ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις χειμερινής Περιόδου 2022-2023
στις Βασικές Μαθηματικές Μεθόδους

Σύνολο μορίων στα 10 ερωτήματα=11 μόρια. Φροντίστε να είναι εμφανείς οι υπολογισμοί σας.
Καλή σας επιτυχία.

1. Έστω διάνυσμα $\vec{X}$ στον τρισδιάστατο χώρο, το οποίο μπορει να περιγραφεί μέσω των διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ (τα οποια **δεν** είναι απαραίτητα ορθογώνια και μοναδιαία), ως $\vec{X} = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$. Να υπολογιστούν οι αριθμητικοί συντελεστές c_1, c_2, c_3 ώστε το διάνυσμα
$$\vec{\Psi} = \vec{X} \times (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \ ,$$
να μπορεί να γραφεί και ως
$$\vec{\Psi} = c_1\vec{a}_1 + c_2\,\vec{a}_2 + c_3\,(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \ .$$
[1 μόριο]

2. Ποια συνθήκη πρέπει να ισχύει ώστε ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{X}$ του επιπέδου να μπορει να γραφεί ως
$$\vec{X} = \text{προβ}_{\hat{e}_1}\vec{X} + \text{προβ}_{\hat{e}_2}\vec{X} \ ,$$
όπου $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ δύο τυχαία, αλλά μη συγγραμμικά, μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου. **[1 μόριο]**

3. Υπολογίστε τη στερεά γωνία υπό την οποια φαίνεται ένας δίσκος ακτίνας R από ένα σημείο P του άξονα του δίσκου, το οποίο απέχει απόσταση z από το κέντρο του δίσκου. [Υποδ.: Η περίμετρος του δίσκου βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια ενός κώνου συγκεκριμένου ανοίγματος που έχει ως κορυφή το σημείο P.] **[1 μόριο]**

4. Έστω ένας 2×2 πίνακας **A** και **E** ο 2×2 πίνακας που έχει ως συνιστώσες τις συνιστώσες του πλήρως αντισυμμετρικού τανυστή 2ης τάξης: $E_{ij} = \epsilon_{ij}$. Να σχηματίσετε το γινόμενο $\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{E}\,\mathbf{A}^\top$. Τι είδους πίνακας είναι ο **C** και με τι ισούται η C_{12} συνιστώσα του; **[0.5+0.2+0.3 μόρια]**

5. Υπολογίστε την ποσότητα $\epsilon_{ij}\epsilon_{ji}$ (χρησιμοποιώντας την αθροιστική σύμβαση). Ο ϵ_{ij} είναι ο πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής 2ης τάξης. Η ποσότητα που υπολογίσατε είναι βαθμωτή, διάνυσμα, ή πίνακας 2×2; **[0.7+0.3 μόρια]**

6. Έστω ένα σημείο A πάνω σε μια σφαίρα με σφαιρικές συντεταγμένες $\theta_A = \pi/6, \phi_A = \pi/6$. Βρείτε (i) τις συντεταγμένες $\theta_{A'}, \phi_{A'}$ του σημείου A' της σφαίρας, δηλαδή του αντιδιαμετρικού σημείου του A και (ii) τις συντεταγμένες θ_B, ϕ_B κάποιου σημείου B της σφαίρας, τέτοιου ώστε η γωνία $A\hat{K}B$ να είναι ορθή. [K είναι το κέντρο της σφαίρας.] **[0.5+0.5 μόρια]**

7. Έστω ο πίνακας

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} .$$

Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές του και τα ιδιοανύσματά του. Γιατί θα περιμέναμε οι ιδιοτιμές να βγουν πραγματικές; [**0.8+0.2 μόρια**]

8. Να υπολογιστεί ο αριθμός $(-i)^{(-i)}$ θεωρώντας ότι τα ορίσματα όλων των μιγαδικών που θα χρησιμοποιήσετε, αν τους γράψετε σε πολική μορφή, βρίσκονται (i) στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ και (ii) στο διάστημα $[0, 2\pi)$. [**0.5+0.5 μόρια**]

9. Να εξετάσετε αν οι αντίστροφοι (z^{-1}) όλων των μιγαδικών που έχουν τη μορφή $z = x + i$, με $x \in \mathbb{R}$ απέχουν από το $z_0 = -i/2$ σταθερή απόσταση, δηλαδή αν $w = z^{-1} - z_0$ είναι τέτοιος ώστε $|w| =$ σταθ. Πού βρίσκονται οι μιγαδικοί z^{-1}; [**1.2+0.3 μόρια**]

10. Ένας 2×2 πίνακας $\mathbf{A}$ έχει ως ιδιοανύσματα τα

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \ \mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

και αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1/2$. (i) Να βρεθεί ο πίνακας $\mathbf{A}$ και (ii) να υπολογιστεί το διάνυσμα

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{A}^{100} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

όπου $\mathbf{A}^{100}$ δηλώνει την εκατοστή δύναμη του $\mathbf{A}$. Πιο κοντά σε ποιό από τα δύο ιδιοανύσματα θα βρίσκεται το παραπάνω διάνυσμα Ψ; [**0.6+0.6+0.3 μόρια**]

Συνοπτικές απαντήσεις

1. $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$ με απευθείας εκτέλεση της πράξης

$$\begin{aligned}\vec{\Psi} \times (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) &= (2\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \\ &= [\vec{a}_1 + (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)] \times (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \\ &= \vec{a}_1 \times (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \\ &= \vec{a}_1 \times \vec{a}_2\end{aligned}$$

2. Μόνο αν $\hat{e}_1 \perp \hat{e}_2$ οι προβολές συμπίπτουν με τις συνιστώσες του $\vec{X}$. Μπορεί να γραφτεί με ανάλυση του $\vec{X} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2$ και υπολογισμό των a_1, a_2 μέσω εσωτερικού γινομένου με το $\vec{X}$.

3. Ο κώνος έχει άνοιγμα $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$ επομένως η στερεά γωνία είναι

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta) = 2\pi\left[1 - \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)\right] \ .$$

4.

$$C_{ij} = A_{ia}E_{ab}(A^{\top})_{bj} = A_{ia}\epsilon_{ab}A_{jb}$$

οπότε

$$C_{ji} = A_{ja}\epsilon_{ab}A_{ib} = A_{jb}\epsilon_{ba}A_{ia} = -A_{jb}\epsilon_{ab}A_{ia} = -C_{ij} \ .$$

Ο **C** είναι αντισυμμετρικός. Η συγκεκριμένη συνιστώσα του είναι

$$C_{12} = A_{1a}\epsilon_{ab}A_{2b} = A_{11}\epsilon_{12}A_{22} + A_{12}\epsilon_{21}A_{21} = \det(\mathbf{A}) \ .$$

5. Οι μοναδικοί όροι που θα επιβώσουν από την αθροιστική σύμβασηείναι οι

$$\epsilon_{12}\epsilon 21 + \epsilon_{21}\epsilon 12 = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -2 \ .$$

Το αποτέλεσμα είναι βαθμωτό μέγεθος. Κανένας περισευούμενος δέικτης.

6.

$$\theta_{A'} = \pi - \pi/6 = 5\pi/6 \ , \ \phi_{A'} = \pi + \pi/6 = 7\pi/6$$

και

$$\theta_B = 2\pi/3 \ , \ \phi_B = \pi/6 \ .$$

Η παραπάνω είναι μια από τις θέσεις των δυνατών Β. [**Τα ακόλουθα δεν ζητούνταν:**] Οι υπόλοιπες δυνατές θέσεις των Β σχηματίζουν έναν μέγιστο κύκλο πάνω στη σφαίρα με άξονα την ευθεία ΚΑ (ο αντίστοιχος Ισημερινός αν το Α ήταν ο πόλος). Για να βρει κανείς τη σχέση $\theta_B - \phi_B$ χρειάζεται να γράψει τις καρτεσιανές συντεταγμένες των 2 σημείων κι να θέσει το εσωτερικό τους γινόμενο ίσο με 0. Η τελική σχέση είναι

$$-2\sqrt{3}\cot\theta_b = \sqrt{3}\cos\phi_B + \sin\phi_B$$

και μπορεί να γίνει και λίγο πιο κομψή αν το δεξί μέλος το γράψουμε σαν ένα σκέτο cos με μια φάση και έναν αριθμητικό συντελεστή μπροστά του:

$$-\sqrt{3}\cot\theta_b = \cos(\phi_B - \pi/6)\ .$$

7. Ο πίνακας είναι ο αντίθετος του πίνακας του Pauli σ_2 [**Δεν απαιτούνταν να τον αναγνωρίσετε.**] Είναι ερμιτιανός και επομένως αναμένει κανείς πραγματικές ιδιοτιμές. Είναι

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\ ,\ [\mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

με $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$.

8.
$$(-i)^{(-i)} = (e^{-i\pi/2})^{(-i)} = e^{-\pi/2}$$

στην 1η περίπτωση και

$$(-i)^{(-i)} = (e^{i3\pi/2})^{(-i)} = e^{3\pi/2}$$

στη 2η περίπτωση.

9.
$$z^{-1} - (-i/2) = \frac{x-i}{x^2+1} + \frac{i}{2} = \frac{2x + i(x^2-1)}{2(x^2+1)}$$

και

$$|z^{-1} - (-i/2)| = \frac{\sqrt{4x^2 + (x^2-1)^2}}{2(x^2+1)} = 1/2\ .$$

Επομένως οι z^{-1} βρίσκονται σε κύκλο ακτίνας $1/2$ και κέντρο το $-i/2$. Στην πραγματικότητα πρόκειται για έναν "τρύπιο" κύκλο αφού το ανώτερο σημείο του: $0 = -i/2 + i/2$, δεν μπορεί να ικανοποιηθεί για καμία τιμή του x, απλώς το πλησιάζουμε καθώς $x \to \pm\infty$. [**Η τελευταία παρατήρηση δεν απαιτούνταν.**]

10. Για να βρεθεί ο **A** μπορούμε να γράψουμε το σύστημα που ικανοποιούν τα ιδιοανύσματά του. Έτσι αν

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

τότε

$$2a + b \quad = 4$$

$$\begin{aligned} 2c + d &= 2 \\ a + 2b &= 1/2 \\ c + 2d &= 1 \end{aligned}$$

οπότε βρίσκουμε $a = 5/2, b = -1, c = 1, d = 0$. Για τα υπόλοιπα αρκεί να αναλύσουμε το

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1/3)\mathbf{X}^{(1)} + (1/3)\mathbf{X}^{(2)}$$

και να δράσουμε πάνω του 100 φορές με το **A**:

$$\boldsymbol{P}si = (1/3)2^{100}\mathbf{X}^{(1)} + (1/3)(1/2)^{100}\mathbf{X}^{(2)} = (1/3)\begin{pmatrix} 2^{101} + 1/2^{100} \\ 2^{100} + 1/2^{99} \end{pmatrix} \simeq (1/3)2^{100}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Προφανώς το αποτέλεσμα έχει διεύθυνση πολύ πιο κοντά στο $\mathbf{X}^{(1)}$ που έχει τη μεγαλύτερη κατά μέτρο ιδιοτιμή.