

Θεμελιώδεις δυνάμεις στην ατμόσφαιρα

Δυνάμεις που καθορίζουν την κίνηση στην ατμόσφαιρα

A) Πραγματικές δυνάμεις

- Δύναμη της βαροθαθμίδας
- Δύναμη της βαρύτητας
- Δύναμη τριβής

B) Φαινόμενες δυνάμεις (που εισάγει ένας παρατηρητής που στρέφεται μαζί με τη γη για να ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα)

- Δύναμη Coriolis
- Δύναμη φυγόκεντρος

Πως προκύπτουν οι φαινόμενες δυνάμεις στην ατμόσφαιρα?

Ως προς σχετικό (μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς)

Έστω σημειακό αντικείμενο με ταχύτητα $\vec{V}$ ως προς το σχετικό συστ. αναφ., $\vec{V}_\alpha$ ως προς το αδρανειακό συστ. αναφ. και $\vec{V}_\Omega$ την ταχύτητα του σχετικού συστ. αναφ. ως προς το αδρανειακό. Τότε μεταξύ αυτών ισχύει η σχέση:

$$\vec{V}_\alpha = \vec{V} + \vec{V}_\Omega \quad (1)$$

Επίσης για την $\vec{V}_\Omega$ ισχύει $\vec{V}_\Omega = \vec{\Omega} \times \vec{r}$, όπου το διάνυσμα θέσης του μελετούμενου σώματος. Η σχέση (1) μπορεί να γραφεί πλέον ως:

$$\vec{V}_\alpha = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (1.1)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ως μοναδιαία διανύσματα του απόλυτου συστ. αναφ. τα $\hat{i}_\alpha, \hat{j}_\alpha, \hat{k}_\alpha$ και τα αντίστοιχα του σχετικού συστ. αναφ. $\hat{i}_\sigma, \hat{j}_\sigma, \hat{k}_\sigma$. Τότε ένα οποιοδήποτε διάνυσμα θέσης $\vec{A}$ ενός σημείου γράφεται:

$$\vec{A} = A_x \hat{i}_\alpha + A_y \hat{j}_\alpha + A_z \hat{k}_\alpha = A'_x \hat{i}_\sigma + A'_y \hat{j}_\sigma + A'_z \hat{k}_\sigma$$

όπου A_x, A_y, A_z οι συντεταγμένες του $\vec{A}$ στο απόλυτο συστ. αναφ. και αντίστοιχα A'_x, A'_y, A'_z οι συντεταγμένες του $\vec{A}$ στο σχετικό συστ. αναφ.

Η ολική χρονική παράγωγος του $\vec{A}$ στο απόλυτο συστ. αναφ. ($\frac{d_\alpha \vec{A}}{dt}$) είναι:

$$\frac{d_\alpha \vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \hat{i}_\alpha + \frac{dA_y}{dt} \hat{j}_\alpha + \frac{dA_z}{dt} \hat{k}_\alpha = \frac{dA'_x}{dt} \hat{i}_\sigma + \frac{dA'_y}{dt} \hat{j}_\sigma + \frac{dA'_z}{dt} \hat{k}_\sigma + A'_x \frac{d\hat{i}_\sigma}{dt} + A'_y \frac{d\hat{j}_\sigma}{dt} + A'_z \frac{d\hat{k}_\sigma}{dt} \quad (2)$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι τα μοναδιαία διανύσματα του σχετικού συστ. αναφ. μεταβάλλονται ως προς το αδρανειακό καθώς διατηρούν μεν σταθερό μήκος, η διεύθυνσή τους ωστόσο μεταβάλλεται άρα πρέπει να υπολογιστεί και η χρονική παράγωγος αυτών.

Συγκεκριμένα για αυτά ισχύει:

$$\frac{d\hat{i}_\sigma}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{i}_\sigma, \quad \frac{d\hat{j}_\sigma}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{j}_\sigma, \quad \frac{d\hat{k}_\sigma}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{k}_\sigma$$

Η
απόδειξη
ακολουθεί

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (2) έχουμε:

$$\frac{d_\alpha \vec{A}}{dt} = \frac{dA'_x}{dt} \hat{i}_\sigma + \frac{dA'_y}{dt} \hat{j}_\sigma + \frac{dA'_z}{dt} \hat{k}_\sigma + \boxed{A'_x (\vec{\Omega} \times \hat{i}_\sigma)} + A'_y (\vec{\Omega} \times \hat{j}_\sigma) + A'_z (\vec{\Omega} \times \hat{k}_\sigma) \Rightarrow$$

$S(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times S\vec{b}) = (S \vec{a}) \times \vec{b}$ όπου S =βαθμωτό μέγεθος

$$\frac{d_\alpha \vec{A}}{dt} = \frac{d(A'_x \hat{i}_\sigma + A'_y \hat{j}_\sigma + A'_z \hat{k}_\sigma)}{dt} + \boxed{(\vec{\Omega} \times A'_x \hat{i}_\sigma)} + (\vec{\Omega} \times A'_y \hat{j}_\sigma) + (\vec{\Omega} \times A'_z \hat{k}_\sigma) \Rightarrow$$

$$\frac{d_\alpha \vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A} \quad (3) \quad \text{Όπου } \frac{d\vec{A}}{dt} \text{ η επιτάχυνση ως προς το σχετικό συστ. αναφ.}$$

Αν στην (3) αντικαταστήσουμε το $\vec{r}$ προκύπτει η (1.1)

$$\frac{d_{\alpha}\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{V}_{\alpha} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad \vec{A} = \vec{r}$$

ενώ αν στην (3) αντικαταστήσουμε το $\vec{V}_{\alpha}$ προκύπτει η σχέση

$$\frac{d_{\alpha}\vec{V}_{\alpha}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{\alpha}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{V}_{\alpha} \quad (4) \quad \vec{A} = \vec{V}_{\alpha}$$

Θέτοντας στο δεξιό σκέλος της (4) αντί για $\vec{V}_{\alpha}$ το $\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ από τη σχέση (1.1), έχουμε:

$$\frac{d_{\alpha}\vec{V}_{\alpha}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{\Omega} \times (\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \Rightarrow$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\frac{d_{\alpha}\vec{V}_{\alpha}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}) \cdot \vec{r} \Rightarrow$$

$$\frac{d_{\alpha}\vec{V}_{\alpha}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \Omega^2 \vec{r} \quad (5)$$

Η σχέση (5) ισχύει για οποιοδήποτε σχετικό σύστ. αναφ. περιστρέφεται μαζί με τη Γη. Λύνοντας την (5) ως προς την επιτάχυνση στο σχετικό συστ. αναφ. (έτσι δηλαδή όπως «βλέπει» την κίνηση του σώματος παρατηρητής στην επιφάνεια της Γης) έχουμε:

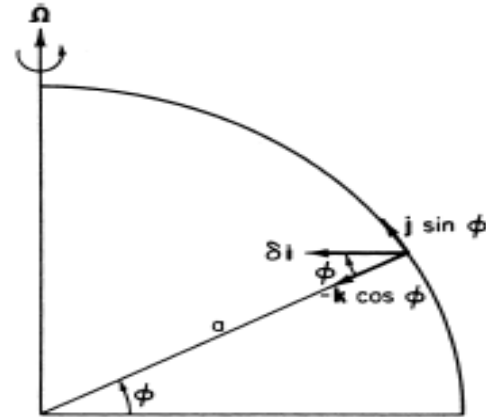
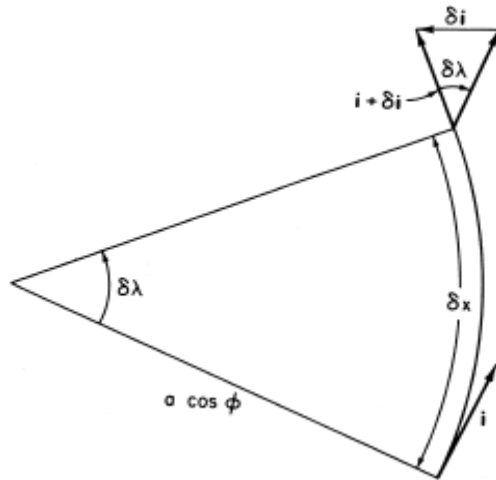
$$\frac{d_{\alpha} \vec{V}_{\alpha}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \Omega^2 \vec{r} \Rightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d_{\alpha} \vec{V}_{\alpha}}{dt} \underbrace{- 2\vec{\Omega} \times \vec{V}}_{\text{Δύναμη Coriolis}} + \underbrace{\Omega^2 \vec{r}}_{\text{Φυγόκεντρος}} \quad (6)$$

Αληθείς δυνάμεις

Προσοχή: Οι δυνάμεις στη Δυναμική Ατμόσφαιρας αναφέρονται στη μονάδα της μάζας και έχουν διάσταση επιτάχυνσης

Απόδειξη της σχέσης

$$\frac{d\widehat{i}_\sigma}{dt} = \vec{\Omega} \times \widehat{i}_\sigma$$



$$\delta \widehat{i}_\sigma = \frac{\partial \widehat{i}_\sigma}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial \widehat{i}_\sigma}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \widehat{i}_\sigma}{\partial z} \delta z \quad (1)$$

Επειδή $\delta \lambda = \Omega \delta t$ $\delta \phi = 0$ $\delta z = 0$

$$(1) \rightarrow \frac{\delta \widehat{i}_\sigma}{\delta t} = \frac{\partial \widehat{i}_\sigma}{\partial \lambda} \frac{\delta \lambda}{\delta t} = \frac{\partial \widehat{i}_\sigma}{\partial \lambda} \Omega$$

Και παίρνοντας $\lim_{\delta t \rightarrow 0}$

$$\frac{d\widehat{i}_\sigma}{dt} = \Omega \frac{\partial \widehat{i}_\sigma}{\partial \lambda}$$

Από τα παραπάνω σχήματα προκύπτει: $\frac{\partial \widehat{i}_\sigma}{\partial \lambda} = \widehat{j}_\sigma \sin \phi - \widehat{k}_\sigma \cos \phi$

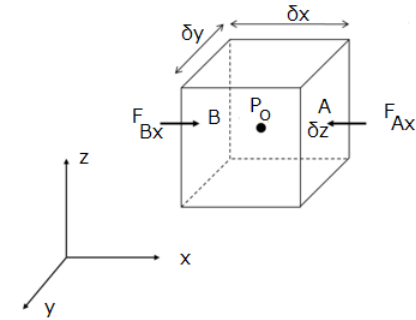
Επειδή $\Omega = (0, \Omega \sin \phi, \Omega \cos \phi)$

$$\frac{d\widehat{i}_\sigma}{dt} = \Omega (\widehat{j}_\sigma \sin \phi - \widehat{k}_\sigma \cos \phi) = \vec{\Omega} \times \widehat{i}_\sigma$$

Δύναμη Βαροβαθμίδας

Θεωρούμε στοιχειώδη όγκο αέρα $\delta V = \delta x \delta y \delta z$

Αν p_0 είναι η πίεση στο κέντρο τότε η πίεση που ασκείται εξωτερικά στο τοίχωμα A λόγω των συγκρούσεων με τα μόρια του αέρα μπορεί να εκφρασθεί σε σειρά με ανάπτυξη κατά Taylor:



$$p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} + \dots \text{...όροι ανώτερης τάξης}$$

Αγνοώντας τους όρους ανώτερης τάξης προκύπτει η δύναμη βαροβαθμίδας που ασκείται στο στοιχειώδη όγκο στο τοίχωμα A

$$F_{Ax} = - \left(p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z$$

Ανάπτυξη κατά Taylor με κέντρο το x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + \dots$$

Δύναμη = Πίεση × Επιφάνεια

Επιφάνεια $A = B = \delta y \delta z$

Και όμοια στο τοίχωμα B:

$$F_{Bx} = + \left(p_0 - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z$$

Όπου στην περίπτωση μας $x - x_0 = \delta x / 2$

Δύναμη Βαροβαθμίδας

Αθροίζοντας τις δύο δυνάμεις προκύπτει η συνολική συνιστώσα της δύναμης βαροβαθμίδας που ασκείται στον στοιχειώδη όγκο

$$F_x = F_{Ax} + F_{Bx} = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$

Και επειδή για πυκνότητα ρ η μάζα του στοιχειώδους όγκου είναι $m = \rho V = \rho \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$, προκύπτει η δύναμη βαροβαθμίδας ανά μονάδα μάζας:

$$F_{px} = \frac{F_x}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

και αντίστοιχα

$$F_{py} = \frac{F_y}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$F_{pz} = \frac{F_z}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

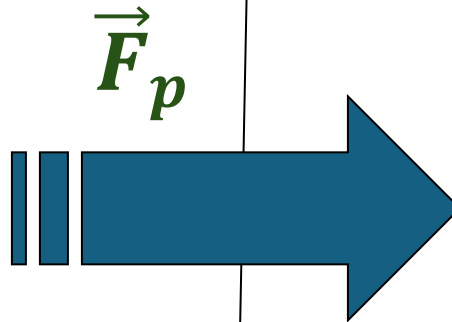
$$\boxed{\frac{\vec{F}}{m} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p}$$

Δύναμη Βαροβαθμίδας

$$\frac{\vec{F}_p}{m} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P$$

$$\vec{\nabla} P = \text{βαροβαθμίδα}$$

Υψηλή
πίεση



Η δύναμη βαροβαθμίδας
κατευθύνεται προς τις
μικρότερες τιμές της
πίεσης

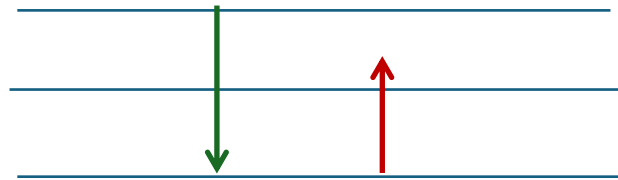
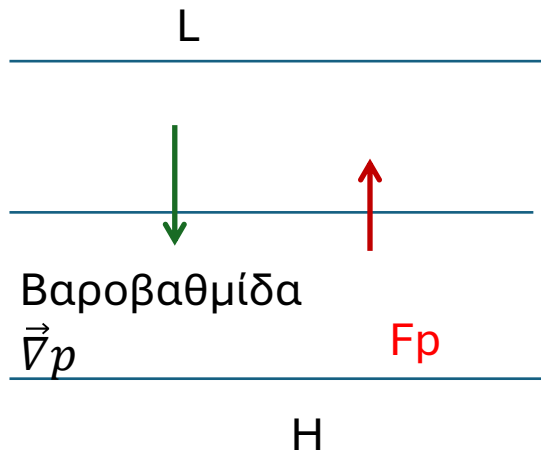
Χαμηλή
πίεση

$$\vec{\nabla} P$$

Η βαροβαθμίδα
κατευθύνεται προς τις
μεγαλύτερες τιμές της
πίεσης

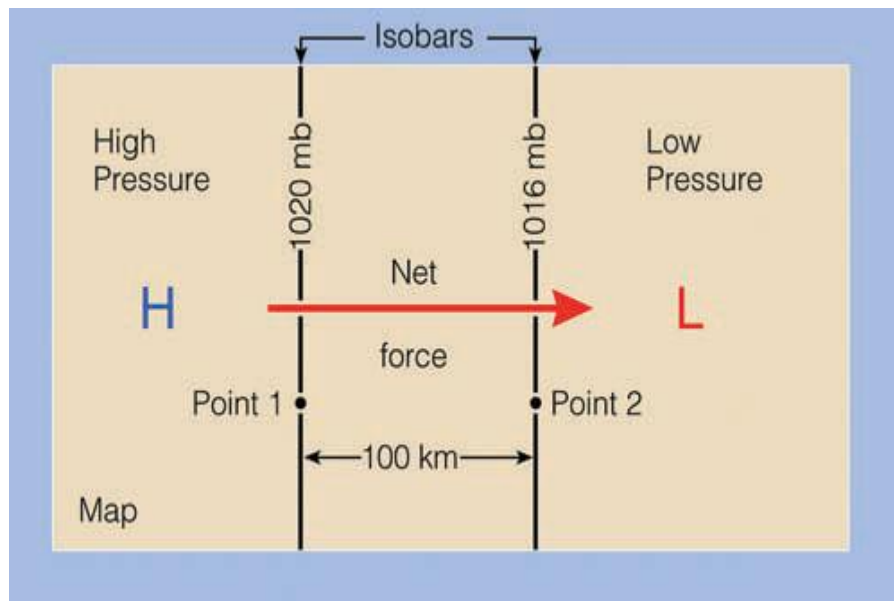
Δύναμη Βαροβαθμίδα

- Η δύναμη της βαροβαθμίδα έχει διεύθυνση κάθετη στις ισοβαρείς από τις υψηλές προς τις χαμηλές πιέσεις
- Είναι ανάλογη της βαθμίδα της πίεσης και όχι της ίδιας της πίεσης αυτής
- πυκνές ισοβαρείς=μεγαλύτερη βαροβαθμίδα= μεγαλύτερη δύναμη βαροβαθμίδα

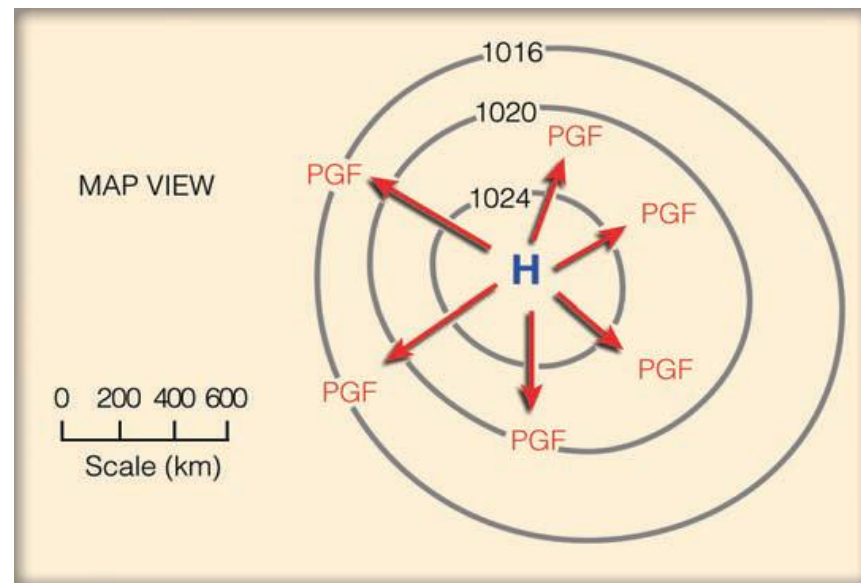


Δύναμη βαροβαθμίδας

Απεικόνιση σε χάρτες



Ισοβαρείς σε κοντική απόσταση
σημαίνουν ισχυρή βαροβαθμίδα και
ισχυρή δύναμη βαροβαθμίδας



Βαροβαθμίδα

- Οριζόντια βαροβαθμίδα

- Τυπικά παίρνει μικρές τιμές σε συνοπτική κλίμακα ($1\text{mb}/100\text{km}$)
- Μικρής κλίμακας φαινόμενα, όπως τροπικοί κυκλώνες και ανεμοστροβίλοι παρουσιάζουν μεγάλες τιμές ($1\text{mb}/6\text{km}$)

- Κατακόρυφη βαροβαθμίδα

- Μέσες τιμές της κατακόρυφης βαροβαθμίδας είναι συνήθως μεγαλύτερες από τις ακραίες τιμές της οριζόντιας βαροβαθμίδας καθώς η πίεση ελαττώνεται με το ύψος ($1\text{mb}/10\text{m}$)

Δύναμη Βαρύτητας

Νόμος παγκόσμιας έλξης
(G =σταθερά της βαρύτητας)

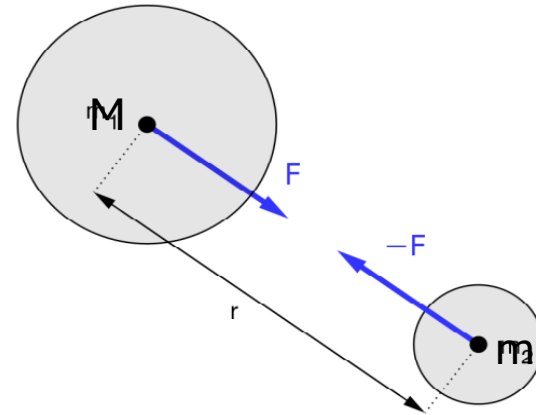
$$\mathbf{F}_g = -\frac{GMm}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

Αν M η μάζα της Γης και m μια μάζα αέρα στην ατμόσφαιρα η δύναμη βαρύτητας ανά μονάδα μάζας είναι :

$$\frac{\mathbf{F}_g}{m} \equiv \mathbf{g}^* = -\frac{GM}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (1)$$

Στη μετεωρολογία χρησιμοποιούμε συνήθως το ύψος από τη μέση στάθμη της θάλασσας σαν κατακόρυφη συντεταγμένη. Στη στάθμη της θάλασσας είναι:

$$\mathbf{g}_0^* = -(GM/a^2)(\mathbf{r}/r) \quad (2)$$



Από τις 1,2 προκύπτει σε ύψος z

$$\mathbf{g}^* = \frac{\mathbf{g}_0^*}{(1 + z/a)^2}$$

$r=a$ =μέση ακτίνα της Γης στη μέση στάθμη θάλασσας
σε ύψος z θα είναι $r=a+z$

Στη μετεωρολογία επειδή $z \ll a$ θεωρούμε $\mathbf{g}^* = \mathbf{g}_0^*$

Φυγόκεντρος Δύναμη

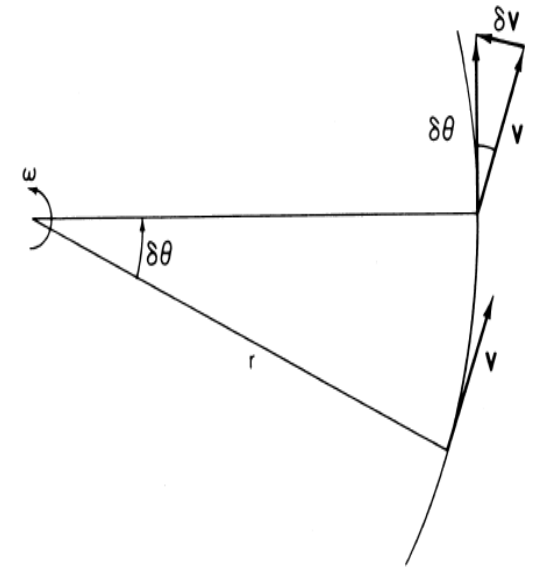
Για στοιχειώδη μάζα σε κυκλική τροχιά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \omega^2 \vec{r}$$

λόγω της μεταβολής της διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας V

Για να εφαρμόσουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε ένα σύστημα συντεταγμένων που περιστρέφεται μαζί με τη μάζα πρέπει να θεωρήσουμε μια φαινόμενη δύναμη που να ισορροπεί την κεντρομόλο.

Η δύναμη αυτή λέγεται φυγόκεντρος και τείνει να εκτρέψει όλα τα σώματα προς τα έξω από τον άξονα της πλανητικής περιστροφής.



$$\frac{\vec{F}_\varphi}{m} = -\Omega^2 \vec{r}$$

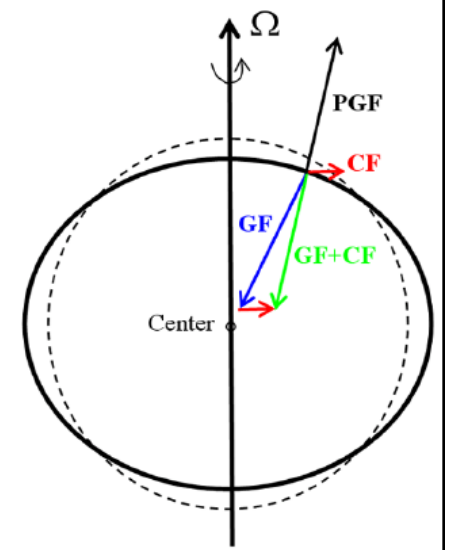
Ω =γωνιακή ταχύτητα
περιστροφής της γης

Οφείλεται στην περιστροφή της γης περί τον άξονά της και ΔΕΝ προϋποθέτει την κίνηση του αέρα. Επομένως υπάρχει πάντα

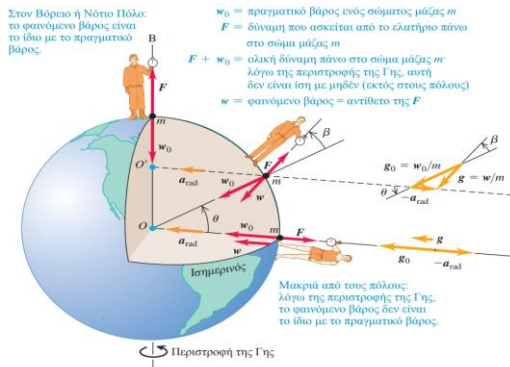
Μέγιστη τιμή $\approx 0.03 \text{ m/s}^2$

Ενεργός Βαρύτητα

- Η ενεργός βαρύτητα $\mathbf{g}$ αντιπροσωπεύει το διανυσματικό άθροισμα της πραγματικής βαρυτικής έλξης $\mathbf{g}^*$, που έλκει όλα τα σώματα συγκεκριμένης μάζας προς το κέντρο της μάζας της Γης και της φυγόκεντρου $\Omega^2 \mathbf{R}$
- Η ενεργός βαρύτητα είναι πάντα κάθετη στην επιφάνεια της Γης αλλά λόγω της μη σφαιρικότητας της Γης δεν κατευθύνεται προς το κέντρο (εκτός από τους πόλους και τον ισημερινό)
- Στις εξισώσεις κίνησης χρησιμοποιείται κατευθείαν το $\mathbf{g}$



Μόνο κατακόρυφη
συνιστώσα



$$\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}^* + \Omega^2 \mathbf{R}$$

$$\mathbf{g}^* \gg \Omega^2 \mathbf{R}$$

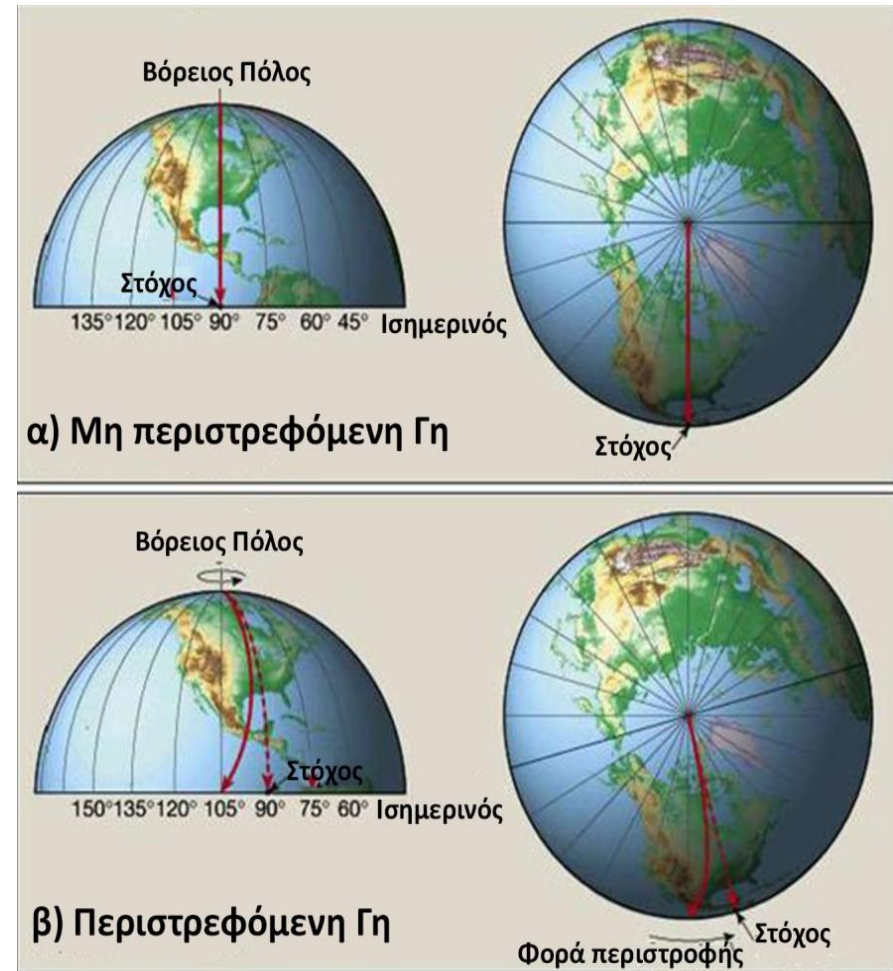
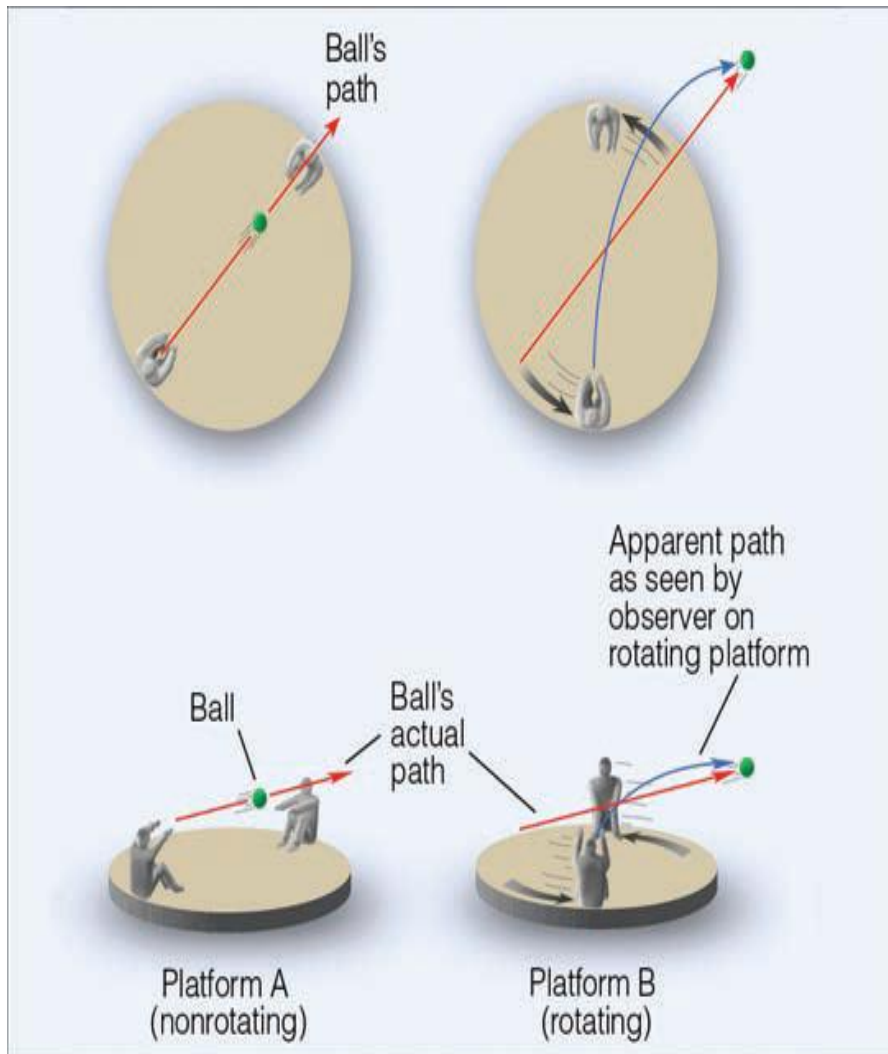
Η περίοδος περιστροφής της Γης είναι 23 h 56 min 4 s = 86,164 s
Έτσι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης είναι $\Omega = 2\pi / (86,164 \text{ s}) = 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$

Δύναμη Coriolis

Ένα σώμα το οποίο κινείται με ταχύτητα V σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής της Γης (μαζί με την περιστρεφόμενη γη) δέχεται μία επιπλέον φαινόμενη δύναμη, που καλείται **δύναμη Coriolis**

$$\frac{\vec{F}_c}{m} = -2\vec{\Omega} \times \vec{V}$$

Δύναμη Coriolis



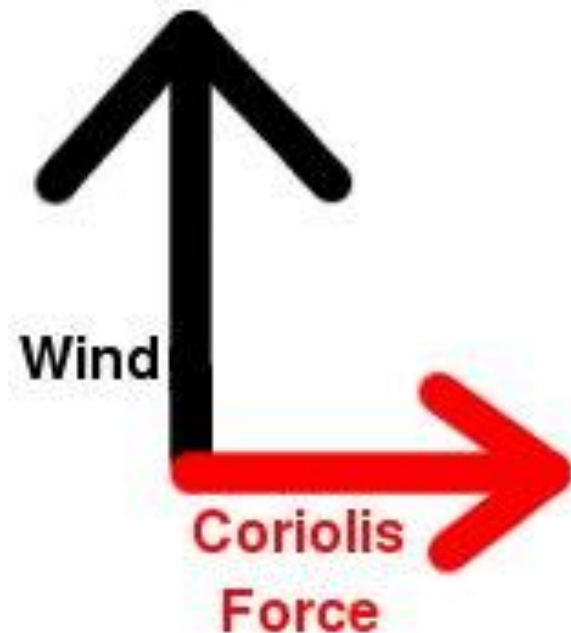
Δύναμη Coriolis

Είναι κάθετη στην ταχύτητα και προς τα δεξιά της κίνησης

εφαρμόζεται στα σώματα που κινούνται

Προκαλεί απόκλιση ενός κινούμενου σώματος από την τροχιά του λόγω περιστροφής της γης:

- Στα δεξιά στο Β. ημισφαίριο
- Στα αριστερά στο Ν. ημισφαίριο.



Μεταβάλλει μόνο τη διεύθυνση της ταχύτητας και όχι το μέτρο της

Δύναμη Coriolis

$$\frac{\vec{F}_c}{m} = -2\vec{\Omega} \times \vec{V} = -2\Omega \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ u & v & w \end{bmatrix} =$$
$$-2\Omega[(w\cos\phi - v\sin\phi) \vec{i} - (0 - u\sin\phi) \vec{j} + (0 - u\cos\phi) \vec{k}]$$

Οι τρεις συνιστώσες:

$$F_{cx} = -2\Omega (w\cos\phi - v\sin\phi)$$

$$F_{cy} = -2\Omega u\sin\phi$$

$$F_{cz} = 2\Omega u\cos\phi$$

ϕ =γεωγραφικό πλάτος

V =ταχύτητα του σώματος (ταχύτητα ανέμου)

Ω =ταχύτητα περιστροφής
της γης

Δύναμη Coriolis

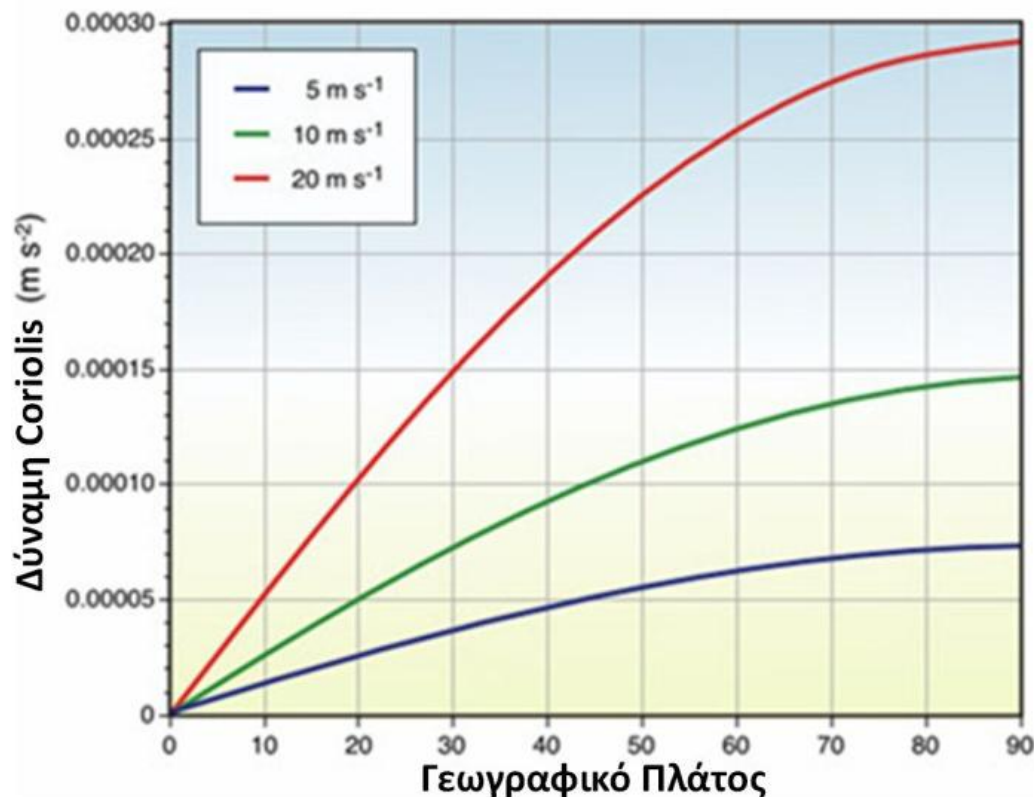
Η οριζόντια συνιστώσα μπορεί να γραφεί στη συνοπτική κλίμακα (αν $w=0$):

$$\frac{F_c}{m} = -2\Omega V \sin \varphi = -fV$$

$f=2\Omega \sin \phi =$
Coriolis parameter

Είναι κάθετη στην ταχύτητα V και προς τα δεξιά της κίνησης (για το Β. Ημισφαίριο)

Δύναμη Coriolis

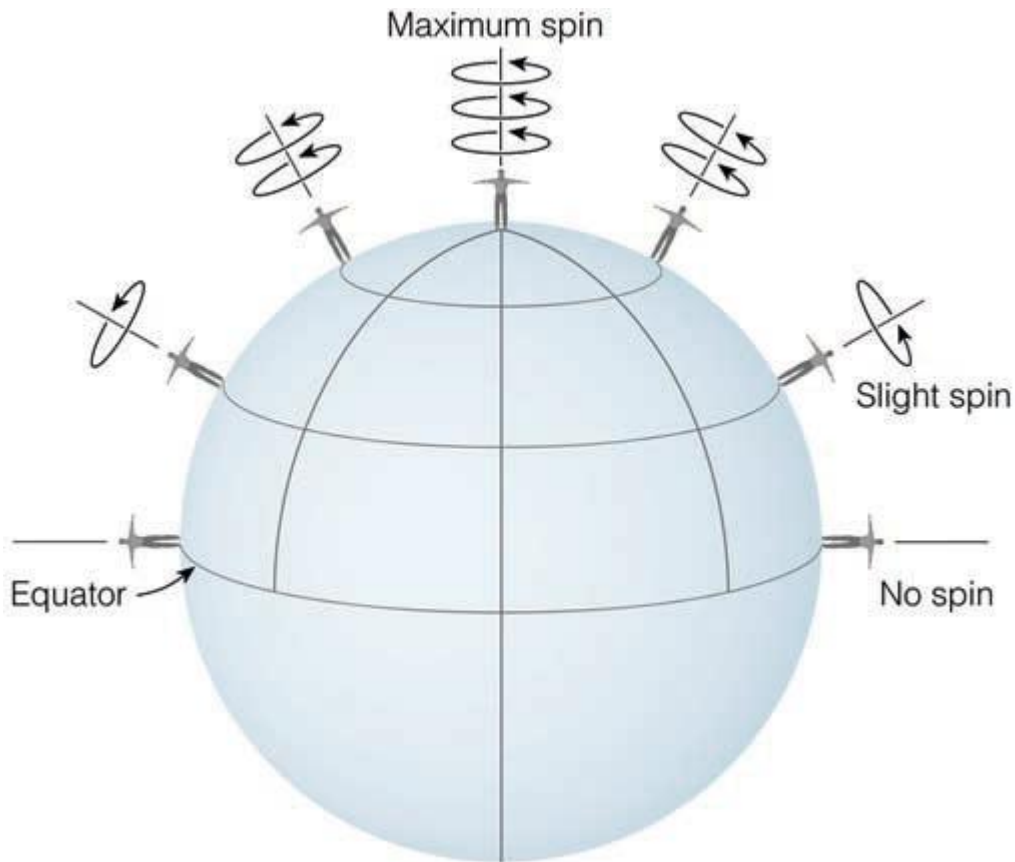


Η δύναμη Coriolis αυξάνει από τον Ισημερινό, όπου έχει τιμή μηδέν, προς τους πόλους, όπου και λαμβάνει τη μέγιστη τιμή $2\omega V$

Επίσης αυξάνει με την ένταση της ταχύτητας της αέριας μάζας

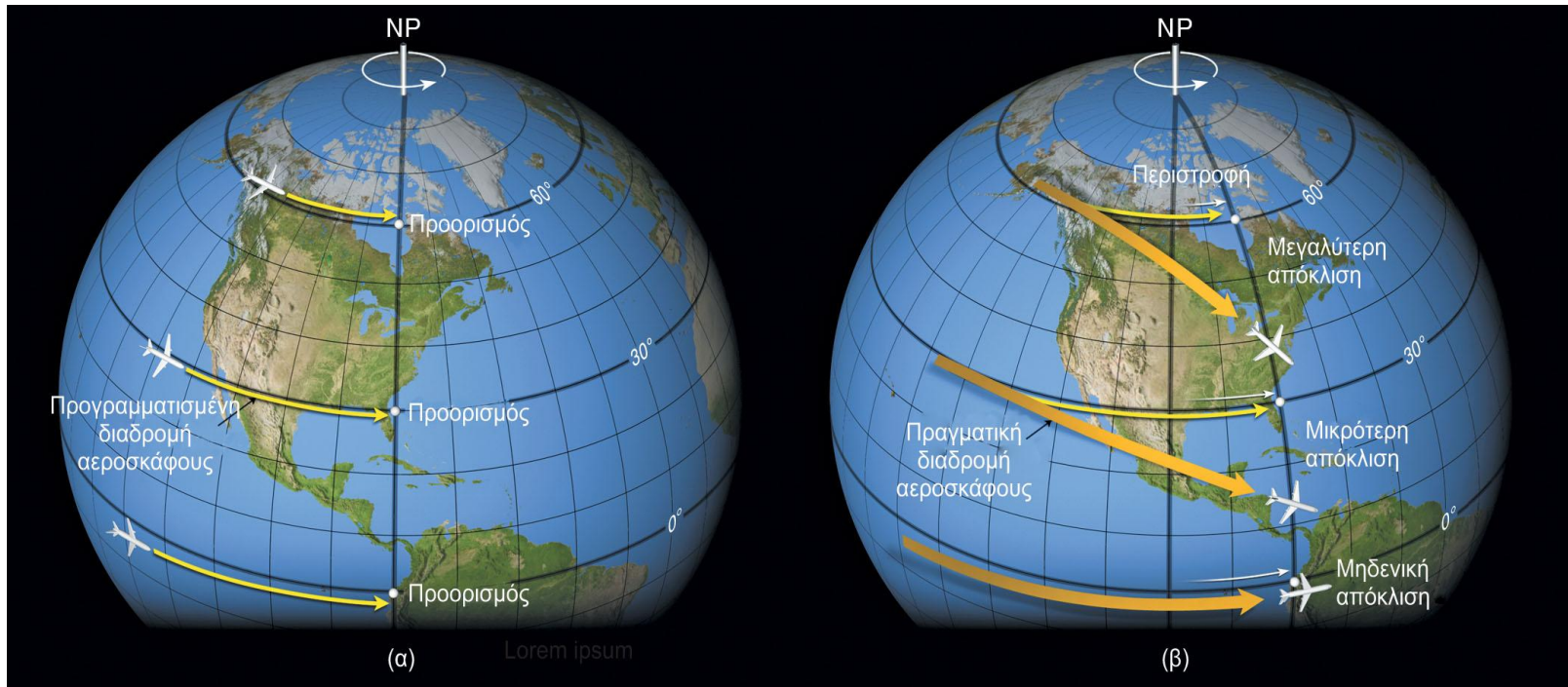
- Η δύναμη Coriolis επιδρά μόνο στη διεύθυνση του ανέμου και όχι στο μέτρο του
- Έχει αμελητέα επίδραση σε φαινόμενα με περίοδο πολύ μικρότερη από την περίοδο περιστροφής της γης

Coriolis παράμετρος



$f=0$ στον ισημερινό
 $f=\max$ στον πόλο
 $f>0$ στο Βόρειο
Ημισφαίριο
 f αυξάνει με το
γεωγραφικό πλάτος

Δύναμη Coriolis



Η εκτροπή (επίδραση της δύναμης Coriolis) είναι μέγιστη στους πόλους και βαίνει μειούμενη έως μηδενική στον Ισημερινό. Για το λόγο αυτό η εκτροπή του αεροσκάφους από την κανονική πορεία του είναι πολύ μεγαλύτερη στα μεγάλα γεωγραφικά πλάτη και ανύπαρκτη στον Ισημερινό.

Δύναμη Τριβής

Η κάτω πλάκα είναι ακίνητη, ενώ η πάνω πλάκα κινείται στη x διεύθυνση με ταχύτητα $V=u_0$.

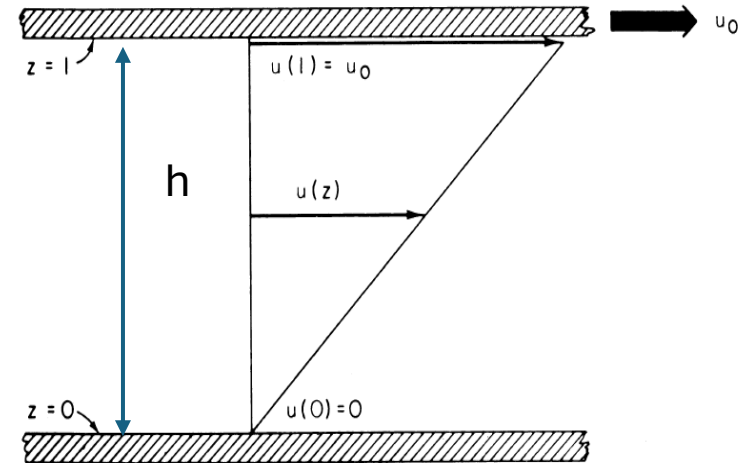
Βρίσκεται ότι η δύναμη, η επαπτομενική στη πάνω πλάκα,

που απαιτείται για να κρατήσει σταθερή την κίνηση είναι ανάλογη της επιφάνειας της πλάκας, ανάλογη της ταχύτητας και αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης των δύο πλακών, δηλαδή:

$$F = \mu A \frac{u_0}{h}$$

Όπου μ =συντελεστής
εσωτερικής τριβής ή
ιξώδους

Αυτή η δύναμη πρέπει να είναι ακριβώς ίση με τη δύναμη που ασκείται από την πάνω πλάκα στο ρευστό αμέσως από κάτω. Για ομαλή κίνηση, κάθε οριζόντιο στρώμα ρευστού πρέπει να ασκεί την ίδια δύναμη στο ρευστό από κάτω. Λαμβάνοντας το όριο καθώς το πάχος του στρώματος του ρευστού τείνει στο μηδέν, η **δύναμη τριβής ανά μονάδα επιφάνειας (ή διατμητική τάση) γράφεται σαν**



Τριβή σε μία διάσταση

Τριβή ανα μονάδα επιφάνειας
(διατμητική τάση)

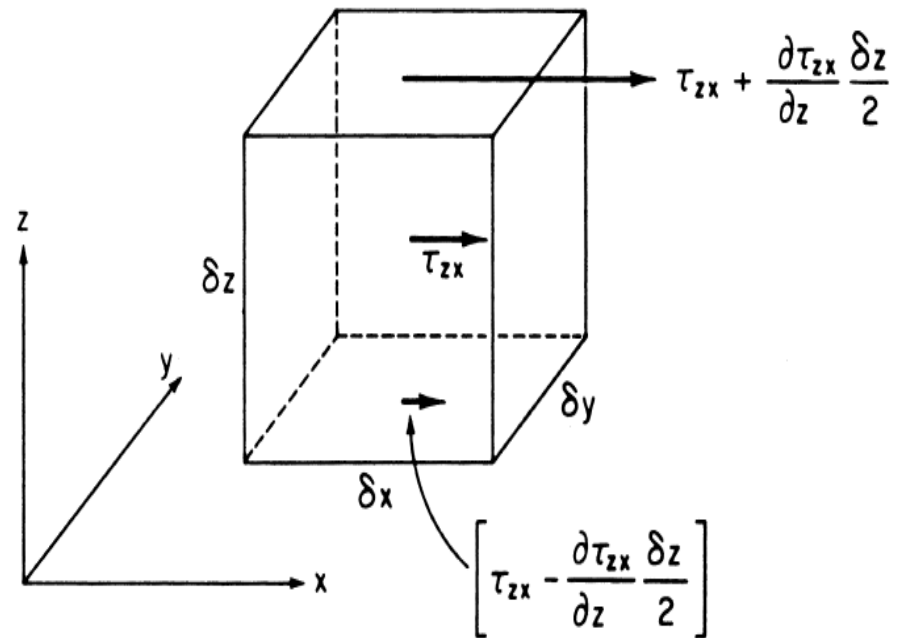
$$\tau_{zx} = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \mu \frac{\delta u}{\delta z} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$$

τ_{zx} η συνιστώσα της διατμητικής τάσης στον άξονα x που οφείλεται στην κατακόρυφη κατανομή της οριζόντιας ταχύτητας

Έστω ένας στοιχειώδης όγκος ρευστού με πλευρές δx , δy , δz (σχήμα). Μελετούμε την διατμητική τάση στη διεύθυνση x . Με ανάλυση Taylor βρίσκουμε ότι στο ρευστό αμέσως κάτω από την πάνω έδρα του όγκου αυτού ασκείται η τάση (12) ενώ στο ρευστό αμέσως πριν την κάτω έδρα η τάση (13)

$$\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \quad (12)$$

$$-\left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right) \quad (13)$$



Η συνισταμένη δύναμη, εξαιτίας των τάσεων αυτών, στον στοιχειώδη όγκο (υπενθύμιση $F=\tau A$) προκύπτει ως

$$F_{zx} = \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right) \delta y \delta x - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right) \delta y \delta x = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \boxed{\delta z \delta y \delta x} = V (\text{όγκος})$$

Διαιρώντας με την μάζα του ρευστού αυτού παίρνουμε

$$\frac{F_{zx}}{m} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (14) \quad \rho: \text{πυκνότητα ρευστού}$$

Από (14) και (11) παίρνουμε τελικά

Δύναμη τριβής

$$\frac{F_{zx}}{m} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \stackrel{\mu=\text{σταθ}}{=} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (15)$$

ν : κινηματικός συντελεστής τριβής = $1.46 \times 10^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ για την πρότυπη ατμόσφαιρα στην επιφάνεια της θάλασσας.

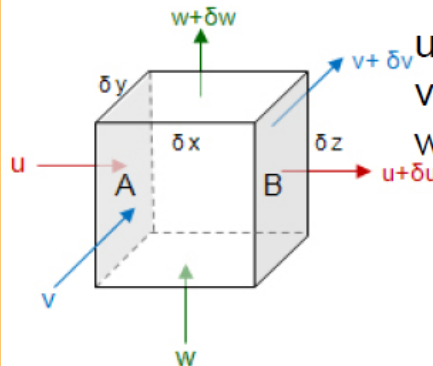
Στην (15) υπολογίσαμε λοιπόν την μία από τις 9 συνολικά συνιστώσες της τριβής ανά μονάδα μάζας. Οι άλλες 8 είναι:

$$\frac{F_{xx}}{m}, \frac{F_{xy}}{m}, \frac{F_{xz}}{m}, \frac{F_{yx}}{m}, \frac{F_{yy}}{m}, \frac{F_{yz}}{m}, \frac{F_{zy}}{m}, \frac{F_{zz}}{m}$$

Για την συνισταμένη της τριβής ανά μονάδα μάζας εξαιτίας των βαθμίδων ταχύτητας σε κάθε διεύθυνση προκύπτουν τελικά οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \frac{F_{rx}}{m} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{F_{ry}}{m} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{F_{rz}}{m} &= \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Continuity Principle:
Flow across the Faces of a Cube



u : ταχύτητα ρευστού στη διεύθυνση x
 v : ταχύτητα ρευστού στη διεύθυνση y
 w : ταχύτητα ρευστού στη διεύθυνση z

Δύναμη Τριβής

Στην ατμόσφαιρα η μοριακή ανάμειξη είναι σημαντική μόνο για τα πρώτα cm πάνω από την επιφάνεια της Γης (viscous sublayer) όπου είναι σημαντική η κατακόρυφη μεταβολή (διάτμηση) του ανέμου.

Πάνω από το στρώμα αυτό, όπου κυριαρχούν οι μοριακές διαδικασίες, η μεταφορά ορμής γίνεται πρωτίστως με τυρβώδεις στροβίλους. Η τυρβώδης μεταφορά ορμής από στροβίλους δημιουργεί εσωτερική τριβή στην ατμόσφαιρα σε μεγαλύτερες χωρικές κλίμακες.

Η τριβή δίνεται από τις εξισώσεις (16) όπου όμως ο **συντελεστής κινηματικής τριβής ν** έχει αντικατασταθεί από τον **συντελεστή τυρβώδους διάχυσης K** .