

Ανάλυση κλίμακας της κατακόρυφης εξίσωσης κίνησης

Συνοπτική κλίμακα

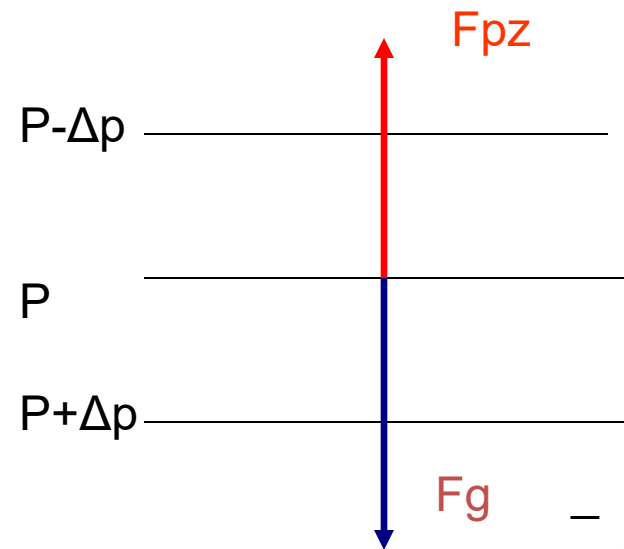
$$\begin{aligned} U &\sim 10 \text{ m s}^{-1} \\ W &\sim 1 \text{ cm s}^{-1} \\ L &\sim 10^6 \text{ m} \\ H &\sim 10^4 \text{ m} \\ \delta P / \rho &\sim 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \\ L/U &\sim 10^5 \text{ s} \\ f_0 &\cong 10^{-4} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Διεύθυνση $\hat{k}$:	$\frac{dw}{dt}$	$-\frac{u^2 + v^2}{\alpha}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$	$+2\Omega u \cos \varphi$	$-g$
Διαστάσεις:	$\frac{UW}{L}$	$\frac{U^2}{\alpha}$	$\frac{\Delta p}{\rho H}$	$f_0 U$	g
Τάξη μεγέθους: (m s^{-1})	10^{-7}	10^{-5}	10^1	10^{-3}	10^1

Η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης βαροβαθμίδας και η ενεργός βαρύτητα έχουν ίδια τάξη μεγέθους

Από αυτή τη θεώρηση προκύπτει η υδροστατική ισορροπία

Υδροστατική ισορροπία



$$F_{pz} = F_g$$

Κατακόρυφη δύναμη βαροβαθμίδας
(άνωση) = ενεργός βαρύτητα

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = g \rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Ολοκληρώνοντας από ύψος z έως ∞ έχουμε:

$$-\int_{P_z}^{P(\infty)} dP = \int_z^{\infty} g \rho dz \quad \text{όμως } P(\infty) = 0$$

άρα

$$P(z) = \int_z^{\infty} g \rho dz$$

Η πίεση σε ύψος z είναι ίση με το βάρος του αέρα στην υπερκείμενη κατακόρυφη στήλη μοναδιαίας διατομής

Υδροστατική Εξίσωση

$$\frac{dP}{dz} = -g\rho$$

p: πίεση (Pa)

z: υψος (m)

ρ : πυκνότητα αέρα kg/m³

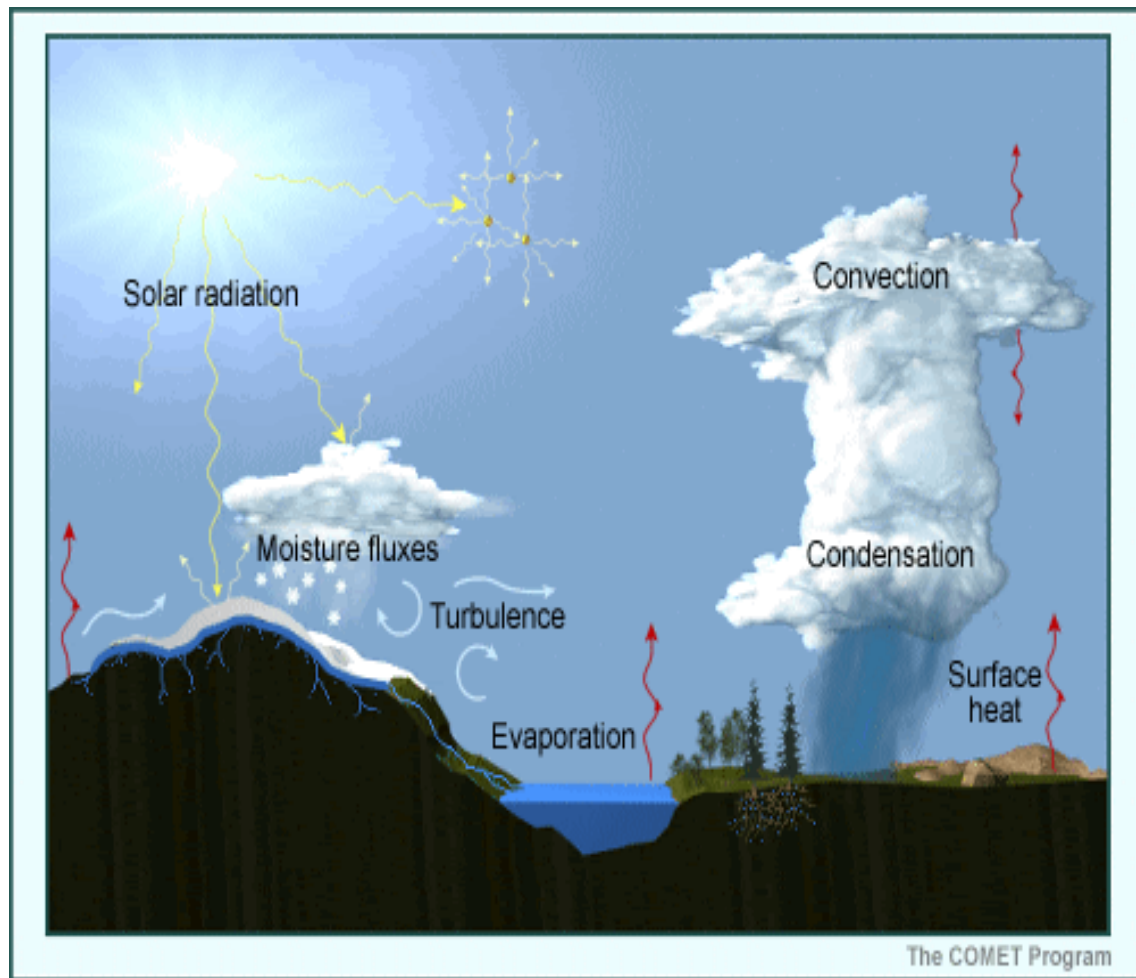
g: = 9.81 m/s²

χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ύψους σε συγκεκριμένη πίεση, ή της πίεσης σε συγκεκριμένο ύψος τα οποία είναι αναγκαία στις προγνωστικές εξισώσεις του ανέμου.

Ισχύει όταν:

- η οριζόντια κλίμακα είναι αρκετά μεγαλύτερη από την κατακόρυφη, όπως ισχύει στα φαινόμενα συνοπτικής κλίμακας
- 'Όταν δεν υπάρχουν κατακόρυφες επιταχύνσεις στην ατμόσφαιρα

Μη υδροστατικές επιδράσεις



Υδροστατική Εξίσωση

$$-dP = \rho dz$$

Επειδή η πυκνότητα ρ του αέρα είναι ένα μέγεθος που δύσκολα μετριέται συνήθως χρησιμοποιούμε τον όγκο ανά μονάδα μάζας $\alpha = \frac{V}{m}$ Συνεπώς:

$$\rho = 1/\alpha$$

και η υδροστατική εξίσωση γράφεται:

$$gdz = -\alpha dP$$

Δείξτε ότι μία ομογενής ατμόσφαιρα (πυκνότητα ανεξάρτητη του ύψους) έχει πεπερασμένο ύψος το οποίο εξαρτάται μόνο από την θερμοκρασία στο κατώτερο σημείο της ατμόσφαιρας. Να υπολογιστεί το ύψος ομογενούς ατμόσφαιρας με επιφανειακή θερμοκρασία $T_0=273 \text{ K}$. Δίνεται R η σταθερά των αερίων για ξηρό αέρα ($287 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$), $g=9.81 \text{ ms}^{-2}$ η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Λύση

Από την υδροστατική εξίσωση έχουμε: $\frac{dP}{dz} = -g\rho$

Και για $\rho=\text{const.}$ ολοκληρώνοντας από το έδαφος μέχρι την κορυφή της ατμόσφαιρας παίρνουμε:

$$\int_0^H dp = - \int_0^H g\rho dz$$

$$P_H - P_0 = -g\rho(H-0) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Αλλά } P_H=0, \text{ άρα} \\ P_0 = g\rho H \end{array} \right\} H = RT_0/g$$

Και από την καταστατική εξίσωση: $P_0 = \rho RT_0$

Δηλαδή το ύψος ομογενούς ατμόσφαιρας εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία στο έδαφος

Αντικαθιστώντας έχουμε: $H = \frac{RT_0}{g} = \frac{287 \cdot 273}{9.81} = 7986.85 \text{ m}$

Προσοχή στις μονάδες!

Γεωδυναμικό

Το γεωδυναμικό Φ σε οποιοδήποτε σημείο στην ατμόσφαιρα ορίζεται ως το έργο που πρέπει να δαπανηθεί (λόγω του πεδίου βαρύτητας) για να ανέβει μια μοναδιαία μάζα από τη στάθμη της θάλασσας στο σημείο αυτό.

Το γεωδυναμικό Φ σε ύψος z δίνεται από το ολοκλήρωμα:

Μονάδα μέτρησης Jkg^{-1} ή m^2s^{-2} .

$$\Phi(z) = \int_0^z g dz$$

όπου $\Phi(0)=0$ (γεωδυναμικό στην επιφάνεια της θάλασσας)

Το έργο για να ανέβει μοναδιαία μάζα (1kg) σε ύψος dz είναι :

$$d\Phi = m \cdot g \cdot dz \rightarrow d\Phi = g \cdot dz$$

Και από την υδροστατική εξίσωση:

$$d\Phi = -\alpha dP$$

Γεωδυναμικό ύψος z

Εκφράζει ενέργεια

$$Z \equiv \frac{\Phi(z)}{g_0} = \frac{1}{g_0} \int_0^z g dz$$

g_0 =η μέση επιτάχυνση της βαρύτητας (9.8 ms^{-2})

Μονάδα μέτρησης grm

Πλοτάρεται στις ισοβαρικές
επιφάνειες

Γραμμές ίσου z είναι οι
ισοϋψείς

$Z \text{ (m)} \approx z \text{ (grm)}$

Γεωμετρικό ύψος αριθμητικά ίσο
με το γεωδυναμικό ύψος

Επειδή
 g =σταθερή καθ'
ύψος στην
τροπόσφαιρα

Γεωμετρικό – Γεωδυναμικό Ύψος

Τυπικές τιμές γεωμετρικού ύψους (z) και αντίστοιχου γεωδυναμικού ύψους (Z) και επιτάχυνσης της βαρύτητας (g) στις 40° γεωγραφικό πλάτος

z (km)	Z (km)	g (m s ⁻²)
0	0	9.81
1	1.00	9.80
10	9.99	9.77
100	98.47	9.50
500	463.6	8.43

Πρακτικά στην τροπόσφαιρα $z=Z$ και το γεωδυναμικό ύψος χρησιμοποιείται σαν κατακόρυφη συντεταγμένη

(π.χ. η ισοβαρής των 850mb βρίσκεται στα 1550 m)

Γεωστροφικός άνεμος

Εκφράσεις του γεωστροφικού ανέμου σε ισοβαρικές συντεταγμένες

Από την υδροστατική εξίσωση:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{\partial z}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = g \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \rho g \frac{\partial z}{\partial y} \rightarrow \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) = g \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad (1)$$

$$\boxed{u_g = - \frac{1}{\rho f} \frac{\partial P}{\partial y}} \quad \boxed{v_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial P}{\partial x}} \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει:

$$u_g = - \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$v_g = \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\mathbf{V}_g \equiv \frac{1}{f} (\mathbf{k} \times \nabla \Phi)$$

$$V_g = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

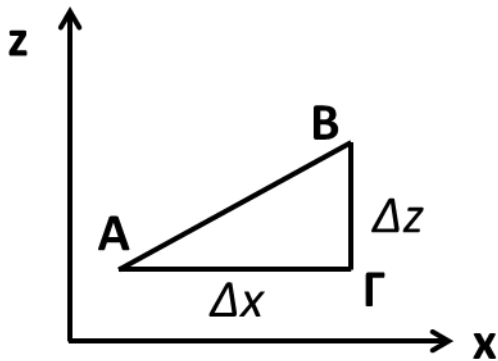
Σε φυσικές
συντεταγμένες

Οι σχέσεις αυτές δεν περιέχουν την πυκνότητα ρ

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του γεωστροφικού ανέμου σε ισοβαρικές

συντεταγμένες είναι:
$$\vec{V}_g = \frac{g}{f} \vec{k} \times \nabla_p z$$

Λύση



Θεωρούμε διδιάστατο σύστημα αξόνων ως προς x, z όπου AB ισοβαρική γραμμή.

Η μεταβολή της πίεσης από το $A \rightarrow B$ θα είναι:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_z dx + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_x dz \quad \text{Όμως } dP_{A \rightarrow B} = 0$$

άρα
$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_z dx = - \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_x dz$$

Και από την
εξίσωση
υδροστατικής
ισορροπίας:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_x = -\rho g$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_z dx = \rho g dz \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_z dx = \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_P dx$$

ομοίως

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_z dy = \rho g dz \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_z dy = \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_P dy$$

συνέχεια

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_z dx &= \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_P dx \\ \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_z dy &= \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_P dy \end{aligned} \right\} \vec{\nabla}_z P = \rho g \vec{\nabla}_p z$$

Αλλά η εξίσωση του γεωστροφικού ανέμου σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι:

$$\vec{V}_g = \frac{1}{\rho f} \vec{k} \times \vec{\nabla}_z P = \frac{1}{\rho f} \vec{k} \times \rho g \vec{\nabla}_p z = \cancel{\frac{\rho g}{\rho f}} \vec{k} \times \vec{\nabla}_p z$$

$$\boxed{\vec{V}_g = \frac{g}{f} \vec{k} \times \vec{\nabla}_p z}$$

Άνεμος βαθμίδας

Εκφράσεις του ανέμου βαθμίδας σε ισοβαρικές συντεταγμένες

Κυκλωνικό σύστημα

$$V_L = -\frac{fR}{2} + \sqrt{\left(\frac{f^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}\right)} \quad V_L = -\frac{fR}{2} + \sqrt{\left(\frac{f^2 R^2}{4} - R \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)}$$

Αντικυκλωνικό σύστημα

$$V_H = -\frac{fR}{2} - \sqrt{\left(\frac{f^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}\right)} \quad V_H = -\frac{fR}{2} - \sqrt{\left(\frac{f^2 R^2}{4} - R \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)}$$

επειδή $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \rightarrow \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)$

Παράδειγμα

Υπολογίσατε τη μέγιστη ένταση του ανέμου βαθμίδας σε έναν αντικυκλώνα σε σημείο που είναι 500 km μακριά από το κέντρο του, καθώς και την αντίστοιχη ελάχιστη τιμή της απόστασης μεταξύ των ισοϋψών (χαραγμένων ανά 40grm) σε έναν ισοβαρικό χάρτη κλίμακας 1:(2x10⁷). Δίνονται:

Ω : η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της γης = 7.29×10^{-5} rad/sec και
 g_o : η επιτάχυνση της βαρύτητας στη στάθμη της θάλασσας = 9.8 m/sec²
 ϕ : γεωγραφικό πλάτος = 55°

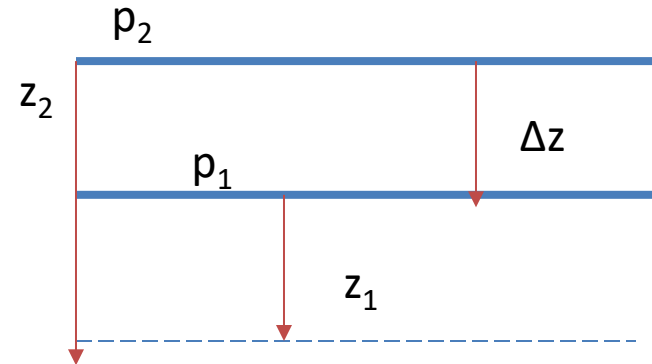
Ισοπαχείς (thickness)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= -g\rho & \rightarrow g dz &= \frac{dP}{-\rho} \\ P &= \rho RT \rightarrow \rho = \frac{P}{RT} \end{aligned} \right\} \rightarrow g dz = -RT \frac{dP}{P} = -RT d(\ln P)$$

$$\rightarrow z_2 - z_1 = \frac{R}{g_0} \int_{p_2}^{p_1} T(d\ln P)$$

Ορίζοντας ως μέση
θερμοκρασία του
στρώματος από p_1
μέχρι p_2

$$\bar{T} = \frac{R \int_{p_2}^{p_1} T d(\ln P)}{\int_{p_2}^{p_1} d(\ln P)}$$



οπότε

$$\Delta z = z_2 - z_1 = -\frac{R \bar{T}}{g} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{R \bar{T}}{g} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

P_1 =κατώτερη ισοβαρική επιφάνεια

P_2 =ανώτερη ισοβαρική επιφάνεια $p_1 > p_2$ και $z_2 > z_1$

Ισοπαχείς (thickness)

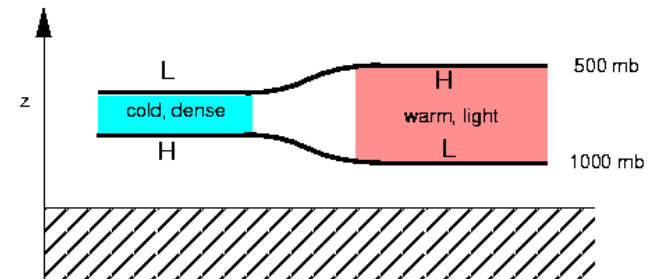
$$\Delta z = z_2 - z_1 = -\frac{R}{g} \bar{T} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{R}{g} \bar{T} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

Μονάδα μέτρησης gpm

P_1 =κατώτερη ισοβαρική επιφάνεια

P_2 =ανώτερη ισοβαρική επιφάνεια ($p_1 > p_2$)

Thickness and Temperature



$$z_{500} - z_{1000} = \bar{T}_{avg} \frac{R}{g} \ln\left(\frac{p_{1000}}{p_{500}}\right)$$

z – height of pressure level

$\bar{T}_{avg}$ – average temperature of layer

R – gas constant

g – gravitation constant (9.8 m/s²)

p – pressure

Το πάχος ενός στρώματος μεταξύ δύο ισοβαρικών επιφανειών είναι ανάλογο της μέσης τιμής της θερμοκρασίας του

Μικρό πάχος Δz -----ψυχρό στρώμα

Μεγάλο πάχος -----θερμό στρώμα

Αντίστοιχα, το ύψος μιας ισοβαρικής επιφάνειας P_H βρίσκεται από τη σχέση:

$$H = \frac{R \cdot \bar{T}}{g} \ln \frac{P_0}{P_H}$$

Υψομετρική Εξίσωση

όπου $P_0=1010$ hPa (η πίεση στην επιφάνεια του εδάφους)

Δείξτε ότι για ατμόσφαιρα με σταθερό ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας (lapse rate) γ , το γεωδυναμικό ύψος σε επίπεδο πίεσης P_1 δίνεται από τη σχέση:

$$Z = \left(\frac{T_0}{\gamma} \right) \left[1 - \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{R\gamma}{g}} \right]$$

T_0 =θερμοκρασία στην επιφάνεια με πίεση P_0

R =σταθερά του αέρα

Από την υδροστατική εξίσωση και την καταστατική εξίσωση των αερίων έχουμε:

$$dP = -\rho g dz$$

$$P = \rho RT$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{-g}{RT} dz$$

$$\boxed{dP/P = d \ln P}$$

$$\int_{P_0}^{P_1} d \ln P = \frac{-g}{R} \int_0^Z \frac{1}{T} dz$$

$$\boxed{T = T_0 - \gamma Z}$$

Μεταβολή της θερμοκρασίας με το ύψος

(Συνέχεια)

$$\int_{P_0}^{P_1} d\ln P = \frac{-g}{R} \int_0^z \frac{1}{T_0 - \gamma z} dz$$

Αλλά

$$\int \frac{1}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$$

$$\ln \frac{P_1}{P_0} = \ln \left(\frac{T_0 - \gamma z}{T_0} \right)^{\frac{g}{R\gamma}}$$

Και λύνοντας ως προς z:

$$z = \left(\frac{T_0}{\gamma} \right) \left[1 - \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{-\frac{R\gamma}{g}} \right]$$