, $B = \{\alpha, \beta\}$ και $\Gamma = \{\kappa, \lambda, \mu\}$, να βρείτε τα $A \times B \times \Gamma$ και $B \times \Gamma \times A$.

2. Δίνεται ότι $N(A \times B \times \Gamma) = 24$ και $N(A) = 3$. Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές των $N(B)$ και $N(\Gamma)$.

3. Ο Α και ο Β παίζουν έναν αγώνα τένις με τη συμφωνία ότι νικητής θα είναι εκείνος που θα κερδίσει δύο διαδοχικά σετ ή εκείνος που θα κερδίσει πρώτος τρία συνολικά σετ. Να κάνετε το δεντροδιάγραμμα όλων των πιθανών εκβάσεων του αγώνα.

4. Με τα ψηφία 2, 3, 4, 5, 6 σχηματίζουμε τριψήφιους αριθμούς τέτοιους, ώστε τα ψηφία τους να είναι διαφορετικά ανά δύο. Να βρείτε πόσοι από τους αριθμούς αυτούς:
(i) είναι μικρότεροι από το 400, (ii) είναι άρτιοι.

5. Πόσες λέξεις με δύο διαφορετικά σύμφωνα και με ένα φωνήεν μπορούμε να σχηματίσουμε,
(i) αν το φωνήεν βρίσκεται ανάμεσα στα δύο σύμφωνα;
(ii) αν δεν μας ενδιαφέρει σε ποια θέση βρίσκεται το φωνήεν;
(Οι λέξεις που σχηματίζονται δεν είναι απαραίτητο να έχουν νόημα).

6. Να υπολογίσετε το ν, αν:
(i) $A^{\nu}_{3} = 12\nu\text{-}24$, (ii) $A^{2\nu}_{3} + 8 = 16\nu$, (iii) $A^{\nu}_{4} = 42\, A^{\nu}_{2}$

7. (i) Πόσους πενταψήφιους αριθμούς με ψηφία διαφορετικά ανά δύο μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
(ii) Πόσοι απ' αυτούς τους αριθμούς έχουν τα τρία πρώτα ψηφία τους περιττά και τα δύο τελευταία άρτια;

8. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
(i) $8! + 9!$ (ii) $(\nu+1)! - (\nu-1)!$ (iii) $\nu^2 (\nu-1)!-2\nu (\nu-2)!$
(iv) $\dfrac{\nu!}{(\nu-1)!}$ (v) $\dfrac{(\nu-1)!}{\nu!} - \dfrac{\nu!}{(\nu+1)!}$

9. Να δείξετε ότι:
(i) $\dfrac{P_6 - P_5}{5!} = 5$ (ii) $4 \cdot \dfrac{P_{10}}{P_9 - P_8} = 45$
(iii) $(\nu-\kappa+1)! - (\nu-\kappa)! = (\nu-\kappa) \cdot (\nu-\kappa)!$

10. (i) Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης «ποτάμι»;
(ii) Πόσοι απ' αυτούς τους αναγραμματισμούς αρχίζουν με σύμφωνο και τελειώνουν με φωνήεν;

11. (i) Πόσες λέξεις μπορούμε να σχηματίσουμε με τα γράμματα α, β, γ, δ, ε, η αν πάρουμε το κάθε γράμμα μόνο μια φορά; (Οι λέξεις δεν είναι απαραίτητο να έχουν νόημα).
(ii) Σε πόσες από τις λέξεις αυτές τα γράμματα είναι εναλλάξ σύμφωνο-φωνήεν ή αντιστρόφως;

12. Μια κάλπη περιέχει 5 σφαίρες που είναι αριθμημένες από το 1 μέχρι το 5. Παίρνουμε διαδοχικά 3 σφαίρες επανατοποθετώντας κάθε φορά στην κάλπη τη σφαίρα που πήραμε προηγουμένως. Έτσι σχηματίζουμε τριψήφιους αριθμούς (η πρώτη σφαίρα καθορίζει το ψηφίο των εκατοντάδων, η δεύτερη το ψηφίο των δεκάδων και η τρίτη το ψηφίο των μονάδων). Να βρείτε:
(i) Πόσους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε;
(ii) Πόσοι από τους αριθμούς αυτούς έχουν πρώτο ψηφίο άρτιο;
(iii) Πόσοι έχουν τα δύο πρώτα ψηφία περιττά και το τρίτο άρτιο;

13. Ένα σύστημα ΠΡΟ-ΠΟ έχει 5 στάνταρ, 4 τριπλές και 4 διπλές παραλλαγές. Πόσο κοστίζει το σύστημα, αν κάθε στήλη κοστίζει 20 δρχ.;

14. Σε πόσους τριψήφιους αριθμούς και τα τρία ψηφία είναι πολλαπλάσια του 3;

15. Να αποδείξετε τις ισότητες:
(i) $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu-1}{\kappa} + \binom{\nu-1}{\kappa-1}$ (ii) $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu-2}{\kappa} + 2\binom{\nu-2}{\kappa-1} + \binom{\nu-2}{\kappa-2}$

16. (i) Αν είναι $\binom{\nu}{5} = \frac{3}{4}\binom{\nu}{6}$, να υπολογίσετε το ν.
(ii) Να βρειτε το κ, αν $A^{\nu}_{\kappa} = 2520$ και $\binom{\nu}{\kappa} = 21$

17. Με πόσους τρόπους μπορούμε να χωρίσουμε 12 μαθητές σε 3 ισοπληθείς ομάδες;

18. Μια τάξη έχει 9 αγόρια και 3 κορίτσια.
(i) Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε μια τετραμελή αντιπροσωπεία;
(ii) Πόσοι από τους τρόπους αυτούς περιέχουν ακριβώς ένα κορίτσι;
(iii) Πόσοι περιέχουν τουλάχιστο ένα κορίτσι;

19. Σε ένα επίπεδο έχουμε 10 σημεία $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, που ανά τρία δεν είναι συνευθειακά.
(i) Πόσες ευθείες ορίζονται από τα 10 σημεία;
(ii) Πόσες από τις ευθείες αυτές δεν διέρχονται από το A_1 ή το A_2;
(iii) Πόσα τρίγωνα ορίζονται από τα 10 σημεία;
(iv) Πόσα από τα τρίγωνα αυτά έχουν πλευρά την A_1A_2;

20. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(i) $(2x+y^2)^5$ (ii) $(x^2 - \frac{2}{y})^6$

21. Δίνεται το $(x^5 + \frac{1}{x^3})^8$.

(i) Να βρείτε ποιος όρος του αναπτύγματος έχει το x^8.
(ii) Να εξετάσετε αν στο ανάπτυγμα υπάρχει όρος ανεξάρτητος του x.

22. Θεωρούμε το $(x+y)^\nu$. Να βρείτε τα ν, x, y, αν ξέρετε ότι ο 1ος, 2ος, 3ος όρος του αναπτύγματος είναι αντίστοιχα 64, 192, 240.

23. Να αποδείξετε την ισότητα

$$\binom{\nu}{0} + 2\binom{\nu}{1} + 2^2\binom{\nu}{2} + \ldots + 2^\nu\binom{\nu}{\nu} = 3^\nu.$$

6 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Το κεφάλαιο αυτό, έχει εισαγωγικό και ενημερωτικό χαρακτήρα. Περιορίζεται σε μια πρώτη μύηση του μαθητή σε βασικά θέματα.
Αρχικά ορίζονται οι έννοιες του δειγματικού χώρου και του ενδεχομένου ενός πειράματος τύχης καθώς και οι πράξεις με ενδεχόμενα. Εδώ αξιοποιούνται -όπως άλλωστε και στη συνέχεια- ορισμένες στοιχειώδεις συνολοθεωρητικές γνώσεις και δίνεται παράλληλα η ευκαιρία να γίνει μια συστηματική επανάληψή τους.
Η κεντρική έννοια της πιθανότητας διαμορφώνεται με βάση την έννοια της σχετικής συχνότητας (βλέπε 'Αλγεβρα Β' Λυκείου, κεφ. 6) και τις βασικές της ιδιότητες. Εξάλλου η επεξεργασία αρκετών παραδειγμάτων και εφαρμογών στηρίζεται σε γνώσεις της Συνδυαστικής. 'Ετσι διαφαίνεται η άμεση σύνδεση του κεφαλαίου με τα κεφάλαια αυτά.
Η περίπτωση ισοπίθανων ενδεχομένων, η οποία συνδέεται με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, επισημαίνεται ιδιαίτερα. Ακολουθεί η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας που οδηγεί στην σημαντική και λεπτή έννοια της ανεξαρτησίας ενδεχομένων. Πρέπει να τονιστεί ότι η μαθηματικοποίηση των εννοιών αυτών συνέβαλε αποφασιστικά στην αποσαφήνισή τους.
Το κεφάλαιο κλείνει με σύντομη ενημέρωση για τους τυχαίους αριθμούς.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Εισαγωγή

6.1 Στη φύση υπάρχουν φαινόμενα που υπακούουν σε συγκεκριμένους νόμους. Σε ένα τέτοιο φαινόμενο το αποτέλεσμα μπορεί να προβλεφθεί κάθε φορά με βεβαιότητα ή τουλάχιστο με μεγάλη προσέγγιση. Έτσι, όταν θερμαίνουμε π.χ. μια ποσότητα αποσταγμένου νερού υπό πίεση 760 mm Hg, ξέρουμε εκ των προτέρων ότι το νερό θα αρχίσει να βράζει όταν η θερμοκρασία του φτάσει τους 100°C.

Υπάρχουν όμως και φαινόμενα που δεν υπακούουν σε συγκεκριμένους νόμους. Π.χ. δεν υπάρχει μαθηματικός τύπος ή άλλο μέσο με το οποίο να μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια η διάρκεια ζωής ενός αυτοκινήτου. Και αυτό γιατί η διάρκεια ζωής του αυτοκινήτου εξαρτάται από πολλούς απροσδιόριστους παράγοντες.

Επίσης, κάποιος που ρίχνει ένα νόμισμα, δεν μπορεί να προβλέψει με βεβαιότητα ποια όψη του νομίσματος θα εμφανιστεί, όταν το νόμισμα ακινητοποιηθεί στο έδαφος. Τέτοια φαινόμενα, που το αποτέλεσμά τους δεν μπορεί να προβλεφθεί με βεβαιότητα, ονομάζονται **τυχαία φαινόμενα.** Χαρακτηριστικό λοιπόν ενός τυχαίου φαινομένου είναι ότι, όταν επαναλαμβάνεται κάτω από τις ίδιες (πρακτικά) συνθήκες, το αποτέλεσμα δεν είναι πάντοτε το ίδιο.

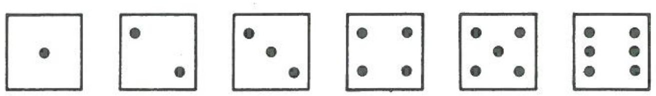
Τέτοια φαινόμενα εμφανίζονται σε πολλές εφαρμοσμένες επιστήμες, όπως στη γενετική, στη φυσική, στις κοινωνικές και οικονομικές επιστήμες κτλ. Π.χ. η εμφάνιση ενός συγκεκριμένου κληρονομικού χαρακτηριστικού σε μια ομάδα ανθρώπων, είναι ένα τυχαίο φαινόμενο. Έτσι στη γενετική ενδιαφερόμαστε για τη συχνότητα με την οποία εμφανίζεται το χαρακτηριστικό αυτό. Ακόμη στη φυσική μελετάμε την κίνηση των ελεύθερων ηλεκτρονίων σ' ένα κύκλωμα, η οποία είναι ένα τυχαίο φαινόμενο, αφού δεν μπορούμε κάθε στιγμή να προβλέψουμε με ακρίβεια τη θέση ενός ηλεκτρονίου μέσα στο κύκλωμα.

Η θεωρία πιθανοτήτων[1], χρησιμοποιώντας μαθηματικές έννοιες, παρέχει μεθόδους για τη μελέτη των τυχαίων φαινομένων.

Στη συνέχεια θα γνωρίσουμε τις πρώτες βασικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων.

Πείραμα τύχης. Δειγματικός χώρος

6.2 Με τον όρο *«πείραμα»* εννοούμε το μηχανισμό, ο οποίος μας επιτρέπει να παρατηρήσουμε ένα φαινόμενο. Όταν με ένα πείραμα παρατηρούμε ένα τυχαίο φαινόμενο, τότε λέμε ειδικότερα ότι έχουμε ένα **πείραμα τύχης**. Π.χ. η ρίψη ενός ζαριού είναι ένα πείραμα τύχης, γιατί σε κάθε ρίψη ξέρουμε ότι θα εμφανιστεί μια από τις ακόλουθες 6 ενδείξεις



χωρίς όμως να μπορούμε να προβλέψουμε κάθε φορά ποια ακριβώς ένδειξη θα εμφανιστεί.

Επίσης η ρίψη ενός νομίσματος είναι ένα πείραμα τύχης, γιατί σε κάθε ρίψη ξέρουμε ότι θα εμφανιστεί μία από τις δύο όψεις του

αλλά δεν μπορούμε να προβλέψουμε κάθε φορά ποια ακριβώς όψη θα εμφανιστεί.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

(1) Η θεωρία πιθανοτήτων οφείλει τη γένεσή της στην τάση του ανθρώπου να ασχολείται με τυχερά παιχνίδια. Κατά τον 17ο και 18ο αιώνα, πολλοί διάσημοι μαθηματικοί (Fermat, Pascal, Bernoulli, De Moivre, κ.α.) ασχολήθηκαν με την εύρεση μεθόδων λύσης προβλημάτων τα οποία αναφέρονταν σε παιχνίδια τύχης. Ως ιδιαίτερος κλάδος των μαθηματικών καθιερώνεται η Θ.Π. το 1812 με το έργο του Laplace "Theorie Analytique de Probabilité". Κατόπιν αρχίζει μία προσπάθεια αξιωματικής θεμελίωσης της Θ.Π. με τους Bertrand, Poincaré, κ.α., η οποία ολοκληρώνεται περί το 1930 από το Ρώσο μαθηματικό Kolmogorov.

- Ένα πείραμα τύχης μπορούμε να το επαναλάβουμε πολλές φορές με τις ίδιες (πρακτικά) συνθήκες.[1]
- Σε κάθε πείραμα τύχης αντιστοιχεί ένα ορισμένο σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.
- Δεν μπορούμε να προβλέψουμε ποιο ακριβώς θα είναι το αποτέλεσμα σε μια εκτέλεση του πειράματος τύχης.

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **δειγματικός χώρος** του πειράματος και συμβολίζεται συνήθως με **Ω**. Έτσι, στη ρίψη του ζαριού ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

ενώ ο δειγματικός χώρος στη ρίψη του νομίσματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{\text{κεφαλή, γράμματα}\}$$

ή, όπως γράφουμε πιο σύντομα

$$\Omega = \{\text{Κ}, \Gamma\}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Από μια τράπουλα με 52 φύλλα (αφού την ανακατέψουμε καλά) παίρνουμε ένα φύλλο. Έτσι κάνουμε ένα πείραμα τύχης του οποίου δειγματικός χώρος είναι το σύνολο των ενδείξεων όλων των φύλλων της τράπουλας. Αν από την ίδια τράπουλα (αφού πάλι την ανακατέψουμε καλά) τραβήξουμε δύο φύλλα συγχρόνως, έχουμε ένα άλλο πείραμα τύχης, του οποίου ο δειγματικός χώρος Ω είναι το σύνολο όλων των συνδυασμών των ενδείξεων των 52 φύλλων ανά 2. Επομένως θα είναι $N(\Omega) = \binom{52}{2} = \frac{52 \cdot 51}{2} = 1326$

2. Μια κληρωτίδα έχει 6 όμοιους κλήρους που είναι αριθμημένοι από το 1 ως το 6. Παίρνουμε στην τύχη ένα κλήρο και στη συνέχεια από τους υπόλοιπους 5 παίρνουμε ένα δεύτερο κλήρο. Το αποτέλεσμα των δύο κληρώσεων είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος, που τα μέλη του είναι δύο διαφορετικά στοιχεία του συνόλου {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Επομένως ο δειγματικός χώρος Ω είναι το σύνολο των διατάξεων των 6 κλήρων ανά 2.

   Άρα $N(\Omega) = \frac{6!}{4!} = 30.$

3. Ρίχνουμε ένα νόμισμα τόσες φορές, όσες χρειάζονται για να εμφανιστεί για πρώτη φορά η όψη κεφαλή (Κ). Επειδή είναι δυνατό να έχουμε Κ με την 1η, 2η, 3η, ..., ρίψη, συμπεραίνουμε ότι ο δειγματικός χώρος είναι το απειροσύνολο[2]

$$\Omega = \{\text{Κ}, \Gamma\text{Κ}, \Gamma\Gamma\text{Κ}, \Gamma\Gamma\Gamma\text{Κ}, \dots\}$$

Ασκήσεις: 1, 2, 3, 4

(1) Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σ' ένα πείραμα τύχης, θα θεωρούμε ότι το πείραμα επαναλαμβάνεται με τις ίδιες συνθήκες.
(2) Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με πειράματα τύχης που έχουν δειγματικό χώρο πεπερασμένο σύνολο.

Ενδεχόμενα

6.3 Αν ρίξουμε ένα νόμισμα δύο φορές, παρατηρώντας ύστερα από κάθε ρίψη την όψη που εμφανίζεται, εκτελούμε ένα πείραμα τύχης του οποίου δειγματικός χώρος είναι το σύνολο $\Omega = \{(К, К), (К, Г), (Г, К), (Г, Г)\}$ ή απλούστερα $\Omega = \{КК, КГ, ГК, ГГ\}$.

Η πρόταση *«το αποτέλεσμα ω του πειράματος είναι δύο ίδιες ενδείξεις»* καθορίζει το υποσύνολο $A = \{КК, ГГ\}$ του Ω, που είναι, όπως λέμε, ένα **ενδεχόμενο** για το προηγούμενο πείραμα τύχης. Γενικά, έχουμε τον επόμενο ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ **Αν Ω είναι δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, ονομάζουμε *ενδεχόμενο* του πειράματος κάθε υποσύνολο του Ω.**

Όταν ένα ενδεχόμενο περιέχει ένα μόνο στοιχείο του Ω, ονομάζεται **στοιχειώδες ενδεχόμενο** (ή **απλό ενδεχόμενο**), ενώ όταν περιέχει δύο ή περισσότερα στοιχεία ονομάζεται **σύνθετο**. Έτσι π.χ. στο προηγούμενο πείραμα τα ενδεχόμενα $\{КК\}$, $\{ГК\}$ είναι στοιχειώδη, ενώ τα $A = \{КГ, ГК\}$ και $B = \{КГ, ГГ\}$ είναι σύνθετα.

Όταν το αποτέλεσμα του πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του, είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται.** Έτσι π.χ. αν σε μια εκτέλεση του προηγούμενου πειράματος το αποτέλεσμα είναι ΓΚ, το ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται, γιατί $ГК \in A$, ενώ το Β δεν πραγματοποιείται. Αν όμως σε μια άλλη εκτέλεση του πειράματος το αποτέλεσμα είναι ΚΓ, τότε πραγματοποιούνται και τα δύο ενδεχόμενα Α και Β.

Από τον ορισμό του ενδεχομένου προκύπτει ότι:

- Ο δειγματικός χώρος Ω είναι ενδεχόμενο του πειράματος ($\Omega \subseteq \Omega$). Το Ω ονομάζεται ειδικότερα **βέβαιο ενδεχόμενο,** γιατί πραγματοποιείται σε κάθε εκτέλεση του πειράματος.

- Το κενό σύνολο $\varnothing$ είναι ενδεχόμενο κάθε πειράματος τύχης, γιατί είναι υποσύνολο κάθε δειγματικού χώρου Ω.
  Το $\varnothing$ ονομάζεται ειδικότερα **αδύνατο ενδεχόμενο,** γιατί (αφού δεν έχει στοιχεία) δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος.

Όταν ο δειγματικός χώρος Ω έχει ν στοιχεία, τότε το σύνολο όλων των ενδεχομένων θα είναι το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\Omega)$ με 2^{ν} στοιχεία (§ 5.13, εφ. 1).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Όταν ρίχνουμε ένα ζάρι δυο φορές και παρατηρούμε κάθε φορά την ένδειξή του, κάνουμε ένα πείραμα τύχης που έχει δειγματικό χώρο το σύνολο

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = \{(x, y) : x = 1, 2, \ldots, 6, y = 1, 2, \ldots, 6\}.$$

Τα υποσύνολα του Ω

$$A = \{(x, y) : x = y\} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \quad \text{και}$$

$$B = \{(x, y) : x + y > 9\} = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

είναι ενδεχόμενα του πειράματος και πραγματοποιούνται συγχρόνως σε μια εκτέλεση του πειράματος, όταν το αποτέλεσμα είναι (5, 5) ή (6, 6).

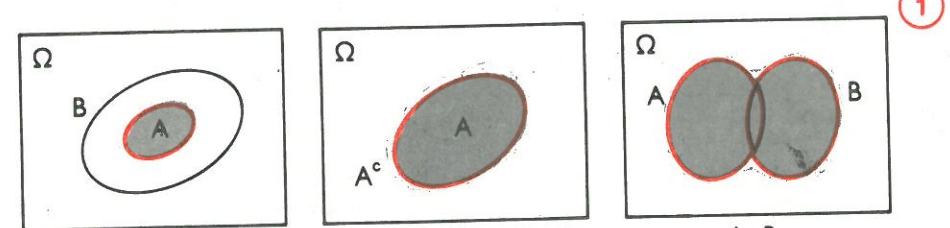
Πράξεις με ενδεχόμενα

6.4 Αφού τα ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω, μεταφέρονται και σ' αυτά οι έννοιες και οι πράξεις που έχουμε ορίσει στα σύνολα. Πιο συγκεκριμένα, σε ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω:

- Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα τέτοια, ώστε $A \subseteq B$, τότε (σχ. 1α) κάθε αποτέλεσμα του πειράματος που ανήκει στο Α θα ανήκει και στο Β και συνεπώς η πραγματοποίηση του Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του Β.

- Δύο συμπληρωματικά σύνολα ως προς το Ω λέγονται και **συμπληρωματικά** (ή **αντίθετα**) **ενδεχόμενα**. Σε κάθε εκτέλεση του πειράματος ένα απ' αυτά πραγματοποιείται οπωσδήποτε, ενώ το άλλο δεν πραγματοποιείται. Το συμπληρωματικό ενός ενδεχομένου Α συμβολίζεται A^c (ή A') (σχ. 1β).

1



A∪B

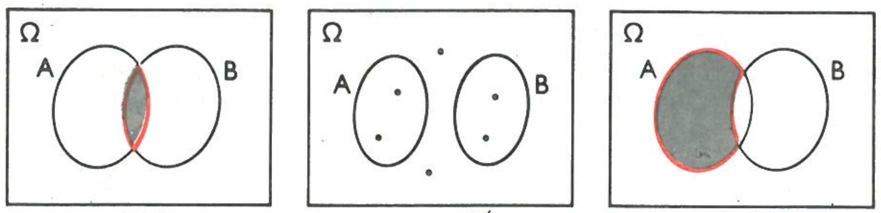
α β γ

- Η **ένωση** $A \cup B$ των ενδεχομένων Α και Β είναι το ενδεχόμενο, που πραγματοποιείται, αν και μόνο αν πραγματοποιείται το ένα τουλάχιστο από τα Α και Β (σχ. 1γ).

Γενικότερα, για κάθε $\nu \geqslant 3$, ένωση $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu$ των ενδεχομένων A_1, A_2, ..., A_ν είναι το ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται, αν και μόνο αν πραγματοποιείται το ένα τουλάχιστο από τα A_1, A_2, ..., A_ν.

- Η **τομή $A \cap B$** (ή **γινόμενο AB**) των ενδεχομένων A και B είναι το ενδεχόμενο, που πραγματοποιείται, αν και μόνο αν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B (σχ. 2α).
Γενικότερα, για κάθε $\nu \geqslant 3$, τομή $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_\nu$ των ενδεχομένων A_1, A_2, ..., A_ν είναι το ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται, αν και μόνο αν πραγματοποιούνται συγχρόνως όλα τα A_1, A_2, ..., A_ν.

2



A∩B α | A∩B = ∅ β | A-B γ

- Δύο ξένα υποσύνολα του **Ω** λέγονται και **ασυμβίβαστα** (ή **ξένα**) ενδεχόμενα. Η πραγματοποίηση του ενός, σε μια εκτέλεση του πειράματος, αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου (σχ. 2β).

- Η **διαφορά A-B** του B από το A είναι το ενδεχόμενο, που πραγματοποιείται, αν και μόνο αν πραγματοποιείται το A χωρίς να πραγματοποιείται το B (σχ. 2γ).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Δυο συμπληρωματικά ενδεχόμενα είναι και ασυμβίβαστα. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει· δηλαδή δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα δεν είναι κατ' ανάγκη και συμπληρωματικά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε στην τύχη ένα.
Αν θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα:
A: «κόκκινο χαρτί» και B: «καρό», τότε θα είναι:
A^c: «μαύρο χαρτί» και B^c: «μπαστούνι ή σπαθί ή κούπα»

2. Ρίχνουμε ένα ζάρι και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
A: «άρτια ένδειξη» = {2, 4, 6}, B: «περιττή ένδειξη» = {1, 3, 5} και Γ: «ένδειξη αριθμός πρώτος» = {2, 3, 5}
Τότε:
$A \cap B = \varnothing$, $A \cap \Gamma = \{2\}$, $B \cap \Gamma = \{3, 5\}$
$A \cup B = \Omega$, $A \cup \Gamma = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B \cup \Gamma = \{1, 2, 3, 5\}$
$A - B = \{2, 4, 6\} = A$, $B - \Gamma = \{1\}$, $\Gamma - \Omega = \varnothing$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να βρείτε το δειγματικό χώρο Ω στο πείραμα τύχης: Π: «ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές»**

Κάθε αποτέλεσμα του Π παριστάνεται με μια διατεταγμένη τριάδα, που έχει ως i-συνιστώσα το αποτέλεσμα της i ρίψης, i = 1, 2, 3. Επομένως ο δειγματικός χώρος θα είναι το σύνολο των διατάξεων με επανάληψη των δύο όψεων (Κ ή Γ) ανά 3. Δηλαδή

$\Omega = \{(K, K, K), (K, K, \Gamma), (K, \Gamma, K), (K, \Gamma, \Gamma), (\Gamma, K, K), (\Gamma, K, \Gamma), (\Gamma, \Gamma, K), (\Gamma, \Gamma, \Gamma)\}$
ή απλούστερα $\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$

2. **Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης, να αποδείξετε ότι:**
(i) $A - B = A \cap B^c$, (ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, (iii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Έστω ότι το αποτέλεσμα σε μια εκτέλεση του πειράματος είναι το ω.
Τότε έχουμε διαδοχικά:

(i) $\omega \in (A - B)$ ⇔ (πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A-B)
⇔ (πραγματοποιείται το A **και** δεν πραγματοποιείται το B)
⇔ (πραγματοποιείται το A **και** πραγματοποιείται το B^c)
⇔ (πραγματοποιείται το $A \cap B^c$)
⇔ $\omega \in (A \cap B^c)$
Άρα $A - B = A \cap B^c$

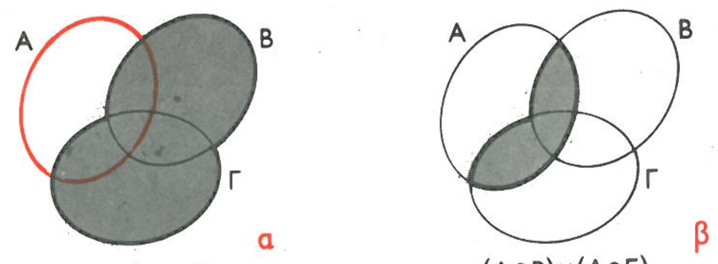
(ii) $\omega \in (A \cap B)^c$ ⇔ $\omega \notin (A \cap B)$ ⇔ (δεν πραγματοποιείται το $A \cap B$)
⇔ (δεν πραγματοποιείται το A **ή** δεν πραγματοποιείται το B)
⇔ (πραγματοποιείται το A^c **ή** πραγματοποιείται το B^c)
⇔ (πραγματοποιείται το $A^c \cup B^c$)
⇔ $\omega \in (A^c \cup B^c)$
Άρα $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(iii) $\omega \in (A \cup B)^c$ ⇔ $\omega \notin (A \cup B)$ ⇔ (δεν πραγματοποιείται το $A \cup B$)
⇔ (δεν πραγματοποιείται το A **και** δεν πραγματοποιείται το B)
⇔ (πραγματοποιείται το A^c **και** πραγματοποιείται το B^c)
⇔ (πραγματοποιείται το $A^c \cap B^c$)
⇔ $\omega \in (A^c \cap B^c)$
Άρα $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

3. Να δείξετε με τη βοήθεια διαγραμμάτων ότι ισχύουν οι ισότητες:
(i) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$ (ii) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

Με τα σχήματα 3α και 3β εξηγείται η ισότητα (i)

3



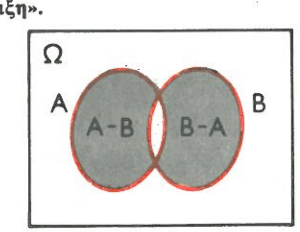
$A \cap (B \cup \Gamma)$ $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

Όμοια δείχνεται η αλήθεια και της ισότητας (ii)

4. Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης, το ενδεχόμενο $(A - B) \cup (B - A)$ πραγματοποιείται, αν και μόνο αν πραγματοποιείται το ένα μόνο από τα A και B. Το ενδεχόμενο αυτό λέγεται *«συμμετρική διαφορά»* των A και B και συμβολίζεται $A \dotplus B$
Στο πείραμα της ρίψης ενός ζαριού θεωρούμε τα ενδεχόμενα
A: «ένδειξη μικρότερη του 4» και B: «περιττή ένδειξη».
Να υπολογίσετε τη συμμετρική διαφορά $A \dotplus B$

4

Είναι $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{1, 3, 5\}$, οπότε
$A - B = \{2\}$ και $B - A = \{5\}$. Άρα
$A \dotplus B = \{2\} \cup \{5\} = \{2, 5\}$



$A \dotplus B$

Ασκήσεις: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Γενικά

6.5 Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά ενός πειράματος τύχης είναι ότι, σε μια εκτέλεσή του, δεν μπορούμε να προβλέψουμε αν θα πραγματοποιηθεί ή όχι ένα ενδεχόμενο A που μας ενδιαφέρει ($A \neq \varnothing$ και $A \neq \Omega$).

Έτσι λοιπόν προκύπτει το ερώτημα: Με ποιά «προσδοκία» περιμένουμε να πραγματοποιηθεί το A σε μια εκτέλεση του πειράματος;

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να δώσουμε απάντηση σ' αυτό το ερώτημα.

Η σχετική συχνότητα ως μέτρο πιθανότητας

6.6 Ας υποθέσουμε ότι εκτελούμε ένα πείραμα ν φορές και έστω ν_A η συχνότητα με την οποία πραγματοποιείται ένα ενδεχόμενο A. Τότε ορίζεται για κάθε $A \subseteq \Omega$ η σχετική συχνότητα $f_A = \dfrac{\nu_A}{\nu}$ του A για την οποία, ισχύουν:

$$0 \leqslant f_A \leqslant 1 \qquad (1)$$

$$f_\Omega = 1 \qquad (2)$$

$$\text{Αν } A \cap B = \varnothing, \text{ τότε } f_{A \cup B} = f_A + f_B \qquad (3)$$

Πράγματι:

- Επειδή είναι $0 \leqslant \nu_A \leqslant \nu$, θα έχουμε $\dfrac{0}{\nu} \leqslant \dfrac{\nu_A}{\nu} \leqslant \dfrac{\nu}{\nu}$ ή $0 \leqslant f_A \leqslant 1$
- Είναι $\nu_\Omega = \nu$, οπότε $f_\Omega = \dfrac{\nu}{\nu} = 1$
- $f_{A \cup B} = \dfrac{\nu_A + \nu_B}{\nu} = \dfrac{\nu_A}{\nu} + \dfrac{\nu_B}{\nu} = f_A + f_B$

Η σχετική συχνότητα έχει και μια άλλη ενδιαφέρουσα ιδιότητα, όπως φαίνεται στο επόμενο πείραμα ρίψης ενός ζαριού.

Είναι γνωστό ότι δειγματικός χώρος του πειράματος είναι το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Στους πίνακες 1 και 2 δίνονται οι συχνότητες και οι σχετικές συχνότητες με τις οποίες εμφανίστηκαν(1) οι έδρες 1, 2, 3, 4, 5, 6 στις $\nu = 25, 50, 100, 200, \ldots, 12800$ πρώτες ρίψεις του ζαριού.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1
Οι συχνότητες των 1, 2, ..., 6 στις πρώτες
$\nu = 25, 50, \ldots, 12800$ ρίψεις

Έδρα ζαριού	$\nu = 25$	50	100	200	400	800	1600	3200	6400	12800
1	7	14	24	44	73	156	301	592	1189	2377
2	5	13	24	41	83	146	308	604	1155	2299
3	4	6	16	33	80	177	340	665	1338	2649
4	5	9	19	34	57	108	214	451	874	1748
5	2	2	4	15	41	92	196	424	940	1912
6	2	6	13	33	66	121	241	464	904	1815

Σημείωση

Από τον Πίνακα 1 φαίνεται ότι το ζάρι του πειράματος δεν ήταν συμμετρικό και ομοιογενές.

(1) Τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικά. Δηλαδή το πείραμα επαναλήφθηκε πράγματι 12800 φορές και έδωσε τα αποτελέσματα του πίνακα 1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

Οι σχετικές συχνότητες των 1, 2, ..., 6 στις
πρώτες $\nu = 25, 50, \ldots, 12800$ ρίψεις

Έδρα ζαριού	ν = 25	50	100	200	400	800	1600	3200	6400	12800
1	0,280	0,280	0,240	0,220	0,183	0,195	0,188	0,185	0,186	0,186
2	0,200	0,260	0,240	0,205	0,207	0,183	0,193	0,189	0,180	0,179
3	0,160	0,120	0,160	0,165	0,200	0,221	0,212	0,203	0,209	0,207
4	0,200	0,180	0,190	0,170	0,143	0,135	0,134	0,141	0,137	0,137
5	0,080	0,040	0,040	0,075	0,102	0,115	0,122	0,132	0,147	0,149
6	0,080	0,120	0,130	0,165	0,165	0,151	0,151	0,145	0,141	0,142

Από τον πίνακα 2 προκύπτει αμέσως ότι καθώς το ν αυξάνει, οι «διακυμάνσεις» της σχετικής συχνότητας κάθε ένδειξης ελαττώνονται. Έτσι π.χ., αν μας αρκεί προσέγγιση ενός εκατοστού για κάθε σχετική συχνότητα, η σχετική συχνότητα της ένδειξης «6» σταθεροποιείται στο 0,14 από τις 3200 ρίψεις και πέρα, ενώ αν θέλουμε προσέγγιση χιλιοστού, η σχετική συχνότητα της ένδειξης 4 σταθεροποιείται στο 0,137 μετά τις 6400 ρίψεις. Δηλαδή, όταν το ν αυξάνει, η σχετική συχνότητα κάθε ένδειξης, μέχρι ορισμένο δεκαδικό ψηφίο της, από κάποια τιμή του ν και πέρα σταθεροποιείται σε έναν αριθμό.

Είναι λοιπόν λογικό να δεχτούμε ότι, όταν το ν αυξάνεται απεριόριστα, τότε η σχετική συχνότητα με την οποία πραγματοποιείται το στοιχειώδες ενδεχόμενο $E_\lambda = \{\lambda\}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, 6$, τείνει να σταθεροποιηθεί προς ορισμένο αριθμό (όχι τον ίδιο για κάθε ένδειξη). Το συμπέρασμα αυτό ισχύει και για οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α.

Αν π.χ. $A = \{1, 2\} = \{1\} \cup \{2\}$, από τον πίνακα 2 προκύπτει ότι η f_A σταθεροποιείται, αν περιοριστούμε στα δύο πρώτα δεκαδικά ψηφία, στον αριθμό 0,37. Επειδή λοιπόν η σχετική συχνότητα f_A σταθεροποιείται σε ένα σταθερό αριθμό, όταν το ν αυξάνεται απεριόριστα, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως **«μέτρο της προσδοκίας»** με την οποία περιμένουμε την πραγματοποίηση του Α σε μια εκτέλεση του πειράματος.

Η έννοια της πιθανότητας

6.7 Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Το βασικό πρόβλημα που τίθεται είναι να «μετρήσουμε» για κάθε ενδεχόμενο του πειράματος την προσδοκία πραγματοποίησής του. Αυτό σημαίνει να αντιστοιχίσουμε σε

κάθε $A \subseteq \Omega$ ένα συγκεκριμένο πραγματικό αριθμό P(A). Με άλλα λόγια να ορίσουμε μια πραγματική συνάρτηση:

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση P δε μπορεί να είναι αυθαίρετη. Είναι εύλογο να δεχτούμε ότι για κάθε Α η τιμή της P(A) έχει τις ιδιότητες της σχετικής συχνότητας f_A που και αυτή, όπως είδαμε, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως *«μέτρο προσδοκίας»* για την πραγματοποίηση του Α. Έτσι δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ **Αν $\Omega \neq \varnothing$ είναι ένας δειγματικός χώρος, ονομάζουμε *μέτρο πιθανότητας* ή *πιθανότητα* κάθε συνάρτηση $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για $A, B \subseteq \Omega$ ισχύουν τα εξής:**

- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ (1)
- $P(\Omega) = 1$ (2)
- Αν $A \cap B = \varnothing$, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (3)

Ο αριθμός P(A) λέγεται **πιθανότητα** του ενδεχομένου Α.

Η τριάδα $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ονομάζεται **χώρος πιθανότητας**.

Από την ισότητα (3), που εκφράζει την *προσθετική ιδιότητα* της πιθανότητας, αποδεικνύεται επαγωγικά η παρακάτω πρόταση:

Αν τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα, τότε

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_\nu) \quad (4)$$

Εξάλλου, επειδή $\Omega \cup \varnothing = \Omega$, θα έχουμε $P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega)$ ή $P(\Omega) + P(\varnothing) = P(\Omega)$. Άρα

$$\boxed{P(\varnothing) = 0} \quad (5)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Σε κάθε χώρο πιθανότητας μπορούμε, όπως φαίνεται και στο επόμενο παράδειγμα, να ορίσουμε περισσότερα από ένα μέτρα πιθανότητας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στο πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος μια φορά, δειγματικός χώρος είναι το σύνολο $\Omega = \{K, \Gamma\}$.

Άρα $\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \Omega, \{K\}, \{\Gamma\}\}$

Για να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας, αρκεί να καθορίσουμε, σύμφωνα με τον ορισμό, τους αριθμούς $P(\varnothing)$, $P(\Omega)$, $P(\{K\})$ και $P(\{\Gamma\})$.

Αλλά $P(\Omega) = 1$ και $P(\varnothing) = 0$

ενώ για τα ενδεχόμενα $\{K\}$ και $\{\Gamma\}$ έχουμε $\{K\} \cap \{\Gamma\} = \varnothing$ και $\{K\} \cup \{\Gamma\} = \Omega$. Άρα, αν

$$P(K) = p^{(1)},\ P(\Gamma) = q,$$

θα είναι $p+q = 1$.

Η εξίσωση $p+q = 1$ έχει άπειρες λύσεις, οπότε το μέτρο πιθανότητας μπορεί να οριστεί με πολλούς τρόπους, αρκεί κάθε φορά να είναι $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$ και $P(K)+P(\Gamma) = 1$.

Αν π.χ. το νόμισμα είναι συμμετρικό και ομοιογενές, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι $p = q$, οπότε η P ορίζεται από τις ισότητες

$$P(\Omega) = 1,\ P(\varnothing) = 0,\quad P(K) = P(\Gamma) = \frac{1}{2}$$

Ισοπίθανα ενδεχόμενα

6.8 Έστω ότι επαναλαμβάνουμε το πείραμα της ρίψης ενός ζαριού, αλλά αυτή τη φορά με ένα ζάρι συμμετρικό και ομοιογενές (*αμερόληπτο*). Είναι τότε λογικό να δεχτούμε ότι οι έξι ενδείξεις $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης, δηλαδή, όπως λέμε, τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του πειράματος είναι **ισοπίθανα**. Τότε, επειδή είναι:

$\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\} = \Omega$ και $P(\Omega) = 1$, θα είναι

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$ και συνεπώς

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

Γενικότερα, ας υποθέσουμε ότι σ' ένα δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ τα στοιχειώδη ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, ..., \{\omega_\nu\}$ είναι ισοπίθανα, δηλαδή $P(\omega_\kappa) = p$ για κάθε $\kappa = 1, 2, ..., \nu$. Τότε, επειδή τα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, ..., \{\omega_\nu\}$ αποτελούν μια διαμέριση του Ω, σύμφωνα με την προσθετική ιδιότητα της πιθανότητας θα έχουμε:

$P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_\nu) = 1$ ή $\nu \cdot p = 1$, απ' όπου προκύπτει $p = \frac{1}{\nu}$. Δηλαδή

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = ... = P(\omega_\nu) = \frac{1}{\nu}$$

Έστω τώρα ένα ενδεχόμενο A με $N(A) = \mu$, π.χ. το $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\mu\}$.

Επειδή[2] τα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, ..., \{\omega_\mu\}$ αποτελούν μια διαμέριση του A, θα έχουμε

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_\mu) = \mu\frac{1}{\nu} = \frac{\mu}{\nu}$$

(1) Στα επόμενα, για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό, αντί του ορθού $P(\{K\})$ θα γράφουμε $P(K)$.

(2) Τα στοιχεία του A τα λέμε και ευνοϊκές περιπτώσεις (για την πραγματοποίηση) του A.

Είναι δηλαδή

$$\boxed{P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\text{πλήθος στοιχείων του A}}{\text{πλήθος στοιχείων του } \Omega}} \quad (6)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στο πείραμα της ρίψης ενός αμερόληπτου νομίσματος 3 φορές, στο οποίο είναι

$$\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\},$$

θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
A: «δύο ενδείξεις K» $= \{KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}$ και
B: «διαδοχικές ενδείξεις διαφορετικές» $= \{K\Gamma K, \Gamma K\Gamma\}$.

Επειδή είναι λογικό να υποθέσουμε ότι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, θα είναι $P(A) = \frac{3}{8}$ και $P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Από μια τράπουλα με 32 φύλλα (λείπουν τα δυάρια, τριάρια, ... εξάρια) παίρνουμε συγχρόνως 2 φύλλα. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου A: «το ένα τουλάχιστο από τα δύο φύλλα είναι άσος»;**

Ο δειγματικός χώρος Ω είναι το σύνολο όλων των συνδυασμών των ενδείξεων των 32 φύλλων ανά 2. Άρα $N(\Omega) = \binom{32}{2} = \frac{32\cdot 31}{2} = 496$

Υποθέτουμε ότι παίρνουμε τα δύο φύλλα στην τύχη, οπότε τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Άρα θα είναι $P(\omega_i) = \frac{1}{496}$, όπου $\{\omega_i\}$ είναι ένα στοιχειώδες ενδεχόμενο.
Θεωρούμε τώρα τα ενδεχόμενα
B: «και τα δύο φύλλα άσοι» και Γ: «το ένα μόνο φύλλο άσος».

Παρατηρούμε ότι είναι $B \cap \Gamma = \varnothing$ και $B \cup \Gamma = A$, οπότε $P(A) = P(B) + P(\Gamma)$

Αλλά $N(B) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$, οπότε $P(B) = \frac{6}{496}$

Κάθε στοιχείο του Γ περιέχει δυο φύλλα, από τα οποία το ένα είναι άσος και το άλλο είναι ένα οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα $32-4 = 28$ φύλλα της τράπουλας. Άρα

$N(\Gamma) = \binom{4}{1}\binom{28}{1} = 112$, οπότε $P(\Gamma) = \frac{112}{496}$

Επομένως είναι τελικά: $P(A) = \frac{6}{496} + \frac{112}{496} = \frac{118}{496} \simeq 0{,}238$

2. **Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα ν φορές. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου A: «οι ενδείξεις σε δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές ρίψεις είναι διαφορετικές».**

Τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω είναι οι διατάξεις με επανάληψη των 2 όψεων (K ή Γ) ανά ν. Επομένως $N(\Omega) = 2^\nu$. Τα στοιχεία του A είναι δύο, το ΚΓΚΓΚΓ.... και το ΓΚΓΚΓΚ...., δηλαδη $N(A) = 2$.

'Αρα $P(A) = \frac{2}{2^\nu} = \frac{1}{2^{\nu-1}}$

Ασκήσεις: 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18

'Αλλες ιδιότητες της πιθανότητας

6.9 'Εστω ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω. Στηριζόμενοι στον ορισμό της πιθανότητας αποδεικνύουμε τις επόμενες ιδιότητες.

1. Για κάθε $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ισχύει

$$\boxed{P(A^c) = 1 - P(A)} \qquad (7)$$

Είναι $A \cap A^c = \varnothing$ και $A \cup A^c = \Omega$, οπότε έχουμε:

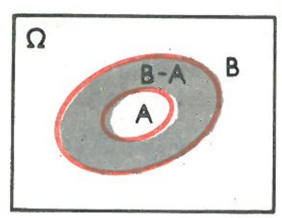
$$P(A \cup A^c) = P(\Omega) \Leftrightarrow P(A) + P(A^c) = 1 \Leftrightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$$

2. Για κάθε $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ ισχύουν οι συνεπαγωγές

$$\boxed{\begin{array}{l} A \subseteq B \Rightarrow P(B-A) = P(B) - P(A) \\ A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B) \end{array}} \qquad (8)$$

Επειδή (σχ. 5) είναι
$A \cap (B-A) = \varnothing$ και $A \cup (B-A) = B$, θα έχουμε
$P[A \cup (B-A)] = P(B) \Leftrightarrow P(A) + P(B-A) = P(B)$
$\Leftrightarrow P(B-A) = P(B) - P(A)$
Αλλά από τον ορισμό της πιθανότητας προκύπτει ότι $P(B-A) \geqslant 0$.
'Αρα θα είναι και
$P(B) - P(A) \geqslant 0$ ή $P(A) \leqslant P(B)$

5



3. Αν $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, τότε:

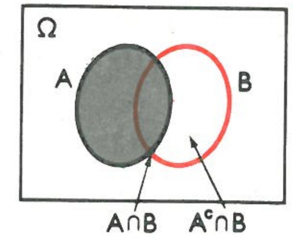
$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I.} & P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) \\ \text{II.} & P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array}} \qquad (9)$$

I. Είναι (σχ. 6) $(A \cap B) \cup (A-B) = A$
και $(A \cap B) \cap (A-B) = \varnothing$
'Αρα $P(A) = P(A \cap B) + P(A-B)$
οπότε $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

II. Είναι (σχ. 6) $A \cup B = B \cup (A-B)$
και $B \cap (A-B) = \varnothing$
'Αρα $P(A \cup B) = P(B) + P(A-B)$
και λόγω της (I)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

6



Η (9_{II}) είναι γνωστή ως *προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων.*

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Από ένα κουτί που περιέχει 7 κόκκινες, 6 άσπρες και 3 μαύρες σφαίρες βγάζουμε στην τύχη μία. Ποια είναι η πιθανότητα να βγει σφαίρα: (i) κόκκινη, (ii) άσπρη, (iii) μαύρη, (iv) όχι κόκκινη, (v) κόκκινη ή άσπρη.

Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από τις $7+6+3 = 16$ διαφορετικές σφαίρες. Επειδή η εξαγωγή γίνεται στην τύχη, όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Αν συμβολίσουμε λοιπόν με Κ, Α, Μ τα ενδεχόμενα να βγει κόκκινη, άσπρη, μαύρη σφαίρα αντιστοίχως, θα έχουμε:

(i) $P(K) = \frac{7}{16}$, (ii) $P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$, (iii) $P(M) = \frac{3}{16}$

(iv) P (όχι κόκκινη) $= P(K^c) = 1 - P(K) = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$

(v) P (κόκκινη ή άσπρη) $= P(K \cup A) = P(K) + P(A) = \frac{7}{16} + \frac{6}{16} = \frac{13}{16}$

2. Αν Α, Β, Γ είναι ενδεχόμενα ενός χώρου πιθανοτήτων, να αποδείξετε την ισότητα

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)$$

Με τη βοήθεια της ισότητας (9_{II}) έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup \Gamma) &= P[(A \cup B) \cup \Gamma] = P(A \cup B) + P(\Gamma) - P[(A \cup B) \cap \Gamma] \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(\Gamma) - P[(A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)]^{(1)} \\ &= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - [P(A \cap \Gamma) + P(B \cap \Gamma) - P[(A \cap \Gamma) \cap (B \cap \Gamma)]] \\ &= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma) \end{aligned}$$

Ασκήσεις: 19, 20, 21, 22

(1) Η τομή ενδεχομένων είναι επιμεριστική ως προς την ένωση)§ 6.4, εφ. 3).

Δεσμευμένη πιθανότητα

6.10 Ας εξετάσουμε μια οικογένεια που έχει 3 παιδιά ως προς το γένος και τη σειρά γέννησης των παιδιών της. Το αποτέλεσμα της εξέτασης αυτής θα είναι ένα από τα στοιχεία του συνόλου

$$\Omega = \{\alpha\alpha\alpha, \alpha\alpha\kappa, \alpha\kappa\alpha, \alpha\kappa\kappa, \kappa\alpha\alpha, \kappa\alpha\kappa, \kappa\kappa\alpha, \kappa\kappa\kappa\}$$

όπου π.χ. το στοιχείο ακκ σημαίνει ότι το πρωτότοκο παιδί είναι αγόρι και τα άλλα δύο κορίτσια.

Αν υποθέσουμε ότι τα αγόρια και τα κορίτσια γεννιούνται με την ίδια συχνότητα, τότε είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα.

Έτσι, αν θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα:
A: «το πρωτότοκο παιδί είναι αγόρι» = {ααα, αακ, ακα, ακκ}
B: «τα δυο τουλάχιστο παιδιά είναι αγόρια» = {ααα, αακ, ακα, καα},
σύμφωνα με την ισότητα (6) της § 6.8, θα είναι

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{1}{2}$$

Ποια είναι όμως η πιθανότητα του B, αν είναι γνωστό ότι έχει ήδη πραγματοποιηθεί το A; Με άλλα λόγια, ποια είναι η πιθανότητα ότι η οικογένεια που εξετάζουμε έχει δυο τουλάχιστο αγόρια, αν είναι γνωστό ότι το πρωτότοκο παιδί της είναι αγόρι;

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό σκεφτόμαστε ως εξής: Αφού ξέρουμε ότι το πρωτότοκο παιδί είναι αγόρι, πρέπει τις ευνοϊκές περιπτώσεις του B να τις αναζητήσουμε ανάμεσα στα στοιχεία του A. Έτσι ο δειγματικός χώρος Ω περιορίζεται στο A και το ενδεχόμενο B στο $A \cap B$ = {ααα, αακ, ακα}. Τότε βρίσκουμε εύκολα ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το B είναι $\frac{3}{4}$

Με το συλλογισμό αυτό υπολογίσαμε την πιθανότητα του B με την προϋπόθεση ότι το ενδεχόμενο A έχει ήδη πραγματοποιηθεί.

Η πιθανότητα αυτή λέγεται **δεσμευμένη πιθανότητα του B με δεδομένο το A** και συμβολίζεται **$P(B|A)$**.

Έτσι έχουμε:

$$P(B|A) = \frac{3}{4}$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι γενικά είναι $P(B|A) \neq P(B)$

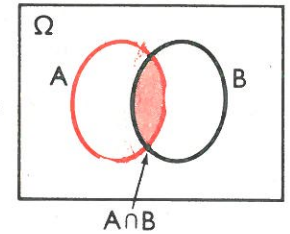
Γενικότερα, έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$ ένας δειγματικός χώρος με $P(\omega_i) = \frac{1}{k}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ και δυο ενδεχόμενα A, B με $P(A) \neq 0$.

Ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε για τη δεσμευμένη πιθανότητα του B με δεδομένο το A. Αφού είναι γνωστό ότι το A έχει ήδη πραγματοποιηθεί, ο αρχικός δειγματικός χώρος Ω περιορίζεται στο A και επομένως το B περιορίζεται στο $A \cap B$ (σχ. 7).

Άρα θα είναι

$$P(B|A) = \frac{N(A \cap B)}{N(A)} = \frac{\dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}}{\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

7



Έχουμε λοιπόν

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \qquad (10)$$

Ύστερα από την προηγούμενη ανάλυση καταλήγουμε στον επόμενο ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας:

ΟΡΙΣΜΟΣ **Αν A, B είναι δυο ενδεχόμενα ενός χώρου πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ και $P(A) \neq 0$, τότε ο αριθμός**

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ονομάζεται *δεσμευμένη πιθανότητα του B με δεδομένο το A*.

Αν είναι και $P(B) \neq 0$, ορίζεται και η δεσμευμένη πιθανότητα του A με δεδομένο το B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (10')$$

Από τις ισότητες (10) και (10΄) προκύπτει η σχέση

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = P(B)\,P(A|B)} \qquad (11)$$

που είναι γνωστή ως *πολλαπλασιαστικός νόμος των πιθανοτήτων*.

Σημείωση

Αποδεικνύεται ότι αν $P(A) \neq 0$, η απεικόνιση $P_A : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ η οποία σε κάθε $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ αντιστοιχίζει τον αριθμό $P_A(B) = P(B|A)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας (§ 7.7, ορισμός)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε διαδοχικά δύο (i) χωρίς επανατοποθέτηση του πρώτου (ii) με επανατοποθέτηση του πρώτου. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι και τα δύο χαρτιά άσοι;

Έστω τα ενδεχόμενα.
A: «το πρώτο χαρτί άσος» και B: «το δεύτερο χαρτί άσος»
Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cap B$. Από τη σχέση (ΙΙ) έχουμε

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(i) Αν δεν ξανατοποθετήσουμε το πρώτο χαρτί, είναι

$$P(A) = \frac{4}{52} \text{ και } P(B|A) = \frac{3}{51}. \text{ 'Αρα } P(A \cap B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

(ii) Αν ξανατοποθετήσουμε το πρώτο χαρτί, είναι

$$P(A) = \frac{4}{52} \text{ και } P(B|A) = P(B) = \frac{4}{52}. \text{ 'Αρα } P(A \cap B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

2. Ένα κουτί I περιέχει 4 κόκκινες και 3 άσπρες σφαίρες, ενώ ένα άλλο κουτί II περιέχει 5 κόκκινες και 4 άσπρες. Ρίχνουμε ένα νόμισμα και αν έρθει κεφαλή (Κ) βγάζουμε μια σφαίρα από το κουτί I, ενώ αν έρθει γράμματα (Γ) βγάζουμε μια σφαίρα από το κουτί II. Ποια είναι η πιθανότητα να βγει κόκκινη σφαίρα;

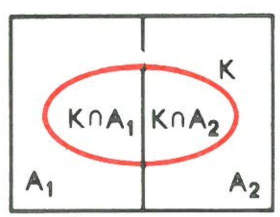
Έστω τα ενδεχόμενα A_1: «η σφαίρα προέρχεται από το κουτί I»
A_2: «η σφαίρα προέρχεται από το κουτί II»
K : «η σφαίρα είναι κόκκινη»

Τα ενδεχόμενα A_1 και A_2 είναι συμπληρωματικά, οπότε, όπως φαίνεται και από το σχήμα, είναι $(K \cap A_1) \cup (K \cap A_2) = K$ και
$(K \cap A_1) \cap (K \cap A_2) = \varnothing$. Άρα
$P(K) = P(K \cap A_1) + P(K \cap A_2)$

$$= P(A_1)P(K|A_1) + P(A_2)P(K|A_2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{71}{126}$$

8



3. Αν A, B, Γ είναι τρία ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης, τότε

$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)\, P(B|A)\, P(\Gamma|A \cap B)$

Είναι $P(A \cap B \cap \Gamma) = P[(A \cap B) \cap \Gamma] = P(A \cap B)\, P(\Gamma|A \cap B)$
$= P(A)\, P(B|A)\, P(\Gamma|A \cap B)$

Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_\nu) = P(A_1)P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_\nu|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{\nu-1})$$

Ασκήσεις: 23, 24, 25, 26, 27

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

6.11 Ας υποθέσουμε πάλι ότι εκτελούμε το πείραμα της ρίψης ενός αμερόληπτου νομίσματος δυο φορές. Ως γνωστό ο δειγματικός χώρος είναι

$$\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$$

Επειδή το νόμισμα είναι αμερόληπτο, θα έχουμε

$$P(KK) = P(K\Gamma) = P(\Gamma K) = P(\Gamma\Gamma) = \frac{1}{4}$$

Έστω ακόμη και τα ενδεχόμενα
A : «οι δύο ενδείξεις είναι ίδιες» = {ΚΚ, ΓΓ}
B : «η πρώτη ένδειξη είναι Κ» = {ΚΚ, ΚΓ}
Γ : «τουλάχιστο μια ένδειξη είναι Κ» = {ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ}.

Έχουμε:

$$P(A) = \frac{2}{4}, \quad P(B) = \frac{2}{4}, \quad P(\Gamma) = \frac{3}{4}$$

Επειδή είναι $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ και $P(\Gamma) \neq 0$, ορίζονται και οι δεσμευμένες πιθανότητες:

$$P(A|\Gamma) = \frac{P(A \cap \Gamma)}{P(\Gamma)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \neq P(A)$$

$$P(\Gamma|\bar{A}) = \frac{P(A \cap \Gamma)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2} \neq P(\Gamma)$$

και

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2} = P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2} = P(B)$$

Παρατηρούμε ότι είναι $P(A|\Gamma) \neq P(A)$ και $P(\Gamma|A) \neq P(\Gamma)$, ενώ

$$P(A|B) = P(A) \text{ και } P(B|A) = P(B)$$

Δηλαδή για τα ενδεχόμενα A και B, η πληροφορία ότι πραγματοποιήθηκε το ένα δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.

Δυο τέτοια ενδεχόμενα τα λέμε **ανεξάρτητα**.

Για τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα A και B έχουμε ακόμη

$$P(A) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ή

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)} \qquad (12)$$

Η ισότητα (12) ισχύει και όταν είναι $P(A) = 0$ ή $P(B) = 0$. Πράγματι, επειδή $A \cap B \subseteq A$, είναι $P(A \cap B) \leqslant P(A) = 0$. Άρα $P(A \cap B) = 0$ και η (12) ισχύει.

Για να συμπεριλάβουμε στον ορισμό της ανεξαρτησίας και την περίπτωση που είναι $P(A) = 0$ ή $P(B) = 0$, δίνουμε τον επόμενο ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ **Δυο ενδεχόμενα A και B ενός χώρου πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ονομάζονται *ανεξάρτητα ενδεχόμενα,* όταν είναι**

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε στην τύχη ένα. Τα ενδεχόμενα A: ντάμα και B: κούπα είναι ανεξάρτητα, γιατί αν θεωρήσουμε και το $A \cap B$: ντάμα κούπα, θα είναι:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}, \; P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \text{ και } P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

Δηλαδή $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{52} = P(A \cap B)$

Ασκήσεις: 28, 29, 30

Ανεξαρτησία ενδεχομένων περισσότερων από δύο

6.12 Έστω το πείραμα της ρίψης ενός αμερόληπτου νομίσματος τρεις φορές, που ο δειγματικός χώρος του είναι το σύνολο:

$$\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$$

Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα

A_1: «πρώτη ρίψη Γ» = {ΓΓΓ, ΓΓΚ, ΓΚΓ, ΓΚΚ}
A_2: «δεύτερη ρίψη Γ» = {ΓΓΓ, ΓΓΚ, ΚΓΓ, ΚΓΚ}
A_3: «τρίτη ρίψη Κ» = {ΚΚΚ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΓΓΚ}

Παρατηρούμε ότι:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Επίσης

$A_1 \cap A_2$ = {ΓΓΓ, ΓΓΚ}, $A_2 \cap A_3$ = {ΓΓΚ, ΚΓΚ}, $A_3 \cap A_1$ = {ΓΓΚ, ΓΚΚ}

οπότε θα είναι:

$$\left.\begin{array}{lll} & P(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1)P(A_2) \\ \text{Ομοίως} & P(A_2 \cap A_3) \quad = \quad P(A_2)P(A_3) \\ \text{και} & P(A_3 \cap A_1) \quad = \quad P(A_3)P(A_1) \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Άρα τα A_1, A_2, A_3 είναι ανά δύο ανεξάρτητα.

Αν θεωρήσουμε τώρα και το ενδεχόμενο

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{ΓΓΚ\}$$

είναι $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)$

Δηλαδή για τα ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3 ισχύει και η

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \qquad (14)$$

Τρία ενδεχόμενα για τα οποία ισχύουν οι (13) και (14) ονομάζονται ανεξάρτητα.

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τον ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ **Τρία ενδεχόμενα A, B, Γ ενός πειράματος τύχης ονομάζονται *ανεξάρτητα,* όταν**

- $P(A \cap B) = P(A)P(B), P(B \cap \Gamma) = P(B)P(\Gamma), P(\Gamma \cap A) = P(\Gamma)P(A)$
- $P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma)$

Τρία ενδεχόμενα που είναι ανεξάρτητα ανά δύο, δεν είναι κατ' ανάγκη και ανεξάρτητα.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα A_1, A_2 του προηγούμενου παραδείγματος και επιπλέον το

A_4: «ενδείξεις διαφορετικές κατά τις διαδοχικές ρίψεις» = {ΓΚΓ, ΚΓΚ},

διαπιστώνουμε εύκολα ότι τα A_1, A_2, A_4 είναι ανεξάρτητα ανά δύο.

Αλλά είναι $A_1 \cap A_2 \cap A_4 = \varnothing$ οπότε $P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = 0$, ενώ

$$P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Ἀρα $P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \neq P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_4)$ και συνεπώς τα A_1, A_2, A_4 δεν είναι ανεξάρτητα.

Ο παραπάνω ορισμός της ανεξαρτησίας επεκτείνεται και για ενδεχόμενα περισσότερα από τρία.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

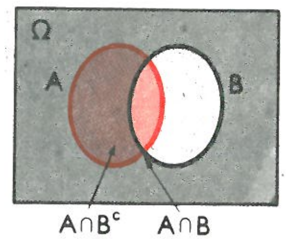
1. Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα A και B με $P(A) \neq 0$ και $P(B) \neq 0$ δεν είναι ανεξάρτητα.

Αφού τα A και B είναι ασυμβίβαστα, θα είναι $A \cap B = \varnothing$.
Ἀρα $P(A \cap B) = 0$, ενώ $P(A)\,P(B) \neq 0$. Επομένως τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.

2. Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα τότε:
(i) Τα A και B^c είναι ανεξάρτητα. (ii) Τα A^c και B^c είναι ανεξάρτητα.

(i) Αφού τα A και B είναι ανεξάρτητα, θα είναι
$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.
Είναι ακόμη (σχ. 9)
$(A \cap B^c) \cap (A \cap B) = \varnothing$ και
$(A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A$. Ἀρα
$P(A \cap B^c) + P(A \cap B) = P(A)$,
οπότε
$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
$= P(A) - P(A)P(B)$
$= P(A)\,(1-P(B)) = P(A)P(B^c)$
Ἀρα τα A και B^c είναι ανεξάρτητα.

9



(ii) Αφού τα B^c και A είναι ανεξάρτητα, θα είναι ανεξάρτητα (βάσει του προηγούμενου) και τα B^c, A^c.

Ασκήσεις: 31, 32

ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΤΥΧΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Δειγματοληψία

6.13 Στο κεφάλαιο αυτό αρκετές φορές χρησιμοποιήσαμε φράσεις όπως π.χ. «παίρνουμε *στην τύχη* κ φύλλα από μια τράπουλα με 52 φύλλα» ή «παίρνουμε *στην τύχη* κ κλήρους από μια κληρωτίδα με ν κλήρους», κτλ. Ακόμη, ξέρουμε ότι προϋπόθεση για την «τυχαία» επιλογή κ φύλλων από μια τράπουλα ή κ κλήρων από μια κληρωτίδα είναι το καλό ανακάτεμα της τράπουλας ή των κλήρων και στη συνέχεια η «τυφλή» επιλογή των κ φύλλων ή κλήρων.

Αλλά η επιλογή κ κλήρων από μια κληρωτίδα με ν κλήρους είναι ένα πείραμα τύχης που ο δειγματικός του χώρος αποτελείται από όλα τα υποσύνολα (ή δείγματα) που μπορούν να σχηματιστούν από το σύνολο (ή πληθυσμό) όλων των κλήρων. Κάθε δείγμα από κ κλήρους είναι ένας συνδυασμός των ν ανά κ και επομένως το πλήθος όλων των δειγμάτων που μπορούν να σχηματιστούν είναι $\binom{\nu}{\kappa} = \dfrac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$

Αν λοιπόν η επιλογή των κλήρων είναι τυχαία, τότε δεν υπάρχει καμιά ιδιαίτερη προτίμηση σ' ένα οποιοδήποτε από τα $\binom{\nu}{\kappa}$ δείγματα και επομένως καθένα απ' αυτά θα έχει την ίδια πιθανότητα επιλογής, η οποία είναι ίση με $\dfrac{1}{\binom{\nu}{\kappa}} = \dfrac{\kappa!(\nu-\kappa)!}{\nu!}$

Όταν ένα δείγμα είναι αποτέλεσμα τυχαίας επιλογής, τότε ονομάζεται ειδικότερα **τυχαίο δείγμα.**

Στο κεφάλαιο της στατιστικής της Ἀλγεβρας Β΄ Λυκείου τονίστηκε ο σημαντικός ρόλος της κατασκευής ή επιλογής ενός τυχαίου δείγματος για τη στατιστική μελέτη ενός πληθυσμού. Γιατί εξετάζοντας τα στοιχεία ενός τυχαίου δείγματος ως προς την ιδιότητα που είναι αντικείμενο της μελέτης μας, μπορούμε να καταλήξουμε σε συμπεράσματα που είναι αξιόπιστα για ολόκληρο τον πληθυσμό, δηλαδή σε συμπεράσματα που ισχύουν με μεγάλη προσέγγιση για ολόκληρο τον πληθυσμό. Είναι φανερό ότι η προσέγγιση αυτή είναι τόσο καλύτερη όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του δείγματος.

Τυχαίοι αριθμοί

6.14 Η επιλογή ενός τυχαίου δείγματος δεν είναι εύκολη εργασία, ιδιαίτερα όταν ο πληθυσμός έχει πολλά στοιχεία. Ἐστω π.χ. ότι από τους 800 μαθητές ενός σχολείου θέλουμε να επιλέξουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους 200 και να το εξετάσουμε ως προς τη μεταβλητή «ανάστημα».

Η επιλογή του δείγματος θα μπορούσε να γίνει με τη βοήθεια μιας κάλπης ως εξής:

- Βάζουμε στην κάλπη 800 κλήρους με τα ονόματα των μαθητών.
- Παίρνουμε τους κλήρους ένα-ένα, αφού κάθε φορά ανακατεύουμε καλά την κάλπη, μέχρι να σχηματίσουμε το δείγμα των 200 μαθητών.

Η διαδικασία αυτή όμως έχει δυο μειονεκτήματα.
(i) Απαιτεί μεγάλη προετοιμασία και αρκετό χρόνο.

(ii) Όσο καλά και να ανακατεύουμε κάθε φορά την κάλπη, δεν είναι σίγουρο ότι όλοι οι μαθητές έχουν την ίδια πιθανότητα επιλογής (π.χ. μπορεί ορισμένοι κλήροι να έχουν «καθήσει» στις γωνίες της κάλπης, οπότε η πιθανότητα να εξαχθούν είναι πολύ μικρότερη από την πιθανότητα των άλλων).

Πρέπει λοιπόν να βρούμε μια σύντομη διαδικασία επιλογής, με την οποία όλοι οι μαθητές να έχουν την ίδια πιθανότητα να συμπεριληφθούν στο δείγμα.

Μια τέτοια «αμερόληπτη» διαδικασία την επιτυγχάνουμε με τη βοήθεια των **τυχαίων αριθμών**.

Οι τυχαίοι αριθμοί σχηματίζονται από τα γνωστά μας ψηφία 0, 1, 2, ..., 9 γραμμένα σε μια σειρά και επιλεγμένα με μια διαδικασία τέτοια, ώστε η πιθανότητα να εμφανιστεί καθένα από τα ψηφία σε μια θέση της σειράς να είναι $^1/_{10}$.

Στον επόμενο πίνακα έχουμε μια σειρά από τυχαίους αριθμούς. (Η διάταξη των αριθμών σε γραμμές και στήλες ανά 5, δεν έχει καμιά σημασία αλλά συνηθίζεται για να είναι ευχερής η ανάγνωσή τους).

78578	51589	83195	56332	75076	58202	58038	38817	63835	13486
89830	60177	94550	10119	09083	33898	29974	67721	75037	70444
89502	88947	99940	60969	79452	91472	12611	41681	95285	44158
11187	95098	50369	94874	19853	06933	69767	88842	35676	49766
47886	49549	64465	14508	28215	47766	03076	25940	47239	93425
21325	89726	96964	66106	68517	67954	16570	72433	91514	79333
59927	79213	96072	64540	59002	26619	02930	83677	26442	97340
44237	30754	59691	34893	92531	70313	24969	14458	91409	79369
35956	31379	21224	20366	74348	66239	32704	41018	31937	84761
58597	14598	23589	50700	96194	15831	08968	45321	04207	34438
99185	70628	95475	94156	39588	57825	36521	85188	64339	27460

Με τη βοήθεια του πίνακα αυτού μπορούμε να πάρουμε εύκολα το τυχαίο δείγμα από τους μαθητές του σχολείου. Για το σκοπό αυτό αριθμούμε τους μαθητές από 1-800. Έτσι σε κάθε μαθητή θα αντιστοιχεί ένας τριψήφιος αριθμός

001, 002, ..., 010, ..., 099, 100, ..., 800

π.χ. ο αριθμός του μητρώου του.

Στη συνέχεια αρχίζοντας από ένα **οποιοδήποτε** ψηφίο του πίνακα των τυχαίων αριθμών, π.χ. απ' αυτό που βρίσκεται στην 5η γραμμή και 37η στήλη, σχηματίζουμε τριψήφιους αριθμούς, τους:

594, 047, 239, 934, 252, 132, ...

προχωρώντας προς τα δεξιά. (Μόλις τελειώνει η 5η γραμμή πάμε στην 6η κτλ.)

Κάθε τριψήφιος αριθμός που βρίσκουμε μ' αυτό τον τρόπο ή είναι μικρότερος (ή ίσος) του 800, οπότε αντιστοιχεί σ' ένα μαθητή, ή είναι μεγαλύτερος του 800, οπότε δεν αντιστοιχεί σε μαθητή και παραλείπεται(1).

Εργαζόμαστε μ' αυτό τον τρόπο μέχρι να πάρουμε ολόκληρο το δείγμα.

6.15 Η παραγωγή τυχαίων αριθμών γίνεται με πολλούς τρόπους. Μια απλή διαδικασία παραγωγής είναι εκείνη με την οποία γίνεται η κλήρωση του πρώτου αριθμού του λαϊκού λαχείου:

Σε μια κληρωτίδα τοποθετούμε 10 ίδια μπαλάκια αριθμημένα με τα ψηφία 0, 1, 2, ..., 9. Η κληρωτίδα μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα και έχει μια ειδική υποδοχή που χωράει ακριβώς ένα μπαλάκι. Γυρίζουμε την κληρωτίδα και όταν σταματήσει παίρνουμε το μπαλάκι που βρίσκεται στην υποδοχή και καταγράφουμε το ψηφίο του.

Επειδή τα μπαλάκια είναι ίδια και η διαδικασία της επιλογής τους αμερόληπτη, είναι λογικό να δεχτούμε ότι $P(i) = \frac{1}{10}$, $i = 0, 1, 2, ..., 9$.

Επομένως, αν επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία πολλές φορές, θα πάρουμε μια σειρά από τυχαίους αριθμούς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Μια κάλπη περιέχει 7 σφαίρες που είναι αριθμημένες με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Παίρνουμε διαδοχικά δύο σφαίρες χωρίς επανατοποθέτηση, δηλαδή χωρίς να ξαναβάζουμε στην κάλπη την πρώτη σφαίρα πριν από την εξαγωγή της δεύτερης. Να βρείτε τον πληθικό αριθμό του δειγματικού χώρου Ω αυτού του πειράματος τύχης.

2. Ένα κιβώτιο περιέχει ν ηλεκτρικούς λαμπτήρες, από τους οποίους οι κ ($\kappa < \nu$) είναι ελαττωματικοί. Δοκιμάζουμε τους λαμπτήρες ένα-ένα και μόλις βρούμε ελαττωματικό σταματάμε. Να βρείτε το δειγματικό χώρο Ω γι' αυτό το πείραμα τύχης και το N(Ω).

3. Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε 3 φύλλα στην τύχη. Να βρείτε τον πληθικό αριθμό του δειγματικού χώρου Ω, αν:

   (i) Παίρνουμε και τα τρία φύλλα συγχρόνως.
   (ii) Παίρνουμε τα φύλλα ένα-ένα, επανατοποθετώντας καθένα από τα δύο πρώτα.
   (iii) Παίρνουμε τα φύλλα ένα-ένα, χωρίς επανατοποθέτηση.

(1) Είναι δυνατό να βρούμε ένα τριψήφιο αριθμό 2 φορές, οπότε τη δεύτερη φορά παραλείπεται.

4. Να βρείτε τον πληθικό αριθμό του δειγματικού χώρου Ω στο πείραμα τύχης: «12 διαφορετικά βιβλία τα μοιράζουμε εξίσου σε 4 μαθητές Α, Β, Γ, Δ»

5. Μια οικογένεια έχει τρία παιδιά. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα
Α: «το μεσαίο παιδί είναι αγόρι» Β: «το μικρότερο παιδί είναι κορίτσι»
(i) Να βρείτε το δειγματικό χώρο Ω και τα Α, Β
(ii) Να βρείτε τα A^c, B^c, $A^c \cap B$, $A \cup B^c$, $A^c \cap B^c$

6. Αν είναι $A \subseteq B$, να αποδείξετε ότι:
(i) $A \cap B = A$ (ii) $A \cup B = B$ (iii) $A\text{-}B = \varnothing$

7. Έστω Α, Β, Γ τρία ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Να βρείτε το ενδεχόμενο, που πραγματοποιείται όταν:
(i) Πραγματοποιείται τουλάχιστο ένα από τα Α, Β, Γ
(ii) Πραγματοποιείται (ακριβώς) ένα από τα Α, Β, Γ
(iii) Πραγματοποιούνται (ακριβώς) δύο από τα Α, Β, Γ.
(iv) Δεν πραγματοποιούνται συγχρόνως και τα τρία.

8. Από μία τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε στην τύχη ένα. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα
Α: «άσος» και Β: «κούπα». Να περιγράψετε τα ενδεχόμενα $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cup B^c$, Α-Β και να βρείτε τον πληθικό αριθμό τους.

9. Αν Α, Β, Γ είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης, να αποδείξετε ότι:
(i) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$
(ii) $(A \cap B^c) \cup (A \cap \Gamma^c) = A \cap (B \cap \Gamma)^c$
(iii) $(A \cup B^c) \cap (A \cup \Gamma^c) = A \cup (B \cup \Gamma)^c$

10. Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος τύχης να δείξετε ότι:
(i) $A^c\text{-}B^c = B\text{-}A$
(ii) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup (B\text{-}A) = B$

11. Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης, να αποδείξετε ότι:
(i) $(A\text{-}B)^c = A^c \cup B$
(ii) $(A \dagger B)^c = (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$

12. Από ένα κλουβί που περιέχει 8 αρσενικά και 6 θηλυκά καναρίνια παίρνουμε στην τύχη συγχρόνως δύο καναρίνια. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων Α: «τα καναρίνια είναι του ίδιου φύλου» και Β: «τα καναρίνια είναι διαφορετικού φύλου».

13. Ρίχνουμε ένα ζάρι δυο φορές. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
Α: «το άθροισμα των δυο ενδείξεων είναι 7»
Β: «το άθροισμα των δυο ενδείξεων είναι μεγαλύτερο από 7»
Γ: «Η πρώτη ένδειξη είναι διπλάσια από τη δεύτερη».

14. Οι ένορκοι σ' ένα δικαστήριο αποτελούνται από 5 άτομα που επιλέγονται στην τύχη από ένα κατάλογο 10 αντρών και 7 γυναικών. Ποια η πιθανότητα οι ένορκοι να είναι:
(i) Όλοι άντρες (ii) 3 άντρες και 2 γυναίκες (iii) Τουλάχιστο τρεις γυναίκες.

15. Παίρνουμε στην τύχη 3 βιβλία από ένα ράφι στο οποίο βρίσκονται 4 μυθιστορήματα 3 ποιητικές συλλογές και 1 λεξικό. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
Α: «ένα από τα 3 βιβλία είναι το λεξικό»
Β: «τα 2 είναι μυθιστορήματα και το 1 ποιητική συλλογή».

16. Σε μια κληρωτίδα έχουμε 10 κλήρους αριθμημένους από το 0 ως το 9. Παίρνουμε διαδοχικά με επανατοποθέτηση τρεις κλήρους. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε
(i) τρεις ίδιους αριθμούς (ii) τρεις διαφορετικούς αριθμούς.

17. Ρίχνουμε ένα ζάρι τρεις φορές. Ποιά η πιθανότητα οι ενδείξεις που θα εμφανιστούν να είναι διαδοχικοί αριθμοί;

18. Έστω $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ένας χώρος πιθανοτήτων με $\Omega = \{x, y, \omega, z\}$
(i) Να βρείτε το $P(y)$, αν $P(x) = \frac{1}{2}$, $P(\omega) = \frac{1}{4}$, $P(z) = \frac{1}{8}$
(ii) Να βρείτε τα $P(x)$ και $P(y)$, αν $P(\omega) = P(z) = \frac{2}{5}$ και $P(x) = 3P(y)$
(iii) Να βρείτε το $P(x)$, αν $P(y, z) = \frac{3}{5}$, $P(y, \omega) = \frac{1}{3}$ και $P(y) = \frac{1}{4}$

19. Σε μια ομάδα 5 ατόμων, ποια είναι η πιθανότητα:
(i) Να έχουν γεννηθεί ανά δύο σε διαφορετικούς μήνες.
(ii) Δύο τουλάχιστο άτομα να έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα.

20. Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$ και $P(A \cap B) = 0{,}01$.
Ποια είναι η πιθανότητα:
(i) Να πραγματοποιηθεί τουλάχιστο ένα από τα Α, Β
(ii) Να μη πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β
(iii) Να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα Α, Β

21. Έστω δύο χώροι πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P')$ και δύο θετικοί αριθμοί λ, μ. Ορίζουμε την απεικόνιση $P'' : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $P''(A) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} P(A) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} P'(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.
Να αποδείξετε ότι η P'' είναι συνάρτηση πιθανότητας.

22. Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης, να αποδείξετε ότι $P(A \cap B) \geqslant P(A) - P(B^c)$

23. Μια οικογένεια έχει δύο παιδιά, από τα οποία το ένα είναι αγόρι. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι και το άλλο αγόρι, όταν:
(i) Το αγόρι είναι το μεγαλύτερο παιδί (ii) Δεν ξέρουμε ποιο παιδί είναι το μεγαλύτερο.

24. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές.
(i) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων Α: «και οι δύο ενδείξεις είναι άσοι» και Β: «οι δύο ενδείξεις έχουν άθροισμα 5»
(ii) Αν Γ: «τουλάχιστο ένας άσος», να βρείτε τις πιθανότητες $P(A|\Gamma)$ και $P(B|\Gamma)$.

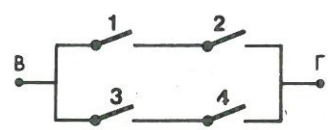
25. Αν $P(A \cap B) \neq 0$ και $P(A) > P(B)$, τότε είναι και $P(A|B) > P(B|A)$

26. Ένα κουτί περιέχει 5 κόκκινες, 6 άσπρες και 3 μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε διαδοχικά τρεις σφαίρες (i) με επανατοποθέτηση, (ii) χωρίς επανατοποθέτηση.
Να βρείτε την πιθανότητα οι σφαίρες να είναι στη σειρά κόκκινη, άσπρη και μαύρη.

27. Έχουμε δυο ζάρια Z_1 και Z_2, από τα οποία το Z_1 έχει 4 έδρες κόκκινες και 2 έδρες άσπρες ενώ το Z_2 έχει 2 έδρες κόκκινες και 4 άσπρες. Ρίχνουμε ένα νόμισμα και συμφωνούμε ότι:
(i) Αν φέρουμε «κεφαλή», παίζουμε μόνο με το ζάρι Z_1
(ii) Αν φέρουμε «γράμματα», παίζουμε μόνο με το ζάρι Z_2.
Ποιά η πιθανότητα να εμφανιστεί κόκκινη έδρα;

28. Ρίχνουμε δύο ζάρια και έστω ν_1 και ν_2 οι ενδείξεις που εμφανίζονται.
(i) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A = \{(\nu_1, \nu_2): \nu_1 \neq \nu_2, \nu_1 \leqslant 4, \nu_2 \leqslant 4\}$, $B = \{(\nu_1, \nu_2): \nu_1+\nu_2 = 7\}$ και $\Gamma = \{(\nu_1, \nu_2): \nu_1+\nu_2 = 6\}$.
(ii) Να εξετάσετε αν είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα Α και Β.
(iii) Ομοίως τα Α και Γ.

29. Η πιθανότητα να είναι κλειστός καθένας από τους διακόπτες του διπλανού κυκλώματος είναι p. Αν οι διακόπτες λειτουργούν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχει ρεύμα ανάμεσα στα σημεία Β και Γ;



30. Έστω Α, Β, Γ ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Να αποδείξετε ότι: αν το Α είναι ανεξάρτητο από τα Β, Γ και $B \cap \Gamma$, τότε θα είναι ανεξάρτητο και από το $B \cup \Gamma$.

31. Να αποδείξετε ότι: αν τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ είναι ανεξάρτητα, τότε και τα ενδεχόμενα
(i) $A, B \cup \Gamma$ (ii) $A, B \cap \Gamma$
είναι ανεξάρτητα.

32. Ρίχνουμε ένα ζάρι 4 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα:
(i) Να μη έρθει κανένα 6 (ii) Να έρθει τουλάχιστο ένα 6.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. Εργαστείτε όπως στην § 1.2.

2. Ομοίως όπως στην άσκηση 1

3. (i) όχι (ii) όχι (iii) όχι

4. $A+B = \begin{bmatrix} 6 & -5 & -3 & 12 \\ 7 & 5 & 13 & 2 \end{bmatrix}$, $B+\Gamma+\Delta = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

5. Να λάβετε υπόψη σας την § 1.4 και την ισότητα πινάκων.
$x = 4$, $y = 0$, $z = -2$, $\omega = -3$.

6. Να λάβετε υπόψη σας τον ορισμό της § 1.4.
(i) $[1 \quad 4 \quad -5]$
(ii) Δεν έχει νόημα
(iii) Δεν έχει νόημα
(iv) $\begin{bmatrix} -8 & 2 & 4 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$

7. Να κάνετε χρήση των § 1.4 - 1.7.

8. Εργαστείτε όπως στην άσκηση 5. $(x = 2, \quad y = 7, \quad z = 0, \quad \omega = 1)$

9. Αν $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & 6 \\ 15/2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, τότε να δείξετε ότι

$$X = -\frac{3}{2}B+2A = \begin{bmatrix} 17/2 & 3/2 & 6 \\ 15/2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

10. Να λάβετε υπόψη σας τον ορισμό και το εποπτικό σχήμα της § 1.8.
(iii) $\begin{bmatrix} 4x+4 & 3x+8 & 4x+12 & 6x+3 \\ 5x+12 & 27 & 37 & 2x+25 \end{bmatrix}$

11. $X = [4]$, $Y = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \\ -6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, $\Omega = \begin{bmatrix} \alpha-2 & 2-\alpha & -\alpha \\ \alpha^2+2 & 3\alpha & \alpha+2 \\ 2\alpha & \alpha^2+4 & \alpha+4 \end{bmatrix}$

$T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 240 & 104 \\ 206 & 125 \end{bmatrix}$

12. Παρατηρείστε ότι τα στοιχεία της πρώτης γραμμής και πρώτης στήλης των γινομένων $A \cdot B$ και $B \cdot A$, είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ διαφορετικά μεταξύ τους.

13. Βρείτε το A^2 και κατόπιν εφαρμόστε τις γνωστές σας ιδιότητες της πρόσθεσης.

14. Μετά την εκτέλεση των πράξεων καταλήγετε σε σύστημα που έχει λύση:

$(x = 2, \quad y = -1)$ ή $(x = -1, \quad y = 2)$

15. Μετά την εκτέλεση των πράξεων καταλήγετε σε σύστημα με λύσεις:

$(y, \omega, z) = (\frac{2}{3}z, 1\text{-}z, z)$

Άρα υπάρχουν άπειροι πίνακες $X = \begin{bmatrix} 1 & {}^2/_3 z \\ z & 1\text{-}z \end{bmatrix}$, τέτοιοι ώστε $A \cdot X = X \cdot A$

16. Ο A έχει τα διαγώνια στοιχεία του ίσα με 0 και όλα τα άλλα ίσα με 1. Ο B έχει τα διαγώνια στοιχεία του ίσα με 3 και όλα τα άλλα 2.

17. Να δείξετε πρώτα ότι $A^2 = A$, $B^2 = I$, $\Gamma^3 = 0$, οπότε $X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

18. $x = 0$

19. Εφαρμόστε τη μέθοδο της επαγωγής

20. (i) $x = {}^7/_{13}$, $y = -{}^6/_{13}$, $z = -{}^6/_{13}$, $\omega = {}^7/_{13}$

(ii) Δεν υπάρχουν x, y, z, ω ώστε να ισχύει η ισότητα.

21. (i) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

22. Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 1 της § 1.5.

23. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

25. $(A+B)^2 = A+B \Leftrightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = A + B \Rightarrow AB + BA = \mathbf{O}$ κτλ.

26. Είναι $I = \frac{1}{11}A^2 + \frac{2}{11}A = A\left(\frac{1}{11}A + \frac{2}{11}I\right) = \left(\frac{1}{11}A + \frac{2}{11}I\right)A$. Άρα ...

27. Εφαρμόστε τη μέθοδο της § 1.16, οπότε βρίσκετε:

(i) $x = -10, \quad y = 7, \quad z = -15$

(ii) $x = 1, \quad y = 0, \quad z = 1$

(iii) $x = 5{,}5, \quad y = 1{,}5, \quad z = 7{,}5.$

28. Εργαστείτε όπως στην προηγούμενη άσκηση οπότε έχετε: $x = \frac{1}{6}, \quad y = \frac{1}{4}, \quad z = \frac{2}{3}$

29. (i) Είναι αδύνατο (ii) είναι αδύνατο.

30. (i) είναι αδύνατο (ii) $\begin{cases} x = -2\omega - 2\varphi + 4 \\ y = 2\omega + \varphi + 1 \\ z = 2\omega + 3\varphi \end{cases}$

31. Παρατηρείστε ότι το σύστημα είναι ομογενές και λάβετε υπόψη σας τις § 1.14 και 1.17.

32. (i) Βρείτε την D (kA) (ii) Βρείτε το γινόμενο A · B και κατόπιν την D(A · B).

33. ΗΡΩΣ ΤΙΝΑ ΧΑΡΗ ΠΟΛΑ $\begin{bmatrix} 119 & 140 \\ 52 & 59 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150 & 35 \\ 64 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 119 & 95 \\ 48 & 41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 59 & 77 \\ 24 & 31 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 16 \\ 14 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 & 13 \\ 2 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 15 \\ 16 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 22 & 15 \end{bmatrix}$, ΑΛΛΑ ΛΗΔΑ ΤΙΝΑ ΦΑΝΗ

34. $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

35. Αν $\lambda \neq \frac{2}{3}$, έχει τη λύση $x = \frac{-\lambda^2 + 3\lambda + 2}{3\lambda - 2}$, $y = \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 8}{3\lambda - 2}$

Αν $\lambda = \frac{2}{3}$, είναι αδύνατο.

36. Εργαστείτε όπως στην προηγούμενη άσκηση. Για $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 7$ είναι

$x = \frac{-2\lambda^2 + 5\lambda - 9}{-\lambda(\lambda - 7)}$, $y = \frac{\lambda^2 - 7\lambda + 18}{-\lambda(\lambda - 7)}$, ενώ για $\lambda = 0$ ή $\lambda = 7$ το σύστημα είναι αδύνατο.

37. (i) Για $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 3$ το σύστημα έχει μία λύση.
(ii) Για $\lambda = 1$ το σύστημα είναι αόριστο.
(iii) Για $\lambda = 3$ το σύστημα είναι αδύνατο.

38. $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = -\frac{5}{3}$.

39. $A = 21$, $B = 0$, $\Gamma = -6$.

40. (i) Εφαρμόστε αρχικά την ιδιότητα 8 § 1.24.
(ii) Να εναλλάξετε αρχικά την πρώτη με την τελευταία στήλη και να εφαρμόσετε έπειτα την ιδιότητα 8 § 1.24.

41. Όμοια με την προηγούμενη άσκηση, οπότε βρίσκετε
(i) $x = -2$ ή $x = 1$ (διπλή ρίζα) (ii) $x = ½$ ή $x = -1$ (διπλή ρίζα)

42. (i) $x = 0$ ή $x = 2^5$
(ii) Για $\alpha = 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για $\alpha \neq 0$ έχει ρίζες 1 και 3.

43. (i) $53\beta - 2\alpha + 4\alpha\beta - 6\beta^2 = 0$ (ii) $(\alpha + 1)\alpha^2 - (\beta - 1)(\beta^2 + \alpha\beta - 1) + \alpha(\beta^2 - 1) = 0$

44. Αρκεί να δείξετε ότι $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & x & x^2 \\ x + x^2 & x^2 + \alpha & x + \alpha \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + \alpha) \cdot 0 = 0$

45. Για $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 2$ το σύστημα είναι αδύνατο
Για $\lambda = 0$ έχει τη λύση: $x = -1, y = -1$
Για $\lambda = 1$ έχει τη λύση: $x = -1, y = 1$
Για $\lambda = 2$ έχει τη λύση: $x = 3, y = -1$

46. (i) $(x, y, z) = (1, -1, 2)$

(ii) Αδύνατο σύμφωνα με την § 1.16

(iii) Άπειρες λύσεις: $(x, y, z) = (2y - \frac{7}{2}, y, -y + \frac{5}{2})$

47. (i) $(x, y, z) = (-10z, z, z)$, (ii) $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

48. Με εφαρμογές των ιδιοτήτων των οριζουσών καταλήγετε σε απλές εξισώσεις οπότε έχετε
(i) $x = -3$ ή $x = 1$ (τριπλή ρίζα)

(ii) $x = \frac{1}{3}$ ή $x = -1$ (τριπλή ρίζα)

49. Με εφαρμογή των ιδιοτήτων των οριζουσών βρίσκετε:
$D_1 = 118$, $D_2 = 0$, $D_3 = -80$

50. Επειδή $D = -176$, $D_x = 352$, $D_y = -176$, $D_z = 528$, $D_\omega = 0$, η λύση είναι

$x = -2$, $y = 1$, $z = -3$, $\omega = 0$.

51. (i) Είναι $D = \lambda - 10$. Σύμφωνα με την § 1.25 είναι: $(x, y, z) = (\frac{2z}{3}, \frac{z}{3}, z)$

(ii) Για $\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -2$ έχει τη λύση $x = -\frac{1}{\lambda+2}$, $y = 1$, $z = -\frac{1}{\lambda+2}$

Για $\lambda = 2$ έχει λύσεις τις $\left(x, \frac{4-4x}{5}, -\frac{3x+2}{5}\right)$

Για $\lambda = -2$ είναι αδύνατο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

1. Με τα κλάσματα π.χ. $\frac{1}{5}$ και $\frac{1}{6}$, να δείξετε ότι το A δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση κλασμάτων στο $\mathbb{Q}$.

2. Δείξτε ότι $(\alpha+\beta\sqrt{3})\cdot(\gamma+\delta\sqrt{3}) \in B$.

3. Το $A_1 \subset \mathbb{R}$ δεν είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{R}$, ενώ το $A_2 \subset \mathbb{R}$ είναι.

4. Το **M** είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση πινάκων 2×2.

5. Με κατάλληλα παραδείγματα δείξτε ότι η $*$ δεν είναι ούτε αντιμεταθετική ούτε προσεταιριστική.

6. Δείξτε ότι $0 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$. Το A είναι κλειστό ως προς την $*$ στο $\mathbb{R}_+^*$ και η $*$ είναι προσεταιριστική.

7. Η $*$ είναι αντιμεταθετική (αντ. προσεταιριστική) αν η $\circ$ είναι αντιμεταθετική (αντ. προσεταιριστική).

8. Το **M** είναι κλειστό ως προς τον πολ/σμό πινάκων. Το $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι το μοναδιαίο στοιχείο.

Η πράξη του πολλαπλασιασμού στο **M** είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.

9. (i) 10, 13, 13, 125, 1157.
(ii) Δεν είναι προσεταιριστική, είναι αντιμεταθετική και δεν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο.

10. Ουδέτερο στοιχείο ως προς την $*$ στο $\mathbb{R}_+^*$ είναι το $\frac{1}{8}$. Το συμμετρικό κάθε $x \in \mathbb{R}_+^*$ είναι το $\frac{1}{64x}$

11. Παρατηρείστε ότι $\beta = \beta \circ e = \beta \circ (\alpha \circ \gamma) = \ldots = \gamma$ κτλ., οπότε σύμφωνα με την § 2.7 το β θα είναι συμμετρικό του α.

12. (i) Δείξτε ότι το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο ως προς την $*$ στο $\mathbb{R}$.
(ii) Παρατηρείστε ότι αν $x' \in \mathbb{R}$ είναι το συμμετρικό του $x \in \mathbb{R}$ τότε $x + x' + x^2x'^2 = 0$ η οποία έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$ ως προς x', όταν $\Delta > 0$ και διπλή ρίζα, όταν $\Delta = 0$.

13. (i) $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i^2$ (ii) $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^3$ (iii) $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \alpha_{i+1}$ (iv) $\sum_{\nu=1}^{99} \nu^3$ (v) $\prod_{i=1}^{5} \alpha_i^2$ (vi) $\prod_{i=1}^{\nu} \alpha_i^3$

14. (i) $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_\nu^2$ (ii) $\sum_{i=1}^{100} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + 100^2$ (iii) $\sum_{k=1}^{\nu} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + \nu^3$

(iv) $\sum_{k=0}^{3} \alpha_k x^k = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$ (v) $\sum_{k=1}^{\nu} k(k+1) = 1 \cdot 2 + \ldots + \nu(\nu+1)$

15. (i) $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\nu-1}) + \alpha_\nu$, (ii) $\sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i + \beta_i) = (\alpha_1 + \beta_1) + \ldots + (\alpha_\nu + \beta_\nu) = \ldots$

(iii) $\sum_{i=1}^{\nu} (\lambda+\alpha_i) = (\lambda+\alpha_1) + (\lambda+\alpha_2) + \ldots + (\lambda+\alpha_\nu) = \ldots$ (iv) $\sum_{i=1}^{\nu} (\lambda\alpha_i) = \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \ldots + \lambda\alpha_\nu = \ldots$

(v) $\prod_{i=1}^{\nu} \alpha_i = (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_{\nu-1})\alpha_\nu = \left(\prod_{i=1}^{\nu-1} \alpha_i\right)\alpha_\nu$

(vi) $\prod_{i=1}^{\nu} (\alpha_i \beta_i) = (\alpha_1 \beta_1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_\nu \beta_\nu) = \ldots = \left(\prod_{i=1}^{\nu} \alpha_i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{\nu} \beta_i\right)$

16. Δείξτε ότι $\alpha^{-1} = \alpha^2$, $\beta^{-1} = \beta^2$ και $\alpha\beta = \beta^{-1}\alpha^{-1}$ κτλ.

17. Είναι $\alpha\beta = \beta\alpha \Leftrightarrow (\alpha\beta)^{-1} = (\beta\alpha)^{-1}$ κτλ.

18. Δείξτε ότι $x = x^{-1}$ κτλ.

19. Να λάβετε υπόψη το θεώρημα της § 2.13.

20. Δείξτε ότι: Αν $x, y \in A$, τότε $xy \in A$. Αν $x \in A$, τότε $\frac{1}{x} \in A$.

21. Χρησιμοποιείστε την III για να δείξετε ότι $\alpha * \beta = \beta * \alpha$. Από την αντιμεταθετικότητα και την III προκύπτει η προσεταιριστικότητα.

22. Δείξτε πρώτα ότι $\gamma \circ \alpha = \gamma \circ \beta \Rightarrow \alpha = \beta$. Κατόπιν ότι $\alpha \circ e = \alpha$. Τέλος ότι για κάθε α υπάρχει το συμμετρικό του.

23. Δείξτε ότι υπάρχει $e \in A$ τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ να είναι $e \circ \alpha = \alpha$. Επίσης ότι για κάθε $\alpha \in A$, υπάρχει $\alpha' \in A$ ώστε $\alpha' \circ \alpha = e$.

24. Δείξτε ότι $G' \neq \varnothing$ και είναι κλειστό ως προς την $\circ$. Επίσης αν $\alpha \in G'$ τότε $\alpha' \in G'$.

25. Η $*$ δεν είναι αντιμεταθετική, ούτε προσεταιριστική, δεν έχει ουδέτερο στοιχείο. Τέλος η πρόσθεση δεν είναι επιμεριστική ως προς την $*$ στο $\mathbb{Z}$.

26. Αποδείξτε ότι το A είναι υποομάδα της (προσθετικής) ομάδας $\mathbb{R}$ και κατόπιν δείξτε ότι ο πολλαπλασιασμός έχει τις ιδιότητες της § 2.15.

27. Ομοίως όπως η προηγούμενη.

28. Ομοίως όπως η προηγούμενη.

29. Ομοίως όπως η προηγούμενη.

30. Χρησιμοποιείστε τα συμπεράσματα των ασκήσεων 8 και 17.

31. Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση και επιπλέον ότι το κάθε στοιχείο του $\mathbf{M}^*$ έχει αντίστροφο.

32. Χρησιμοποιείστε τα συμπεράσματα της ασκ. 29 και ότι το $\mathbb{Q}^2 - \{(0,0)\}$ είναι αντιμεταθετική ομάδα ως προς την $*$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

1. Να επαληθεύσετε τις ιδιότητες της § 3.2.

2. Δείξτε πρώτα ότι το A ως προς την $\oplus$ είναι αντιμεταθετική ομάδα και ότι ως προς την εξωτερική πράξη $\cdot$ ισχύουν οι I-IV της § 3.2.

3. (i) Παρατηρείστε ότι $\lambda(u-v) = \lambda[u+(-v)] = \dots$ (§ 3.2)
(ii) Επίσης $(\mu-\lambda)u = [\mu+(-\lambda)]u = \dots$

4. Δείξτε ότι το $V_1 \times V_2$, ως προς την $+$, είναι αντιμεταθετική ομάδα και ότι ισχύουν οι ιδιότητες I-IV της § 3.2.

5. Το $\mathbb{R}_+^*$ είναι αντιμεταθετική ομάδα. Για $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι ισχύουν οι ιδιότητες I-IV της § 3.2..

6. Αρκεί να δείξετε, με τη βοήθεια των ιδιοτήτων I-IV της § 3.2, ότι η προσθετική ομάδα είναι αντιμεταθετική.

7. Αρκεί να δείξετε ότι, αν $v = (0, x)$, $u = (0, y) \in V_1$, είναι $v + u \in V_1$ και για $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $\lambda v \in V_1$, οπότε το V_1 είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$. Ομοίως το V_2 είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

8. **Δείξτε ότι το V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Για να είναι $V \subset \mathbb{R}^3$, αρκεί να βρείτε στοιχείο του συνόλου $\mathbb{R}^3$, που να μην ανήκει στο V.**

9. **(i) Τα V_1 και V_2 είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$.**
(ii) Το $V_1 \cup V_2$ δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

10. **Αρκεί να δείξετε ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, ώστε κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ να εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των (1, 2), (-2, 1). Είναι: $\lambda_1 = \dfrac{x_1+2x_2}{5}$, $\lambda_2 = \dfrac{-2x_1+x_2}{5}$**

11. **Εργαστείτε όπως στην προηγούμενη άσκηση, οπότε βρίσκετε:**
$$\lambda_1 = \lambda_2 + x_1$$
$$\lambda_3 = x_2 - \lambda_2$$
που σημαίνει ότι κάθε (x_1, x_2) μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του V_1, αλλά όχι με μοναδικό τρόπο.

12. Δείξτε ότι ο V παράγεται από το διάνυσμα $v = (D_1, -D_2, D)$, όπου $D_1 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$,
$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$

13. Παρατηρείστε ότι το v_1 (αντιστ. το v_3) είναι γραμμικός συνδυασμός των v_2, v_3 (αντιστ. των v_1, v_2) και χρησιμοποιήστε την παρατήρηση της § 3.7.

14. Αρκεί να δείξετε ότι υπάρχουν λ_1, λ_2, λ_3, όχι όλοι μηδέν, ώστε
$$\lambda_1(2,1) + \lambda_2(1,3) + \lambda_3(-2,3) = (0,0).$$
Τότε βρίσκετε: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(\frac{9}{5}\lambda_3, -\frac{8}{5}\lambda_3, \lambda_3\right)$

15. Αν εργαστείτε όπως στην άσκηση 14, βρίσκετε $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0, 0, 0, 0)$.

16. Εργαστείτε όπως στην άσκηση 14.

17. (i) $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

(ii) Αν $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$ βρίσκετε:

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & 1 & \alpha \\ x_2 & 2 & \alpha^3 \\ x_3 & 3 & \alpha^5 \end{vmatrix}}{\alpha(\alpha-1)^2(\alpha+1)^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \alpha \\ 1 & x_2 & \alpha^3 \\ 1 & x_3 & \alpha^5 \end{vmatrix}}{\alpha(\alpha-1)^2(\alpha+1)^2}, \quad \lambda_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ 1 & 3 & x_3 \end{vmatrix}}{\alpha(\alpha-1)^2(\alpha+1)^2}$$

18. Χρησιμοποιήστε το θεώρ. της § 3.10. $(0, 1, 0) = \sqrt{3}\, v_1 + 2v_2$

19. **$4\alpha\beta + 14\alpha + 9\beta \neq 63$.**

20. **(i) Χρησιμοποιείστε το τελευταίο συμπέρασμα της § 3.7. $v = -u_1 + 2u_2 + 2u_3$.**

(ii) $u_1 = -v + 2u_2 + 2u_3$.

21. Αν το v_ρ ($\rho \leqslant k$) είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \ldots, v_{\rho-1}$, τότε είναι φανερό ότι τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Αντιστρόφως, αν τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε υπάρχει $\rho \leqslant k$, ώστε $\lambda_\rho \neq 0$ και $\lambda_{\rho+1} = \lambda_{\rho+2} = \ldots = \lambda_k = 0$. Δείξτε ότι $\rho > 1$.

22. Αν τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε (§ 3.7, παρατηρ.) τον υπόχωρο V΄ τον παράγουν το πολύ k-1 από τα προηγούμενα διανύσματα. Για το αντίστροφο χρησιμοποιείστε την § 3.9.

23. Αν τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$, v είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε το v είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \ldots, v_k$ τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Το αντίστροφο είναι φανερό.

24. Τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και παράγουν τον $\mathbb{R}^3$.

25. $v = 2(2, 1) + (-1)(1, -1)$, $v' = 0(2, 1) + 3(1, -1)$.

26. $v_3 = (34, 18)$.

27. (i) - (ii) Δείξτε ότι τα A, I είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και παράγουν το E. (iii) $A^{-1} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I$.

28. (i) Τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και η διάσταση του $\mathbb{R}^3$ είναι 3.

(ii) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

29. Όλες οι ορίζουσες 3ης τάξης του πίνακα των συντεταγμένων των v_1, v_2, v_3 είναι μηδέν κτλ. Το χώρο V παράγουν λιγότερα από 3 διανύσματα. Δείξτε ότι τα v_1, v_2 παράγουν το V, οπότε η διάστασή του είναι 2.

30. Δείξτε ότι βάση του V είναι το σύνολο $\{v_1, v_2\}$, οπότε η διάσταση του V είναι 2.

31. Το $v = \left(-\frac{36}{7}, \frac{2}{7}, 1\right)$ αποτελεί βάση του V.

32. Δείξτε ότι οι V_1, V_2 έχουν την ίδια βάση.

33. $(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{10} - \frac{8}{5}x_2, x_2, -\frac{23}{10} + \frac{6}{5}x_2\right)$

34. Τα a_1, a_2, a_3 αποτελούν βάση του χώρου που παράγουν. Τα a_1, a_2, a_3, b είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Το σύστημα έχει μοναδική λύση: $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, -2)$.

35. Το σύστημα είναι ομογενές: $D = |a_1 a_2 a_3| = (\alpha+2)(\alpha^2-\alpha+4)$

Αν $\alpha \in \mathbb{R} - \{-2\}$ είναι $(x, y, \omega) = (0, 0, 0)$

Αν $\alpha = -2$ είναι $(x, y, \omega) = \left(-\frac{8}{7}\omega, \frac{3}{7}\omega, \omega\right)$

36. Δείξτε ότι τα a_1, a_4 αποτελούν βάση του V που παράγουν τα $a_1, a_2, \ldots, a_5$. Είναι $|a_1 a_4 b| = 0$ και το σύστημα έχει άπειρες λύσεις:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(2 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 - 2x_5, x_2, x_3, -5 + \frac{1}{2}x_2, x_5\right)$$

37. Επειδή $|a_1 a_2 a_3| \neq 0$ τα a_1, a_2, a_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επειδή $|a_1 a_2 a_3 b| = 0$ το b ανήκει στο χώρο που παράγουν τα a_1, a_2, a_3.

$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2}{3}, -1, -1\right)$.

38. (i) Αν $D = |a_1 a_2 a_3| = (\lambda-1)^2(\lambda+2) \neq 0$ το σύστημα έχει τη λύση

$$x = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, \quad y = \frac{1}{\lambda+2}, \quad z = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$$

Αν $\lambda = 1$, άπειρες λύσεις τις: $(x, y, z) = (1-y-z, y, z)$.
Αν $\lambda = -2$, αδύνατο.

(ii) Αν $D = -(\lambda-1)(\lambda+1) \neq 0$, τότε $x = 4$, $y = \frac{\lambda-3}{\lambda+1}$, $z = -\frac{4}{\lambda+1}$

Αν $\lambda = 1$, τότε $(x, y, z) = (2-z, -1, z)$.
Αν $\lambda = -1$, το σύστημα είναι αδύνατο.

39 Αν $D = \mu(\lambda-1)^2(\lambda+2) \neq 0$, τότε $x = \frac{1}{\lambda+2}$, $y = \frac{1}{\mu(\lambda+2)}$, $z = \frac{1}{\lambda+2}$

Αν $\mu = 0$ και $\lambda = 1$, τότε $(x, y, z) = (x, y, 1-x)$.
Αν $\mu = 0$ και $\lambda \neq 1$, αδύνατο
Αν $\lambda = 1$, τότε $(x, y, z) = (1-\mu y-z, y, z)$
Αν $\lambda = -2$, αδύνατο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

1. Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 2 της § 4.3. Θα βρείτε ρίζες:

(i) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$ και $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$, (ii) $\frac{3}{2} + i$ και $\frac{3}{2} - i$, (iii) $-\sqrt{3} + i$ και $-\sqrt{3} - i$

2. (i) Είναι $x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) + x - 1 = 0$ κτλ. Ρίζες: 1, i, -i

(ii) Θέτουμε $x^2 = y$ κτλ. Ρίζες: 2i, -2i, $\sqrt{3}i$, $-\sqrt{3}i$

3. (i) Αρκεί να δείξετε (§ 2.13) ότι το **I** είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση στο $\mathbb{C}$ και ότι για κάθε $\beta \in \mathbf{I}$ είναι και $-\beta \in \mathbf{I}$.
(ii) Ομοίως, για τον πολλαπλασιασμό.

4. (i) 1 - i (ii) 10 - 17i (iii) -4 - 7i (iv) 20i

5. Να γράψετε τον z στη μορφή α+βi

(i) $\lambda = 0, \mu = 0$, (ii) $\lambda = -2, \mu = 3$

6. (i) $x = 1, y = 1$, (ii) $x = 0, y = 0$ ή $x = -1, y = -\frac{1}{3}$ ή $x = 1, y = -\frac{1}{3}$

7. (i) 22-5i, (ii) 7-i, (iii) -14, (iv) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, (v) 1

8. Μετά την εκτέλεση των πράξεων θα βρείτε:

(i) -8-2i, (ii) $\frac{22}{159} - \frac{5}{318}i$

9. Μετά τις πράξεις καταλήγουμε στην $(13x+10y) + (26x+15y)\,i = -50+55i$, από την οποία βρίσκουμε $x = 20$, $y = -31$.

10. Λύνεται όπως οι πρωτοβάθμιες εξισώσεις στο $\mathbb{R}$. $z = \left(-\frac{2}{5} - \sqrt{3}\right) + \frac{6}{5}i$

11. Λύνεται όπως τα πρωτοβάθμια συστήματα στο $\mathbb{R}$. $z = 3i$, $\omega = 1-i$

12. Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} \alpha+\beta^2 = 2 \\ \alpha\beta^2 = -3 \end{cases}$ βρίσκουμε

$\alpha = -1$ και $\beta = \sqrt{3}$ ή $\alpha = -1$ και $\beta = -\sqrt{3}$

13. Δεν αληθεύουν τα αντίστροφα. Π.χ. είναι $(2i)(3i) = -6$, ενώ οι 2i και 3i δεν είναι συζυγείς.

14. Από το $\begin{cases} (x_1+y_1i) + (x_2+y_2i) = \alpha\in\mathbb{R} \\ (x_1+y_1i)(x_2+y_2i) = \beta\in\mathbb{R} \end{cases}$ βρίσκουμε $x_1 = x_2$ και $y_1 = -y_2$

15. (i) $z = 0$ ή $z = 1$ ή $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ή $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, (ii) $z = 1+yi$, όπου $y\in\mathbb{R}$

16. Να χρησιμοποιήσετε την (5) της § 4.6

17. Οι προσθετέοι κάθε αθροίσματος είναι συζυγείς.

18. Αφού φέρετε τους αριθμούς στη μορφή α+βi να εργαστείτε όπως στο παράδειγμα της § 4.8.

(i) $z_1 = 1-3i$, $z_2 = -1+3i$, (ii) $z_1 = \sqrt{1+\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}i$, $z_2 = -\sqrt{1+\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}i$

19. Να εργαστείτε όπως στο παράδειγμα της § 4.9

(i) $z_1 = z_2 = -i$, (ii) $z_1 = 1$, $z_2 = -1+2i$, (iii) $z_1 = 3+4i$, $z_2 = 1+i$

20. (i) $z_1 = 1-i$, $z_2 = -1 - \frac{1}{2}i$, (ii) $z_1 = \frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

21. Η πρώτη εξίσωση έχει λύσεις τις $x = 2, y = 4$ και $x = -2, y = 4$. Απ' αυτές μόνο η δεύτερη επαληθεύει την άλλη εξίσωση.

23. Να φέρετε τους αριθμούς στη μορφή $\alpha + \beta i$. Τα μέτρα είναι: $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 4, 1, $\sqrt{2}$, 2.

24. (i) Ο γ. τόπος είναι κύκλος με κέντρο (2, -1) και ακτίνα 2.
(ii) Ο γ. τόπος είναι η ευθεία $x - 2y - 4 = 0$.

25. Να εφαρμόσετε τον τύπο $|z|^2 = z\bar{z}$. (i) $|z| = 4$, (ii) $|z| = 1$.

26. Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του μέτρου.

27. Είναι $|z| \cdot \sqrt{2} \geqslant |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \cdot \sqrt{2} \geqslant |\alpha| + |\beta|$ κτλ.

28. (i) Βλέπε παρατήρηση 2 της § 4.11
(ii) Στηριχτείτε στις ισοδυναμίες (4) και (5) της § 4.11.

29. Είναι: $\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}$

30. Μέτρο: 1, 3, 3, 5, 2 Arg: 0, π, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$

31. Είναι (§ 4.13) $\mu = 2$ και $\lambda = 12k+9$ $(k \in \mathbb{Z})$.

32. $z_1 = 2\left(\text{συν}\frac{5\pi}{4} + i\,\text{ημ}\frac{5\pi}{4}\right)$, $z_2 = 2\left(\text{συν}\frac{2\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{3}\right)$, $z = \text{συν}\frac{7\pi}{12} + i\,\text{ημ}\frac{7\pi}{12}$

33. $z_1 = 3\left[\text{συν}\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i\,\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$, $z_2 = 2\left(\text{συν}\frac{11\pi}{8} + i\,\text{ημ}\frac{11\pi}{8}\right)$, $z_3 = \text{συν}\frac{8\pi}{9} + i\,\text{ημ}\frac{8\pi}{9}$

34. Να γράψετε τους αριθμούς σε τριγωνομετρική μορφή

(i) $2\left[\text{συν}\left(-\frac{\pi}{30}\right) + i\,\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{30}\right)\right]$, (ii) $32\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{5\pi}{12} + i\,\text{ημ}\frac{5\pi}{12}\right)$

35. Να βρείτε το $\bar{z}_2$ και έπειτα να αντικαταστήσετε το α στη σχέση που δίνει το z_1.

36. $\frac{\sqrt{3}}{3} + i$

37. (i) $2^{10}\left(\text{συν}\frac{5\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{5\pi}{3}\right)$, (ii) $\frac{1}{2}\left[\text{συν}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\,\text{ημ}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right]$

38. (i) $-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, -\pi, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{4}, -2\pi$, (ii) 0, (iii) $-\pi$

39. (i) Ρίζες της εξίσωσης είναι οι $z_1 = 2+3i$ και $z_2 = 1+i$

(ii) Το $\vec{BA}$ αντιστοιχίζεται στη διαφορά $z_1 - z_2$ (αφού $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$). Εξάλλου το $\vec{B\Gamma}$ προκύπτει από το $\vec{BA}$ με στροφή κατά $-\frac{\pi}{3}$ ή $\frac{\pi}{3}$.

Αν $(\widehat{\vec{BA}, \vec{B\Gamma}}) = -\frac{\pi}{3}$ και z_3 ο μιγαδικός που αντιστοιχεί στο Γ, τότε

$$z_3 - z_2 = (z_1 - z_2)\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \text{ κτλ.}$$

Ομοίως εργαζόμαστε και όταν $(\widehat{\vec{BA}, \vec{B\Gamma}}) = \frac{\pi}{3}$

40. (i) Ρίζες είναι οι $z_1 = 2\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]$, $z_2 = 2\left[\sigma\upsilon\nu\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + i\eta\mu\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

(ii) $S = \eta\mu\alpha$, $S' = 32\,\sigma\upsilon\nu 4\alpha$

(iii) $S' = 0$ όταν $\alpha \in \left\{-\frac{7\pi}{8}, -\frac{5\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\}$

41. $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2\nu-1}(1+i)^2$ κτλ. Θα βρείτε $z = 2\left[\sigma\upsilon\nu(\nu\pi) + i\eta\mu(\nu\pi)\right]$

42. $(1+i)^\nu = (1-i)^\nu \Leftrightarrow \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^\nu = 1$ κτλ. $\nu = 4k\ (k \in \mathbb{Z})$

43. Να θέσετε $x = \sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha$, $y = \sigma\upsilon\nu\beta + i\eta\mu\beta$, $z = \sigma\upsilon\nu\gamma + i\eta\mu\gamma$ και να λάβετε υπόψη σας την $x+y+z = 0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3 = 3xyz$.

44. Να πολλαπλασιάσετε με το συζυγή του παρονομαστή τους όρους του κλάσματος.

45. (i) $\zeta_0 = 1$, $\zeta_1 = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5} + i\eta\mu\frac{2\pi}{5}$ κτλ.

(ii) $\zeta_0 = 1$, $\zeta_1 = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{6} + i\eta\mu\frac{2\pi}{6}, \ldots$

(iii) $(2z)^3 = 1$ κτλ

(iv) Να λάβετε υπόψη σας τους τύπους του αθροίσματος όρων γεωμετρικής προόδου.

46. (i), (ii) Είναι $\zeta_2 = \zeta_1^2$ κτλ., (iii) Είναι $\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 = 0$ κτλ.

47. Όπως η προηγούμενη άσκηση.

48. $a^\nu = z \Leftrightarrow \overline{(a^\nu)} = \bar{z}$ κτλ.

49. (i) Να γράψετε το -64 σε τριγωνομετρική μορφή

(ii) $z^5 = -1$ κτλ., (iii) $(3z)^4 + 1 = 0$ κτλ., (iv) $z^3 = 1+i$ κτλ.

50. (i) $z = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} + i\eta\mu\frac{2\pi}{3}$

(ii) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ και $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} + i\eta\mu\frac{2\pi}{3}\right)$

51. (i) $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $z_1 = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$

(ii) $z^5 = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)$ κτλ.

52. Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή της § 4.23.

53. (i) $z_0 = 2\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$, $z_1 = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{12} + i\eta\mu\frac{5\pi}{12}\right)$

$z_2 = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{12} + i\eta\mu\frac{11\pi}{12}\right)$, $z_3 = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{12} + i\eta\mu\frac{17\pi}{12}\right)$

(ii) $a = 2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$ κτλ.

54. (i) α) Αν $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, τότε $\Delta > 0$ κτλ

Να εξετάσετε ακόμη τις περιπτώσεις $\lambda \in (-2, 2)$ και $\lambda = -2$ ή $\lambda = 2$.

β) $z_1^\nu = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\nu}{3} + i\eta\mu\frac{2\pi\nu}{3}$, $z_2^\nu = \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi\nu}{3} + i\eta\mu\frac{4\pi\nu}{3}$

(ii) α) Με αντιθετοαντιστροφή (χρησιμοποιήστε τους τύπους του αθροίσματος και του γινομένου των ριζών).

β) Να λάβετε υπόψη σας ότι $z_1 + z_2 = \lambda$ και $z_1 z_2 = 1$

55. Είναι $z^3 + z^2 + z + 1 = (z+1)(z+i)(z-i)$ κτλ.

56. Το $z^2 - 2\rho z\sigma\upsilon\nu\varphi + \rho^2$ έχει ρίζες $z_1 = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)$ και $z_2 = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi - i\eta\mu\varphi)$

Δείξτε ότι $P(z_1) = P(z_2) = 0$

57. Είναι $z^\nu - 1 = (z-1)(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{\nu-1})$ και $z^\nu - 1 = (z-1)(z^{\nu-1} + z^{\nu-2} + \ldots + z+1)$ κτλ.

58. Αν $z^4 + 1 = (z^2 + pz + q)(z^2 + bz + c)$, καταλήγουμε σε σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με άγνωστους p, q, b, c.

Βρίσκουμε: $p = 0, q = i$ ή $p = 0, q = -i$ ή $p = \sqrt{2}, q = 1$ ή $p = -\sqrt{2}, q = 1$ ή $p = \sqrt{2}i$, $q = -1$, ή $p = -\sqrt{2}i, q = -1$.

59. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο του α΄ μέλους.

60. Αν ο $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι ρίζα, θα επαληθεύει τις εξισώσεις $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 5\alpha + 7 = 0$ και $5\alpha^2 - 16\alpha + 11 = 0$.

61. Αν βi είναι η φανταστική ρίζα, για τον προσδιορισμό του β εργαστείτε όπως στην προηγούμενη άσκηση.

62. Αν θέσετε $z^3 = \omega$ θα βρείτε $\omega_1 = 2 + 11i$ και $\omega_2 = -2 - 2i$. Κατόπιν να λύσετε τις εξισώσεις

$$z^3 - (2+i)^3 = 0 \text{ και } z^3 - (1-i)^3 = 0.$$

63. Αν $a = x_1 + y_1 i$ και $b = x_2 + y_2 i$, θα καταλήξετε στο σύστημα

$$(x_2 - 3y_1 = 18, \quad y_2 + 3x_1 = 45, \quad x_2 - x_1 = 109, \quad y_1 - y_2 = 32) \text{ κτλ.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

1. **Είναι: $A \times B \times \Gamma = \{(5, \alpha, \kappa), (5, \beta, \kappa), (5, \alpha, \lambda), (5, \beta, \lambda), (5, \alpha, \mu), (5, \beta, \mu)\}$**
   $B \times \Gamma \times A = \{(\alpha, \kappa, 5), (\alpha, \lambda, 5), (\alpha, \mu, 5), (\beta, \kappa, 5), (\beta, \lambda, 5), (\beta, \mu, 5)\}$

2. **Είναι: $(N(B) = 8$ και $N(\Gamma) = 1)$ ή $(N(B) = 4$ και $N(\Gamma) = 2)$ κτλ**

3. **Οι πιθανές εκβάσεις του αγώνα είναι:**
   AA, ABB, ABAA, ABABA, ABABB, BB, BAA, BABB, BABAA, BABAB

4. **Να βρείτε τις δυνατότητες επιλογής κάθε ψηφίου.**
   (i) 24 αριθμοί (ii) 36 αριθμοί.

5. **(i) 1904 λέξεις (ii) 5712 λέξεις.**

6. **Να εφαρμόσετε τη σχέση (1) της § 5.6.**
   (i) $\nu = 4$ (ii) $\nu = 2$ (iii) $\nu = 9$.

7. **(i) Το 0 δεν μπορεί να είναι ψηφίο των δεκάδων χιλιάδων. Τα υπόλοιπα ψηφία μπορεί να είναι οποιαδήποτε. (27216 αριθμοί).**
   (ii) 1200 αριθμούς.

8. **Είναι π.χ. $(\nu+1)! = \nu!(\nu+1)$ κτλ.**

9. **(i-ii) Να εφαρμόσετε τη σχέση (2΄) της § 5.7.**
   (iii) Να εργαστείτε όπως στην άσκηση 8.

10. **(i) 720 (ii) 216.**

11. **(i) 720 (ii) 72.**

12. **(i) 125 (ii) 50 (iii) 18.**

13. Οι τριπλές και οι διπλές παραλλαγές είναι διατάξεις με επανάληψη των τριών και δύο σημείων αντιστοίχως. (25 920 δρχ.)

14. Να εξαιρέσετε τους αριθμούς που έχουν πρώτο ψηφίο το 0. (Οι αριθμοί είναι 48).

15. **(i) Να ξεκινήσετε από το δεύτερο μέλος και να εφαρμόσετε την ισότητα (1) της § 5.10**
    (ii) Θα εφαρμόσετε τρεις φορές την προηγούμενη ισότητα.

16. **(i) Με τη βοήθεια της ισότητας (1΄) της § 5.10. θα βρείτε $\nu = 13$.**
    (ii) $k = 5$.

17. **Σκεφτείτε με πόσους τρόπους μπορεί να διαλέξει ένας μαθητής Α τους άλλους τρεις της ομάδας του, κτλ. Θα βρείτε 5775 τρόπους.**

18. **(i) 495 τρόποι, (ii) 252 τρόποι, (iii) 252+108+9 = 369 τρόποι.**

19. Μια ευθεία ορίζεται από δύο σημεία, ενώ ένα τρίγωνο ορίζεται από τις τρεις κορυφές του. (i) 45 (ii) 28 (iii) 120 (iv) 8.

20. (i) $(2x + y^2)^5 = 32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}$

    (ii) $\left(x^2 - \dfrac{2}{y}\right)^6 = x^{12} - 12\dfrac{x^{10}}{y} + 60\dfrac{x^8}{y^2} - 160\dfrac{x^6}{y^3} + 240\dfrac{x^4}{y^4} - 192\dfrac{x^2}{y^5} + 64\dfrac{1}{y^6}$

21. Ο όρος $k + 1$ τάξης έχει κύριο μέρος x^{40-8k}
    (i) Ο 5ος όρος (ii) Ο 6ος όρος.

22. Θα πάρετε σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους και θα διαιρέσετε κατά μέλη τις εξισώσεις του. Θα βρείτε:
    $(\nu = 6,\ x = 2,\ y = 1)$ ή $(\nu = 6,\ x = -2,\ y = -1)$

23. Είναι: $3^\nu = (1+2)^\nu$ κτλ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

1. $N(\Omega) = 7 \cdot 6 = 42$.

2. Κάθε λαμπτήρας είναι ή ελαττωματικός (Ε) ή καλός (Κ). $N(\Omega) = \nu - k + 1$.

3. (i) $N(\Omega) = 22100$ (ii) $N(\Omega) = 140608$ (iii) $N(\Omega) = 132600$

4. Παρατηρήστε ότι ο μαθητής Α μπορεί να πάρει τρία βιβλία κατά $\binom{12}{3}$ τρόπους κτλ.
   $N(\Omega) = 369600$

5. Ο δειγματικός χώρος έχει 8 στοιχεία: ααα, αακ, ακα, κτλ.

6. (i) Να αποδείξετε ότι, αν $x \in A$, τότε και $x \in A \cap B$
(ii) Να αποδείξετε ότι, αν $x \in A \cup B$, τότε $x \in B$
(iii) Αν υποθέσετε ότι $A - B \neq \varnothing$, θα οδηγηθείτε σε άτοπο.

7. (i) $A \cup B \cup \Gamma$
(ii) $(A \cap B^c \cap \Gamma^c) \cup (A^c \cap B \cap \Gamma^c) \cup (A^c \cap B^c \cap \Gamma)$
(iii) $(A \cap B \cap \Gamma^c) \cup (A \cap B^c \cap \Gamma) \cup (A^c \cap B \cap \Gamma)$
(iv) $A^c \cup B^c \cup \Gamma^c$

8. $N(A \cap B) = 1$, $N(A \cap B^c) = 3$, $N(A^c \cup B^c) = 51$, $N(A - B) = 3$

9. (i) $A \subseteq B \Leftrightarrow (\omega \in A \Rightarrow \omega \in B)$. Κατόπιν να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο της αντιθετοαντιστροφής.
(ii) Να ξεκινήσετε από το β΄ μέλος με την παρατήρηση ότι είναι $(B \cap \Gamma)^c = B^c \cup \Gamma^c$ και ότι η τομή επιμερίζει την ένωση.
(iii) Να εργαστείτε όπως στη (ii).

10. (i) Να λάβετε υπόψη σας την ισότητα $A\text{-}B = A \cap B^c$
(ii) Η ένωση είναι επιμεριστική ως προς την τομή κτλ.

11. (i) Να εργαστείτε όπως στην προηγούμενη άσκηση παίρνοντας υπόψη σας την ισότητα $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
(ii) $A \ddagger B = (A\text{-}B) \cup (B\text{-}A)$ κτλ.

12. Έστω A_1: «και τα δυο καναρίνια είναι αρσενικά» και
A_2: «και τα δύο καναρίνια είναι θηλυκά».
Τότε $A = A_1 \cup A_2$, κτλ.
Θα βρείτε: $P(A) = \frac{43}{91}$ και $P(B) = \frac{48}{91}$

13. Να βρείτε πρώτα το δειγματικό χώρο του πειράματος.
$P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{5}{12}$, $P(\Gamma) = \frac{1}{12}$

14. (i) Η πιθανότητα είναι περίπου 0,04.
(ii) 0,4
(iii) Αν Γ: «τουλάχιστο τρεις γυναίκες», τότε
$P(\Gamma) = P(3 \text{ γυναίκες}) + P(4 \text{ γυναίκες}) + P(5 \text{ γυναίκες})$
Είναι $P(\Gamma) \simeq 0{,}314$

15. Ο πληθικός αριθμός του Ω είναι όσοι οι συνδυασμοί των 8 βιβλίων ανά 3, κτλ.
$P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{9}{28}$

16. (i) Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι 10
(ii) Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι $10 \cdot 9 \cdot 8$.

17. Αν Α: «οι ενδείξεις είναι διαδοχικοί αριθμοί», ευνοϊκές περιπτώσεις του Α είναι οι τριάδες
$$(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6)$$
και εκείνες που προκύπτουν από μετάθεση των στοιχείων των προηγούμενων.
Θα βρείτε $P(A) = \frac{1}{9}$

18. (i) $P(y) = \frac{1}{8}$ (ii) $P(x) = \frac{3}{20}$ και $P(y) = \frac{1}{20}$ (iii) $P(x) = \frac{19}{60}$

19. (i) Αν Α: «τα 5 άτομα έχουν γεννηθεί ανά 2 σε διαφορετικούς μήνες»,
είναι $N(A) = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ κτλ $P(A) \simeq 0{,}382$.
(ii) Είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του Α.

20. (i) $P(A \cup B) = \ldots = 0{,}69$
(ii) $P(A^c \cap A^c) = P(A \cup B)^c = 0{,}31$
(iii) $P[(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)] = 0{,}68$

21. Να αποδείξετε ότι:
(i) Για κάθε $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ είναι $0 \leqslant P''(A) \leqslant 1$
(ii) $P''(\Omega) = 1$
(iii) Αν $A \cap B = \varnothing$, τότε $P''(A \cup B) = P''(A) + P''(B)$

22. $P(A \cup B) \leqslant 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leqslant 1$, κτλ.

23. (i) Αν A_1: «το μεγαλύτερο παιδί αγόρι» και A_2: «και τα δύο παιδιά αγόρια»,
να βρείτε την $P(A_2|A_1)$
(ii) Να εργαστείτε όπως στο (i).

24. Να βρείτε με αναγραφή τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ.
(i) $P(A) = \frac{1}{36}$, $P(B) = \frac{1}{9}$
(ii) $P(A|\Gamma) = \frac{1}{11}$, $P(B|\Gamma) = \frac{2}{11}$

25. Να διαιρέσετε και τα δύο μέλη της $P(A) > P(B)$ με το $P(A \cap B)$

26. Αν K_1: «η πρώτη σφαίρα είναι κόκκινη», A_2: «η δεύτερη σφαίρα είναι άσπρη» και
M_3: «η τρίτη σφαίρα είναι μαύρη», να βρείτε την $P(K_1 \cap A_2 \cap M_3)$ με τη βοήθεια της εφαρμογής 3, § 6.10.
(i) $P(K_1 \cap A_2 \cap M_3) = \frac{45}{1372}$ (ii) $P(K_1 \cap A_2 \cap M_3) = \frac{15}{364}$

27. Αν Α: «παίζουμε με το ζάρι Z_1», Β: «παίζουμε με το ζάρι Z_2» και Κ: «εμφανίζεται κόκκινη έδρα», τότε $K = (A \cap K) \cup (B \cap K)$. Θα βρείτε $P(K) = \frac{1}{2}$

28. Να βρείτε με αναγραφή τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ.
(i) $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(\Gamma) = \frac{5}{36}$
(ii) Τα Α και Β είναι ανεξάρτητα, ενώ τα Α και Γ δεν είναι.

29. Αν A_i : «ο διακόπτης i είναι κλειστός», i = 1, 2, 3, 4, και Ε: «υπάρχει ρεύμα ανάμεσα στα Β και Γ», τότε $E = (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)$ και $P(E) = 2p^2 - p^4$.

30. Να αποδείξετε ότι $P[A \cap (B \cup \Gamma)] = P(A)\,P(B \cup \Gamma)$.

31. Να εργαστείτε όπως στην προηγούμενη άσκηση.

32. Αν A_i : «εμφανίζεται 6 στην i ρίψη», i = 1, 2, 3, 4 και
Β : «δεν εμφανίζεται κανένα 6 στις 4 ρίψεις»,
είναι $B = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c$

(i) $P(B) = \dfrac{625}{1296}$ (ii) $\dfrac{671}{1296}$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ