



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση 28 Σεπτεμβρίου 2023
στις Βασικές Μαθηματικές Μεθόδους

Σύνολο μορίων στα 10 ερωτήματα=11.5 μόρια. Φροντίστε να είναι εμφανείς οι υπολογισμοί σας.

1. Υπό ποια στερεά γωνία φαίνεται μια σφαίρα ακτίνας R από κάποιο σημείο της επιφανείας της; **[1.0 μόριο]**

Απ: 2π .

2. Έστω τρία μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ τα οποία σχηματίζουν μια τρισσορθογώνια βάση (είναι όλα μοναδιαία και κάθετα το καθένα στα άλλα δύο). Να κατασκευαστεί με τη βοήθεια των τριών αυτών διανυσμάτων δύο άλλα νέα μοναδιαία διανύσματα, $\hat{\mathbf{e}}_4, \hat{\mathbf{e}}_5$, το καθένα από τα οποία να σχηματίζει ίσες γωνίες με τα τρία δοθέντα. **[0.5+0.5 μόρια]**

Απ: $\hat{\mathbf{e}}_4 = (\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3)/\sqrt{3}$, $\hat{\mathbf{e}}_5 = -(\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3)/\sqrt{3}$.

3. Κατασκευάστε έναν 2×2 πίνακα \mathbf{A} για τον οποίο να επαληθεύεται η ταυτότητα $\det(\mathbf{A}^2) - (\text{Tr}(\mathbf{A}))^2 = 0$. **[1 μόριο]**

Απ: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Για τον πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

Να υπολογιστούν οι ακόλουθοι αριθμοί: (α) $x = A_{ii}$, (β) $y = \text{Tr}(\mathbf{A} \mathbf{A}^T)$, (γ) $z = A_{ij} A_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl}$. **[0.5+0.5+0.5 μόρια]**

Απ: $x = 3, y = 21, z = 21$.

5. Ένας πίνακας 2×2 έχει ορίζουσα 2. (α) Τι ορίζουσα έχει ο ανάστροφός του; (β) Ο αντίστροφός του; **[0.5+0.5 μόρια]**

Απ: ((α) 2, (β) $1/2$).

6. Το τετράγωνο ενός μιγαδικού αριθμού είναι φανταστικός αριθμός. Τι όρισμα μπορεί να έχει ο μιγαδικός αριθμός; **[0.5 ή 1.0 μόρια]**

(για ένα παράδειγμα ή γενικά)

Απ: $\text{Arg}(z) = (2k + 1)\pi/4$.

7. Η καμπύλη $\theta = \pi/4$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $r = 1$ τι σχήμα έχει και τι μήκος; (Οι συντεταγμένες r, θ, ϕ είναι οι κλασικές σφαιρικές συντεταγμένες.) **[0.5+0.5 μόρια]**

Απ: Κύκλος με περίμετρο $\sqrt{2}\pi$.

8. Ποια είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού από x, y σε a, b , όπου

$$a = x^2 + y^2 \quad , \quad b = y/x \quad ;$$

Ποιο χωρίο στις καρτεσιανές συντεταγμένες x, y περικλείει η περιοχή $a \in [0, 1], b \in [0, 1]$. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου αυτού με κατάλληλη ολοκλήρωση στις συντεταγμένες a, b . **[1.0+0.5+0.5 μόρια]**

Απ: $J = \det(\partial(x, y)/\partial(a, b)) = \dots = (1/2)1/(1 + b^2)$. $\int J da db = \pi/8$ (μισό τεταροκύκλιο).

9. Έστω τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 0, 0), \vec{b} = (0, 1, 0)$. Γράψτε έναν πίνακα στροφής επί του επιπέδου x, y και δράστε με τον πίνακα αυτό στα δύο δοθέντα διανύσματα κατασκευάζοντας τα αντίστοιχα στραμμένα διανύσματα \vec{a}', \vec{b}' . Δείξτε ότι το εξωτερικό γινόμενο $\vec{a} \times \vec{b}$ ισούται με το $\vec{a}' \times \vec{b}'$. **[0.5+0.5 μόρια]**

Απ: $R_{xy}(\pi/4) = (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\vec{a}' = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), \vec{b}' = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$,
 $\vec{a}' \times \vec{b}' = \vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, 1)$.

10. Δύο μιγαδικοί αριθμοί z, w έχουν μεταξύ τους την εξής σχέση: $z/w = i$. (α) Ποια η σχέση των μέτρων τους; (β) Αν $z + w = \sqrt{2}i$, να βρεθούν οι 2 μιγαδικοί αριθμοί. **[0.5+0.5 μόρια]**

Απ: (α) $|z| = |w|$, (β) $w = (1 + i)/\sqrt{2}, z = (-1 + i)/\sqrt{2}$.

Καλή Επιτυχία