



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής Πτυχιακή Εξέταση Μαΐου 2022 στις Βασικές Μαθηματικές Μεθόδους

Σύνολο μορίων στα 10 ερωτήματα=11 μόρια. Φροντίστε να είναι εμφανείς οι υπολογισμοί σας.

1. Να συγκριθούν οι ποσότητες $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$ και $B = \vec{a} \cdot \vec{b}$, αν το διάνυσμα \vec{a} είναι το $(1, 2, 3)$, ενώ το \vec{b} , που έχει ίδιο μέτρο με το \vec{a} , είναι τέτοιο ώστε η προβολή του \vec{b} στο \vec{a} να είναι

$$\text{προβ}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}}{2}. \quad [1 \text{ μόριο}]$$

2. Κατασκευάστε ένα διάνυσμα του 3-διάστατου χώρου, το οποίο είναι κάθετο στο $\vec{a} = (0, 1, 2)$, και είναι παράλληλο στο $\vec{b} = (1, 2, -1)$. Υπάρχουν διανύσματα που είναι κάθετα στο \vec{a} , αλλά δεν είναι παράλληλα στο \vec{b} ; **[0.4+0.6 μόρια]**

3. Ισχύει πάντα ότι ένα μη μηδενικό διάνυσμα του 3-διάστατου χώρου που είναι κάθετο στα μη μηδενικά διανύσματα \vec{a} και \vec{b} , γράφεται $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, όπου λ είναι κάποιος πραγματικός αριθμός; Τι συμβαίνει στην περίπτωση που $\vec{a} = 2\vec{b}$; **[0.4+0.6 μόρια]**

4. Υπολογίστε τη στερεά γωνία που αντιστοιχεί στην περιοχή μεταξύ των μεσημβρινών (ημικυκλίων) που χαρακτηρίζονται από γωνίες $\phi_1 = \phi_0$ και $\phi_2 = \phi_0 + \Delta\phi$. **[1 μόριο]**

5. (α) Υπολογίστε τον αντίστροφο του πίνακα \mathbf{A} για

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (β) Να βρείτε τα ιδιοανύσματα του \mathbf{A} και του \mathbf{A}^{-1} και να τα συγκρίνετε. (γ) Ήταν αναμενόμενο το αποτέλεσμα; **[0.5+1+0.5 μόρια]**

6. (α) Υπολογίστε τις ποσότητες A_{mm} και $A_{mn}A_{mn}$ για τον πίνακα του προηγούμενου ερωτήματος. [Υποννοείται η αθροιστική σύμβαση για τα ζευγάρια κοινών δεικτών.] **[0.4+0.6 μόρια]**

7. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Cayley-Hamilton, αποδείξτε ότι για τον πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

- ισχύει ότι $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} + \mathbf{I}$ (όπου \mathbf{I} , ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας). Υπολογίστε με βάση αυτή τη σχέση, τον πίνακα \mathbf{A}^4 . **[0.5+0.5 μόρια]**

8. Γράψτε τον πίνακα στροφής σε ένα επίπεδο κατά γωνία $\pi/4$. Δράστε στη συνέχεια με τον πίνακα στροφής στο διάνυσμα $(2, 1)$ και βεβαιωθείτε ότι το νέο διάνυσμα που θα προκύψει θα έχει μέτρο όσο το αρχικό και θα σχηματίζει πράγματι γωνία $\pi/4$ με το αρχικό. **[0.5+0.5 μόρια]**

9. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του πίνακα

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{[1 μόριο]}$$

10. Βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z που ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

$$\Re(i \cdot z) = -1/2, \quad \Im(i/z) = 1,$$

όπου $\Re(w)$ και $\Im(w)$ συμβολίζουν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού w , αντίστοιχα. **[1 μόριο]**

Καλή Επιτυχία