



Τμήμα Φυσικής

Δυναμική Ατμόσφαιρας

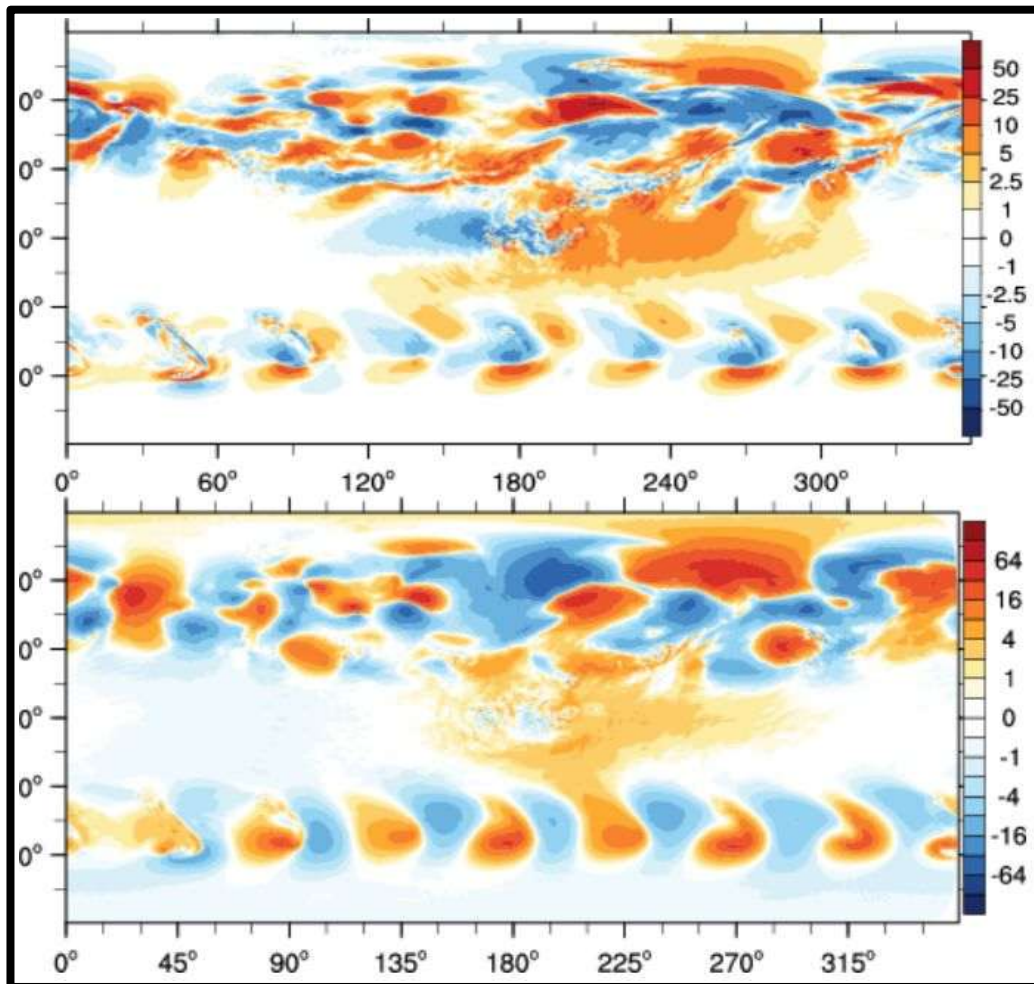
Ευάγγελος Τυρλής

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Τομέας Φυσικής Περιβάλλοντος & Μετεωρολογίας

4. Μέθοδος μικρών διαταραχών & Κύματα



- Οι εξισώσεις
- Το πρόβλημα της μη ύπαρξης αναλυτικής λύσης
- Η μέθοδος των μικρών διαταραχών
- Η στρατηγική επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων
- Μηχανικά κύματα & ιδιότητες
- Φασική και ομαδική ταχύτητα. Εξίσωση διασποράς
- Μηχανισμός επαναφοράς και είδη κυμάτων



Βασικοί νόμοι ενός μοντέλου: *primitive equations*

Navier - Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{F}_b$$

Hydrostatic approximation

Shallow-fluid approximation

Traditional approximation

Εκφράζονται σε σφαιρικές συντεταγμένες

2^{ος} νόμος Νεύτωνα: Διατήρηση ορμής

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{uv \tan \theta}{\alpha} = 2\Omega v \sin \theta - \frac{1}{\rho \alpha \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_\lambda$$

$$\frac{Dv}{Dt} - \frac{u^2 \tan \theta}{\alpha} = -2\Omega u \sin \theta - \frac{1}{\rho \alpha} \frac{\partial p}{\partial \theta} + F_\theta$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + (F_z)$$

Εξίσωση συνέχειας : Διατήρηση μάζας
“Μάζα δεν καταστρέφεται ή δημιουργείται”

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

1^{ος} θερμοδυναμικός νόμος :
Διατήρηση Ενέργειας

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{dH}{dt} \implies \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w(\gamma_d - \gamma) = \frac{1}{c_p} \frac{dH}{dt}$$

Διατήρηση μάζας των
υδρατμών νερού

$$\frac{Dq_v}{Dt} = Q_v \implies \frac{\partial q_v}{\partial t} + u \frac{\partial q_v}{\partial x} + v \frac{\partial q_v}{\partial y} + w \frac{\partial q_v}{\partial z} = Q_v$$

Καταστατική εξίσωση

$$P = \rho R T$$



Primitive equations: απουσία αναλυτικής λύσης

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{uv \tan \theta}{\alpha} = 2\Omega v \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{F}_x \quad (1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} - \frac{u^2 \tan \theta}{\alpha} = -2\Omega u \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{F}_y \quad (2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + (\mathbf{F}_z) \quad (3)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w(\gamma_d - \gamma) = \frac{1}{c_p} \frac{dH}{dt} \quad (5)$$

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} + u \frac{\partial q_v}{\partial x} + v \frac{\partial q_v}{\partial y} + w \frac{\partial q_v}{\partial z} = Q_v \quad (6)$$

$$p = \rho RT \quad (7)$$

Total derivative = local + advective part

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Οι εξισώσεις (1) – (6) είναι **προγνωστικές** και επιτρέπουν τον προσδιορισμό μεταβλητής ως συνάρτηση του χρόνου ενώ η καταστατική εξίσωση (7) είναι **διαγνωστική**.

Μοντέλα τα οποία βασίζονται σε αυτές τις εξισώσεις ονομάζονται **primitive equation models**.

Εκφράσεις για F_x , F_y , F_z , H & Q_v πρέπει να οριστούν στο μοντέλο οι οποίες να περιγράφουν όλες τις εμπλεκόμενες φυσικές διεργασίες.

Ρυθμός ανταλλαγής θερμότητας λόγω διαβατικών διεργασιών: Surface heating, phase change, (evaporation ...)

Πηγές και καταβόθρες νερού λόγω αλλαγής φάσης: Πχ κατακρήμνιση υετού λόγω σχηματισμού σταγόνων και υετού (βροχής, χιονιού...)

Όροι τριβής: Turbulent – molecular viscosity

Αποτελεί πολύπλοκο σύστημα μη γραμμικών, συζευγμένων, μερικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες πρέπει να επιλυθούν ταυτόχρονα. **Δεν έχει βρεθεί αναλυτική λύση για το σύστημα.**

2. Ποιός ο στόχος της μεθόδου μικρών διαταραχών

Η μη γραμμική φύση εμποδίζει την επίλυση των εξισώσεων, οι οποίες περιγράφουν το πολύπλοκο ατμοσφαιρικό σύστημα. Συχνά προκρίνεται η αριθμητική λύση (μοντέλα αριθμητικής προσομοίωσης) αλλά απλές τεχνικές επίλυσης μπορεί να είναι εξαιρετικά χρήσιμες στη μελέτη των ατμοσφαιρικών κινήσεων.

Perturbation method: Στοχεύει στη γραμμικοποίηση των εξισώσεων ώστε το απλούστερο σύστημα εξισώσεων να έχει αναλυτική λύση. Λαμβάνοντας υπόψη ότι πολλά ατμοσφαιρικά φαινόμενα έχουν κυματική φύση, αναζητούμε λύσεις στις εξισώσεις οι οποίες έχουν κυματική μορφή.

Βασικές παραδοχές μεθόδου

$$\frac{\partial s}{\partial t} = u \frac{\partial s}{\partial x} \tag{8}$$

1. Θεωρούμε πως συνολικά η ατμοσφαιρική ροή αποτελείται από μια **βασική** (μέση) ροή και μια **διαταραχή** η οποία υπερτίθεται στη μέση ροή:

$$s = \bar{s} + s'(x, t)$$
$$u = \bar{u} + u'(x, t)$$

Εκφράζουμε όλες τις εμπλεκόμενες μεταβλητές ως άθροισμα βασικής μέσης κατάστασης (basic state) και απόκλισης από τη μέση κατάσταση.

Η **βασική κατάσταση** αποτελεί κάποιο χρονικό και ζωνικό μέσο όρο της μεταβλητής

2. Η βασική κατάσταση ικανοποιεί τις αρχικές εξισώσεις:

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = \bar{u} \frac{\partial \bar{s}}{\partial x}$$

Ομοίως με τις ολικές μεταβλητές (μέση τιμή + διαταραχή) έτσι και οι μεταβλητές της βασικής κατάστασης ικανοποιούν τις αρχικές εξισώσεις.

3. Το μέγεθος των διαταραχών είναι μικρό. Άρα όταν εμφανίζονται γινόμενα διαταραχών μπορούν να αγνοηθούν σε μια πρώτη προσέγγιση.

$$\left| \frac{u'}{\bar{u}} \right| \ll 1$$
$$\left| \frac{s'}{\bar{s}} \right| \ll 1$$



$$\left| \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} \right| \gg \left| u' \frac{\partial u'}{\partial x} \right|$$
$$\left| \bar{u} \frac{\partial s'}{\partial x} \right| \gg \left| u' \frac{\partial s'}{\partial x} \right|$$

Μη γραμμικοί όροι θα εμφανίσουν μορφές όπου διαταραχές εμφανίζονται πχ στο τετράγωνο. Αν το μέγεθος της διαταραχής γίνει μισό τότε το μέγεθος των όρων αυτών θα μειωθεί κατά 4 φορές.

3. Εφαρμογή: Γραμμικοποίηση εξίσωσης με τη μέθοδο μικρών διαταραχών

Η εφαρμογή της μεθόδου οδηγεί σε γραμμικοποίηση της εξίσωσης

$$\frac{\partial s}{\partial t} = u \frac{\partial s}{\partial x}$$

Σημείωση: δεν ανταποκρίνεται σε πραγματική εξίσωση αλλά χρησιμοποιείται για λόγους επίδειξης της μεθόδου.

Παραδοχή 1

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{s} + s') = (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{s} + s') \Rightarrow \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \frac{\partial s'}{\partial t} = \bar{u} \frac{\partial \bar{s}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial s'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{s}}{\partial x} + u' \frac{\partial s'}{\partial x}$$

Παραδοχή 2

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = \bar{u} \frac{\partial \bar{s}}{\partial x}$$
$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \frac{\partial s'}{\partial t} = \bar{u} \frac{\partial \bar{s}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial s'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{s}}{\partial x} + u' \frac{\partial s'}{\partial x}$$

Επίσης η βασική κατάσταση δεν εξαρτάται από τα x & t

Παραδοχή 3

$$u' \frac{\partial s'}{\partial x} \rightarrow 0$$
$$\frac{\partial s'}{\partial t} = \bar{u} \frac{\partial s'}{\partial x} + u' \frac{\partial s'}{\partial x}$$

Όλα τα γινόμενα διαταραχών αγνοούνται ως αμελητέου μεγέθους

$$\frac{\partial s'}{\partial t} = \bar{u} \frac{\partial s'}{\partial x}$$

(9)

Η εξίσωση μετατράπηκε σε γραμμική διαφορική εξίσωση με **σταθερούς** συντελεστές τις **μεταβλητές βασικής καταστάσεως**. Λύνεται με κλασσικές μεθόδους και η λύση καθορίζει τη μορφή των διαταραχών ως αποκλίσεων της βασικής κατάστασης.

Για εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, η λύση έχει ημιτονοειδή/εκθετική μορφή. Τελικά μετατρέπεται σε εξίσωση που περιγράφει τη δομή, ταχύτητα διαδόσης και κριτήρια αύξησης/μείωσης του πλάτους κυματικών διαταραχών.

Η μέθοδος εφαρμόζεται για τη μελέτη ευστάθειας/αστάθειας μια δεδομένης βασικής κατάστασης (ισορροπίας) ως προς μικρές διαταραχές. Χρήσιμη για τη μελέτη ασταθειών (πχ βαροκλινική αστάθεια).

4. Στρατηγική επίλυσης εξισώσεων με την αναζήτηση λύσης σε κυματική μορφή

Η μέθοδος μικρών διαταραχών αποτελεί αναπόσπαστο μέρος μιας συνολικής στρατηγικής για την προσεγγιστική επίλυση των εξισώσεων που περιγράφουν τις κινήσεις στο ατμοσφαιρικό σύστημα. Η στρατηγική στοχεύει στην αναζήτηση λύσεων με κυματική μορφή.

I. Επιλογή βασικής ισορροπίας ατμόσφαιρας: συνήθως αποτελεί μια προσεγγιστική μορφή των αρχικών εξισώσεων, η οποία είναι χρήσιμη για την μελέτη του φαινομένου ενδιαφέροντος.

$$\frac{\partial s}{\partial t} = u \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

Επιλεγμένη μορφή των εξισώσεων.

Όπως να θεωρήσουμε την ατμόσφαιρα σε υδροστατική (ή γεωστροφική) ισορροπία και να μελετήσουμε κυματικής φύσης φαινόμενα.



Από τη περίπλοκη μορφή των αρχικών εξισώσεων η οποία περιγράφει πληθώρα φαινομένων επιλέγουμε μια ειδική μορφή για να μελετήσουμε το φαινόμενο ενδιαφέροντος....

... από την συνολική ορχήστρα με όλα τα όργανα επιλέγουμε κάποιο συγκεκριμένο για να μελετήσουμε τις συχνότητες που μας ενδιαφέρουν.

II. Γραμμικοποίηση εξισώσεων: έχοντας επιλέξει τη βασική κατάσταση επιστρατεύουμε τη μέθοδο μικρών διαταραχών για την απλοποίηση των εξισώσεων.

$$s = \bar{s} + s'(x, t)$$

Όλες οι εξαρτημένες μεταβλητές u & s

$$u = \bar{u} + u'(x, t)$$

Ανεξάρτητες μεταβλητές: x & t

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = \bar{u} \frac{\partial \bar{s}}{\partial x}$$

Ως απόρροια του βήματος I, οι μέσες τιμές ικανοποιούν την επιλεγμένη μορφή των εξισώσεων.

$$\frac{\partial s}{\partial t} = u \frac{\partial s}{\partial x}$$



Γραμμικοποίηση

$$\frac{\partial s'}{\partial t} = \bar{u} \frac{\partial s'}{\partial x}$$

4. Στρατηγική επίλυσης εξισώσεων με τη αναζήτηση λύσης σε κυματική μορφή

III. Αποδοχή αναζήτησης κυματικών λύσεων: έχοντας καταλήξει σε μια γραμμική μορφή εξίσωσης στην οποία οι **συντελεστές** δεν είναι συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών, οι **εξαρτημένες μεταβλητές** δύνανται να έχουν κυματική μορφή, υπό την προϋπόθεση ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή (πχ x) είναι περιοδική.

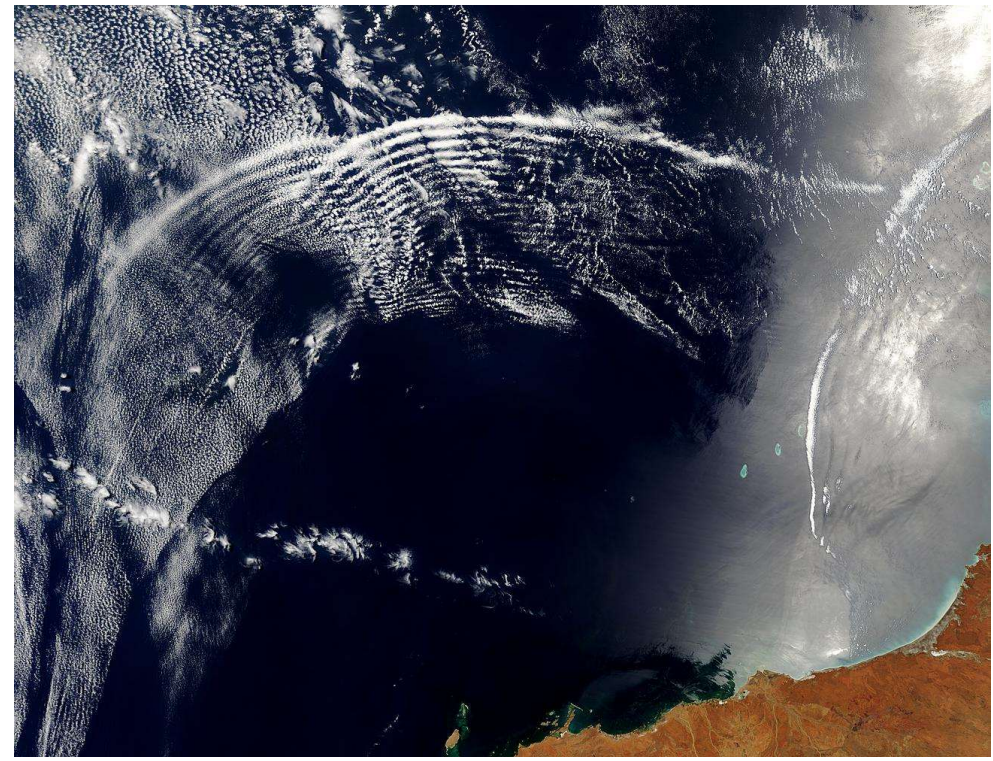
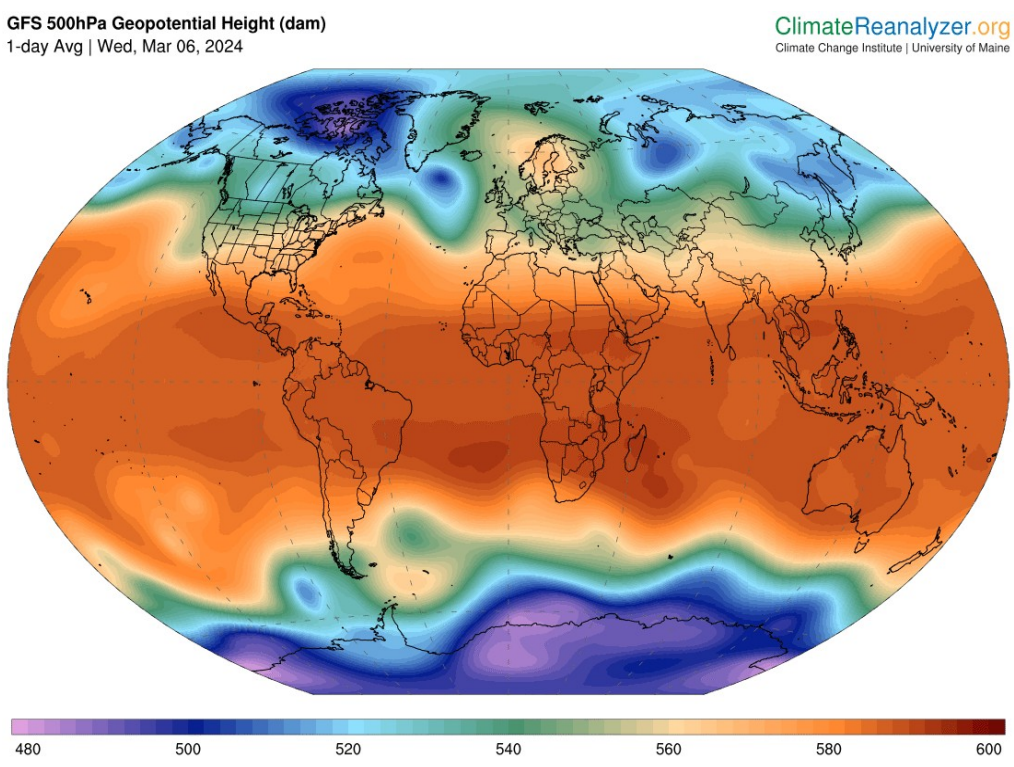
$$\frac{\partial s'}{\partial t} = \bar{u} \frac{\partial s'}{\partial x}$$

Εξαρτημένες μεταβλητές: s'

Ανεξάρτητες μεταβλητές: $x \ \& \ t$

$$s'(x,t) = A e^{i\varphi} = A e^{ik(x-ct)}$$

$$s'(x,t) = Re\{\tilde{s}e^{i(kx-\omega t)}\}$$



Κύματα βαρύτητας από καταιγίδες

Τα περισσότερα φαινόμενα (πλανητική έως μικροκλίμακα) έχουν κυματική μορφή: όπως η μεταβολή πίεσης ή γεωδυναμικού ύψους στα 500 hPa στο χώρο (πχ ζωνική διεύθυνση) μπορεί να περιγραφεί από ημιτονοειδή συνάρτηση.

4. Στρατηγική επίλυσης εξισώσεων με τη αναζήτηση λύσης σε κυματική μορφή

IV. Επίλυση γραμμικής εξίσωσης: αντικαθιστούμε την κυματική μορφή της λύσης στην εξίσωση και λαμβάνουμε μια απλή αλγεβρική εξίσωση την οποία λύνουμε και λαμβάνουμε την εξίσωση διασποράς.

$$\frac{\partial s'}{\partial t} = \bar{u} \frac{\partial s'}{\partial x} \tag{9}$$

$$s'(x,t) = \text{Re}\{\tilde{s}e^{i(kx-\omega t)}\} \tag{10}$$

ω : κυκλική συχνότητα κύματος

$\vec{k} = (k, l, m)$

k : κυματαριθμός στην x-διεύθυνση

Αντικαθιστούμε την έκφραση (10) στην εξίσωση (9). Θυμήσου ότι

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ik \left(\text{Re}\{\tilde{s}e^{i(kx-\omega t)}\} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \left(\text{Re}\{\tilde{s}e^{i(kx-\omega t)}\} \right)$$

Στην αλγεβρική εξίσωση ο κυματαριθμός k είναι η νέα ανεξάρτητη μεταβλητή.

(10)

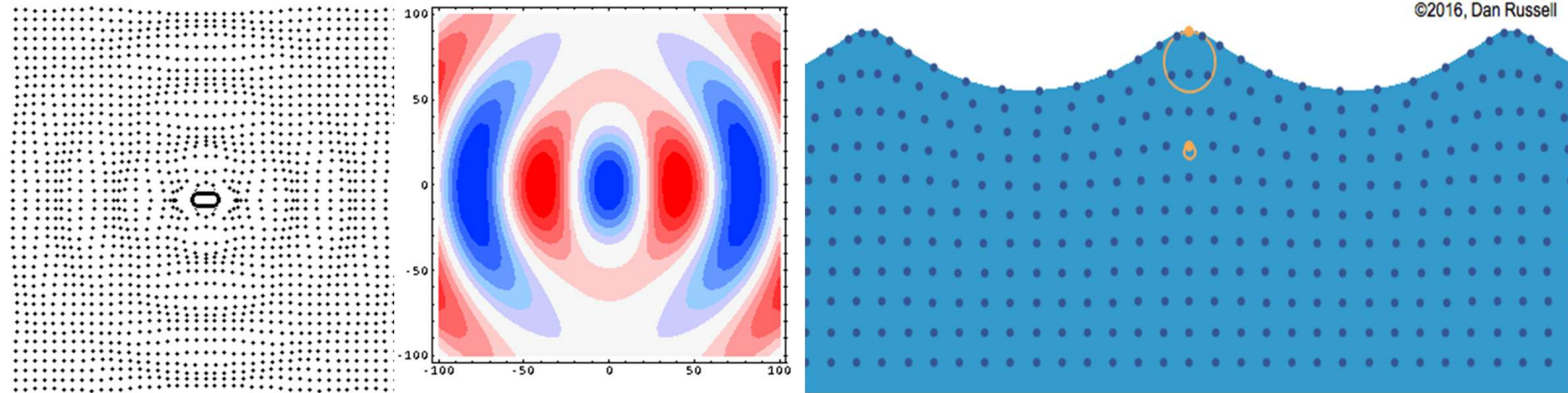
(9) $\Rightarrow$ ~~$-i\omega \left(\text{Re}\{\tilde{s}e^{i(kx-\omega t)}\} \right)$~~ $= \bar{u}$ ~~$ik \left(\text{Re}\{\tilde{s}e^{i(kx-\omega t)}\} \right)$~~

Σχέση διασποράς $\omega = \omega(\vec{k}) = \omega(k, l, m)$:

Τελικά λαμβάνουμε μια ειδική σχέση μεταξύ της συχνότητας ω και του μεγέθους του κύματος, όπως εκφράζεται από το κυματάνυσμα $\vec{k}$. Επιτρέπει την μελέτη των ιδιοτήτων διαφόρων τύπων κυμάτων.

5. Κύματα - Ορισμοί

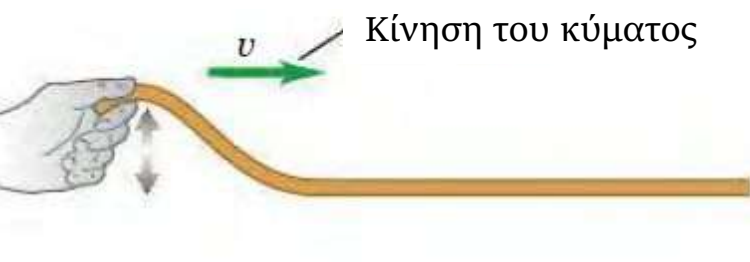
Κύμα: Διαταραχή (αντιληπτή σε πεδία μεταβλητών που περιγράφουν την κατάσταση ρευστού – πχ ταχύτητα, θερμοκρασία ...) με τη μορφή ταλάντωσης, η οποία διαδίδεται στο χώρο και στο χρόνο.



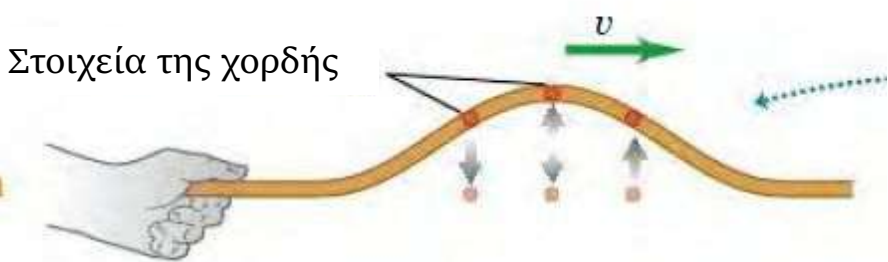
- "A time-varying quantity which is also a function of position" - *Chambers Dictionary of Science and technology*.
- "... a wave is any recognizable signal that is transferred from one part of the medium to another with a recognizable velocity of propagation" - *Linear and non-linear Waves*.
- "Speaking generally, we may say that it denotes a process in which a particular state is continually handed on without change, or with only gradual change, from one part of a medium to another" - *1911 Encyclopædia Britannica*.
- "a periodic motion or disturbance consisting of a series of many oscillations that propagate through a medium or space, as in the propagation of sound or light: the medium does not travel outward from the source with the wave but only vibrates as it passes" - *Webster's New World College Dictionary, 4th Ed.*
- "... an oscillation that travels through a medium by transferring energy from one particle or point to another without causing any permanent displacement of the medium" - *Encarta® World English Dictionary*.

6. Εγκάρσιο και διαμήκες ημιτονοειδές (μηχανικό) κύμα

(α) Εγκάρσιο κύμα σε χορδή



Κίνηση του κύματος

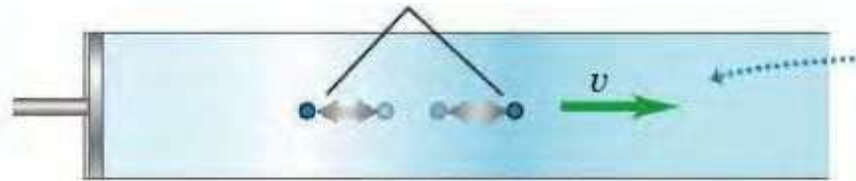


Καθώς το κύμα περνά, κάθε στοιχείο της χορδής κινείται προς τα κάτω και μετά επάνω κάθετα στην κίνηση του κύματος.

(β) Διαμήκες κύμα σε υγρό

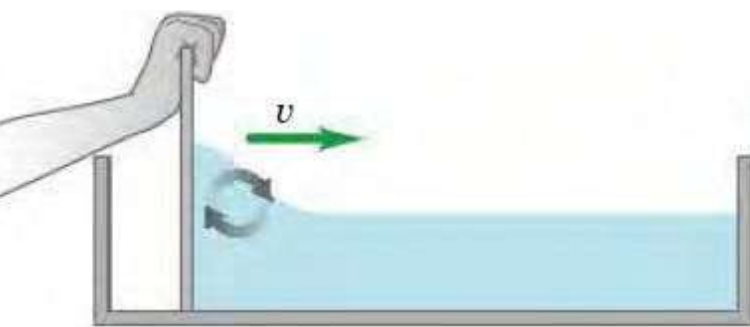


Στοιχεία του υγρού

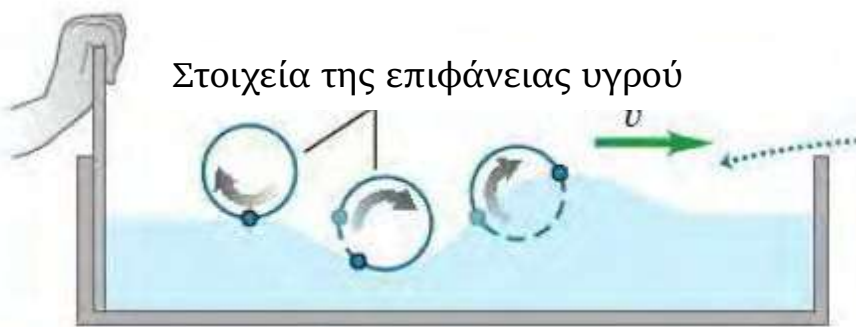


Καθώς το κύμα περνά, κάθε στοιχείο του υγρού κινείται προς τα εμπρός και μετά προς τα πίσω παράλληλα στην κίνηση του κύματος.

(γ) Κύματα στην επιφάνεια υγρού



Στοιχεία της επιφάνειας υγρού



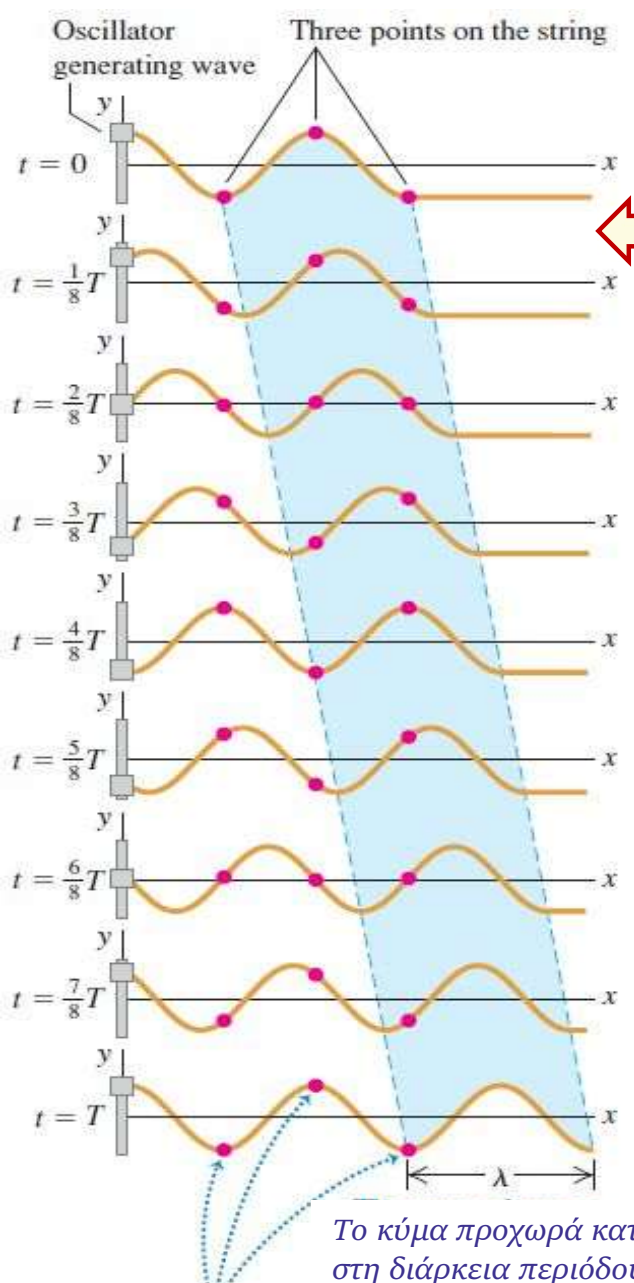
Καθώς το κύμα περνά, κάθε στοιχείο του υγρού κινείται σε ένα κύκλο.

Οι μετατοπίσεις των στοιχείων έχουν εγκάρσιες και διαμήκες συνιστώσες.

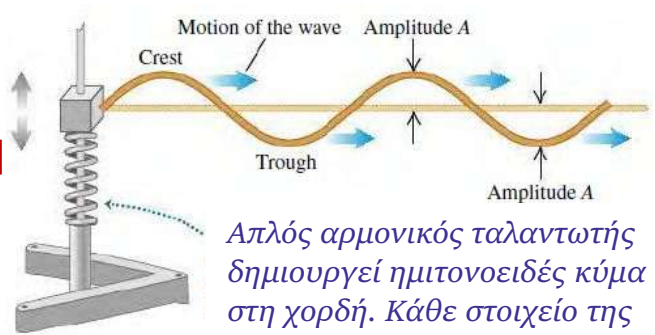
Μηχανικό κύμα είναι διαταραχή η οποία διαδίδεται μέσω υλικού ή ουσίας η οποία ονομάζεται μέσο διάδοσης του κύματος. Καθώς το κύμα διαδίδεται τα στοιχεία του μέσου υφίστανται μετατοπίσεις ανάλογα με τον τύπο κύματος.

6. Εγκάρσιο και διαμήκες ημιτονοειδές (μηχανικό) κύμα

Εγκάρσιο περιοδικό κύμα

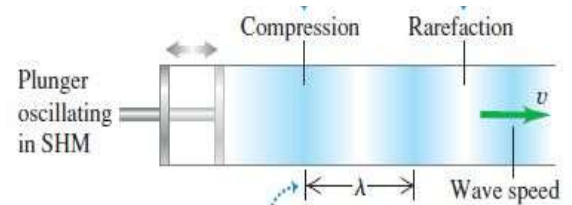


Κάθε στοιχείο κινείται πάνω κάτω στη θέση που βρίσκεται. Σημεία σε απόσταση ενός μ.κ. κινούνται σε φάση.



Απλός αρμονικός ταλαντωτής δημιουργεί ημιτονοειδές κύμα στη χορδή. Κάθε στοιχείο της χορδής εκτελεί την ίδια αρμονική κίνηση με το ελατήριο και τη μάζα.

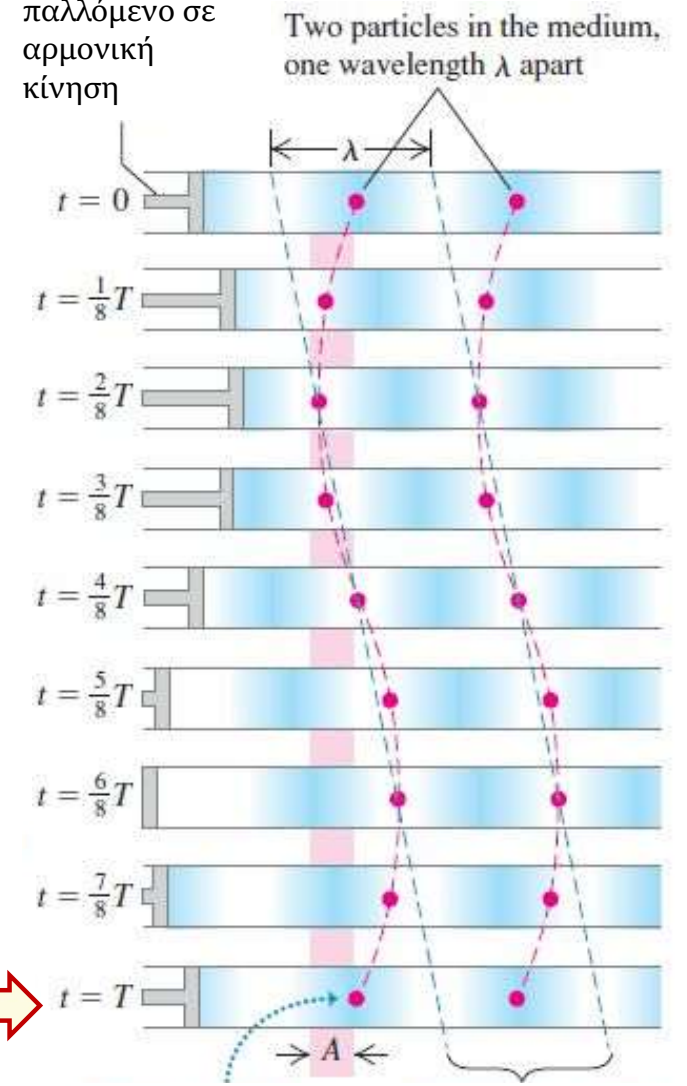
Η προς τα εμπρός κίνηση του εμβόλου το οποίο κινείται σε αρμονική κίνηση δημιουργεί πύκνωμα ενώ η προς τα πίσω αραίωμα



Το μ.κ. λ είναι η απόσταση μεταξύ αντίστοιχων σημείων διαδοχικών κύκλων.

Διαμήκες περιοδικό κύμα

Έμβολο παλλόμενο σε αρμονική κίνηση

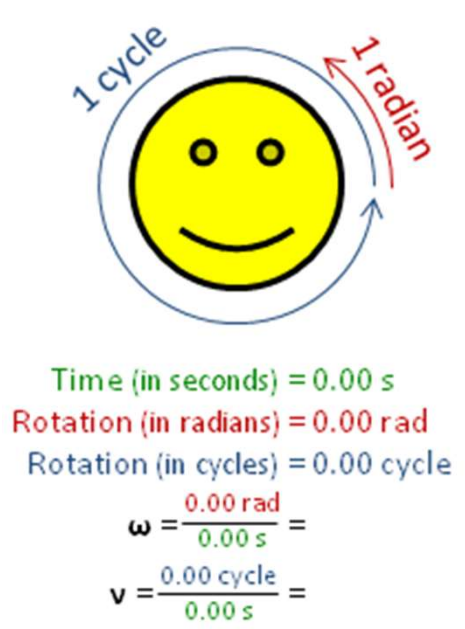
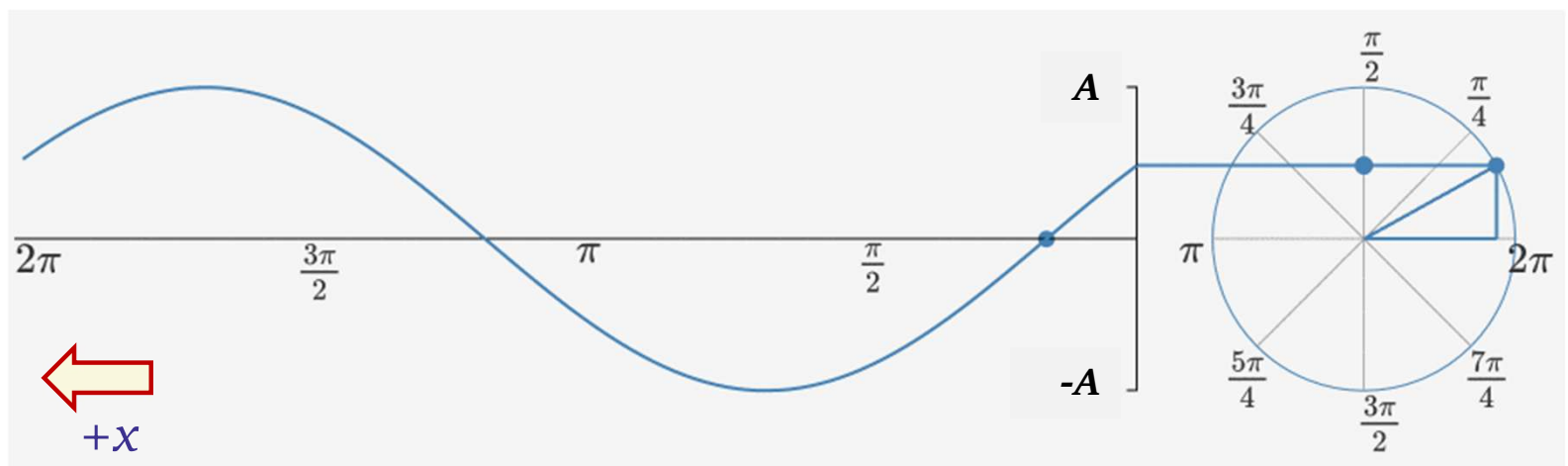


Στοιχεία που ταλαντώνονται με πλάτος A.

Το κύμα προχωρά κατά λ στη διάρκεια περιόδου T.

7. Μαθηματική περιγραφή περιοδικού κύματος

Η μετατόπιση στοιχείου του μέσου y από τη θέση ισορροπίας κάθε χρονική στιγμή t και σε κάθε σημείο x του μέσου περιγράφεται μαθηματικά από την **κυματοσυνάρτηση** $y(x,t)$.



Κυματοσυνάρτηση ημιτονοειδούς κύματος το οποίο διαδίδεται στην κατεύθυνση $+x$.

Πλάτος A Θέση x Χρόνος t

$$y(x,t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]$$

Μήκος κύματος λ Περίοδος κύματος T

Εναλλακτική μορφή κυματοσυνάρτησης ημιτονοειδούς κύματος.

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

Κυματαριθμός k Κυκλική συχνότητα ω

Πλάτος A : Μέγιστη μετατόπιση από θέση ισορροπίας

Φάση: $\varphi(x,t) = kx - \omega t$

Κυκλική συχνότητα ω : Ρυθμός μεταβολής της φάσης (rad/sec)

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \qquad \nu = \frac{1}{T}$$

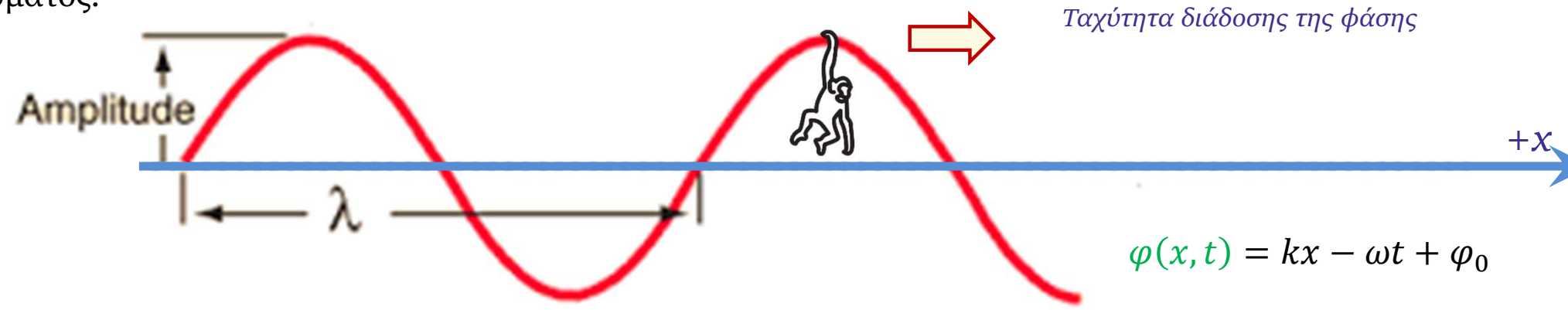
Συχνότητα ν : Αριθμός ταλαντώσεων (κύκλων) ανά sec (Hz)

Κυματαριθμός k : Ρυθμός επανάληψης κύματος στην μονάδα χώρου (rad/m)
"Χωρική συχνότητα"

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

8. Ταχύτητα φάσης κύματος

Η ταχύτητα διάδοσης κύματος είναι η ταχύτητα με την οποία πρέπει να κινούμαστε παράλληλα με το κύμα ώστε να παραμένουμε δίπλα σε σημείο δεδομένης φάσης, όπως μια συγκεκριμένη κορυφή ή κοιλάδα του κύματος.



$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi_0)$

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{D}{Dt}(kx - \omega t + \varphi_0) = k \frac{Dx}{Dt} - \omega$$

$$\frac{D\varphi}{Dt} = 0$$

“Following the wave motion”
Ακολουθώντας τη διάδοση του κύματος για να παραμένουμε σε δεδομένη φάση.

$\frac{D\varphi}{Dt} = 0 \Rightarrow k \frac{Dx}{Dt} - \omega = 0 \Rightarrow k \frac{Dx}{Dt} = \omega \Rightarrow \frac{Dx}{Dt} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow$

$$c = \frac{\omega}{k}$$

Ταχύτητα φάσης ή
φασική ταχύτητα

Για να κινείται το κύμα προς την κατεύθυνση αύξησης του x θα ισχύει c>0.

$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi_0)$



Κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά

+x

$y(x, t) = A \sin(kx + \omega t + \varphi_0)$



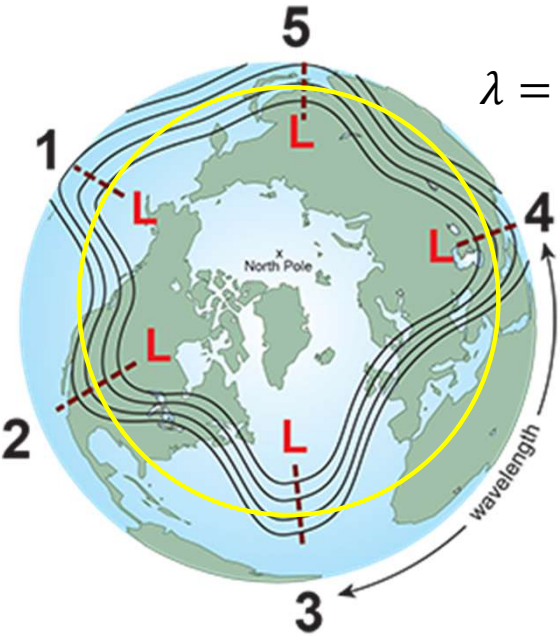
Κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά

-x



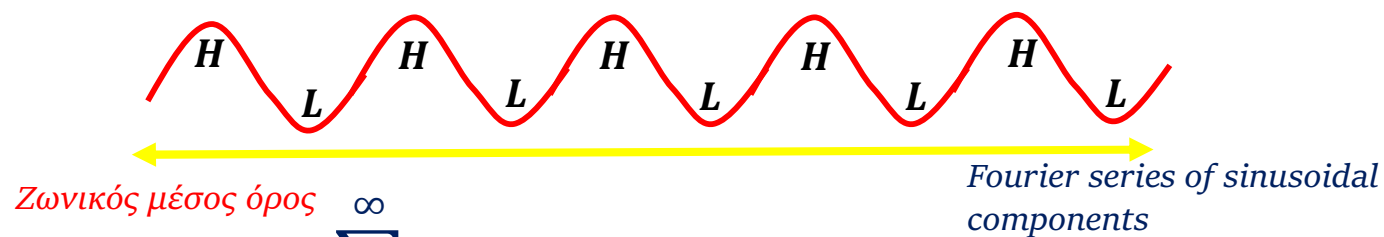
9. Ανάλυση ατμοσφαιρικής διαταραχής κατά Fourier

Αποτελεί υπεραπλούστευση να θεωρήσουμε ότι μια πραγματική διαταραχή στην ατμόσφαιρα μπορεί να απεικονιστεί ως ένα ημιτονοειδές κύμα. Μπορεί ναδειχθεί ότι οποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$, η οποία εξαρτάται από το γεωγραφικό μήκος (x), αναλύεται ως εξής



Παράδειγμα $s=5$
planetary-wave pattern: 5 μακρά κύματα (*long-waves*).

$$\lambda = \frac{D}{s}$$



$$f(x) = \bar{f} + \sum_{s=1}^{\infty} (A_s \sin k_s x + B_s \cos k_s x) \tag{10}$$

$$k_s = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{s}{D}$$

Zonal wavenumber
 Ζωνικός κυματαριθμός
 [rad/m]

Μήκος ενός παραλλήλου της Γης [m].

D

s

Planetary wave number.
 Αριθμός μ.κ. που χωρούν σε έναν παράλληλο μήκους D .

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} (A_s \sin k_s x + B_s \cos k_s x) = \sum_{s=1}^{\infty} f_s(x)$$

Fourier coefficients
 Συντελεστές Fourier

$$f_s(x) = A_s \sin k_s x + B_s \cos k_s x$$

sth Fourier component/harmonic

Η συνάρτηση f μπορεί να αντιπροσωπεύει την εξάρτηση του γεωδυναμικού ύψους στα 500 hPa με το γεωγραφικό μήκος. Η συνιστώσα/αρμονική Fourier με το μεγαλύτερο πλάτος (amplitude) θα αντιστοιχεί σε τιμή s πολύ κοντινή στον παρατηρούμενο αριθμό troughs/ridges σε έναν παράλληλο (εδώ $s=5$).



9. Ανάλυση ατμοσφαιρικής διαταραχής κατά Fourier

Συνήθως όταν δοκιμάζουμε λύσεις κυματικής μορφής, θέτουμε ως λύση μόνο έναν Fourier component για να μελετήσουμε ποιοτικά τη μορφή της λύσης

Η έκφραση για κάθε Fourier component αποκτά συμπαγή μορφή με χρήση εκθετικής μορφής προς διευκόλυνση πράξεων

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$f_s(x) = A_s \sin k_s x + B_s \cos k_s x \quad (11)$$

$Re[]$: “πραγματικό μέρος”

$Im[]$: “φανταστικό μέρος”

$$f_s(x) = Re \{ C_s e^{ik_s x} \} = Re \{ C_s \cos k_s x + i C_s \sin k_s x \} \quad (12) \quad C_s : \text{μιγαδικός συντελεστής}$$

Οι εκφράσεις των εξισώσεων (11) & (12) είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν

$$A_s = -Im \{ C_s \}$$

$$B_s = Re \{ C_s \}$$

Όταν στα πλαίσια της στρατηγικής επίλυσης εξισώσεων με τη αναζήτηση λύσης σε κυματική μορφή στο βήμα IV δοκιμάζουμε μορφές λύσεων, θα χρησιμοποιούμε την παρακάτω έκφραση

$$\frac{\partial s'}{\partial t} = \bar{u} \frac{\partial s'}{\partial x}$$

$$s'(x, t) = Re \{ \tilde{s} e^{i(kx - \omega t)} \}$$

10. Διασπορά κυμάτων

Η σχέση της κυκλικής συχνότητας κυμάτων ω με το μ. κ. (άρα το k) εξαρτάται από τις φυσικές ιδιότητες του μέσου διάδοσης (ουσιαστικά το σύστημα εξισώσεων που μελετάμε).

Σχέση διασποράς $\omega = \omega(\vec{k}) = \omega(k, l, m)$

Ως εκ τούτου η φασική ταχύτητα δύναται να εξαρτάται από το μήκος κύματος

Στην περίπτωση που $\omega \propto k$ η φασική ταχύτητα είναι ανεξάρτητη του κυματαριθμού

Σχέση μεταξύ της συχνότητας ω και του μεγέθους του κύματος, όπως εκφράζεται από το κυμαάνυσμα $\vec{k}$

$$c_p = \frac{\omega}{K} = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$$

1D $\omega = \alpha k \Rightarrow c_p = \frac{\omega}{k} = a = const$

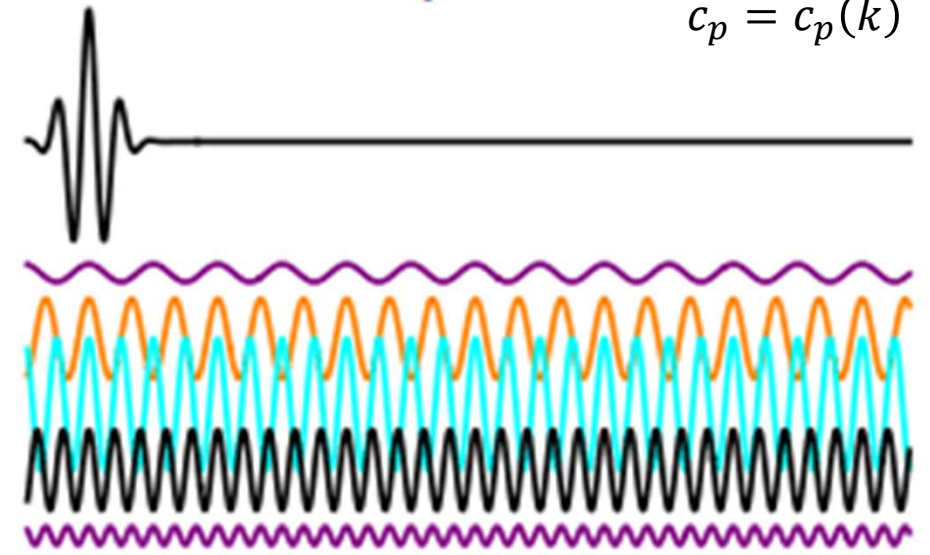
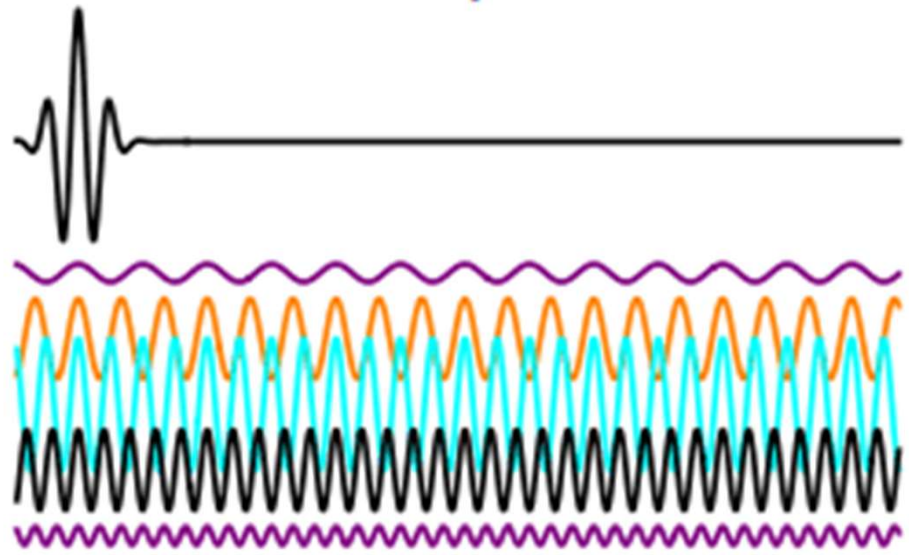
Ο όρος "dispersive" χαρακτηρίζει συστήματα όπου η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων εξαρτάται από το μήκος κύματός του.

Η φασική ταχύτητα **δεν εξαρτάται** από τον κυματαριθμό.

Η φασική ταχύτητα **εξαρτάται** από τον κυματαριθμό.

Non dispersive

Dispersive



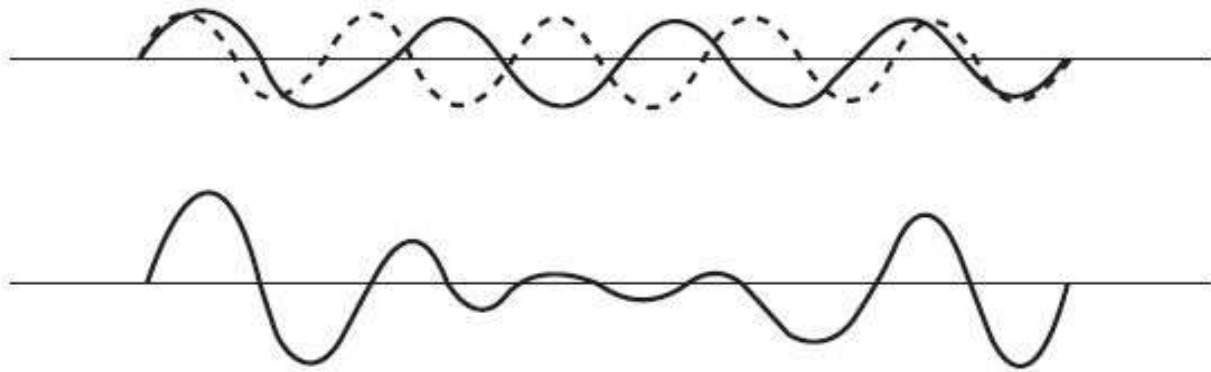
$$c_p = c_p(k)$$

Σε ένα διασπειρωτικό σύστημα, τα κύματα-συνιστώσες διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες φάσης, με αποτέλεσμα το κύμα να διασπάται ή να αλλάζει μορφή κατά τη διάδοσή του

Μια διαταραχή η οποία σχηματίζεται από τη υπέρθεση πολλών συνιστωσών Fourier (wave group) **δεν διατηρεί** το σχήμα της καθώς διαδίδεται επειδή κάθε συνιστώσα Fourier κινείται με διαφορετική φασική ταχύτητα.

10. Διασπορά κυμάτων – ομαδική ταχύτητα

Στην περίπτωση που το κύμα είναι “dispersive”, οι ξεχωριστές συνιστώσες-κύματα άλλοτε θα συμβάλλουν θετικά ενισχυόμενες και άλλοτε θα ακυρώνονται ανάλογα με τις σχετικές τους φάσεις. Το σχήμα της ομάδας κυμάτων θα μεταβάλλεται και θα πλαταίνει γεγονός που σημαίνει ότι η ενέργεια θα διασπείρεται.



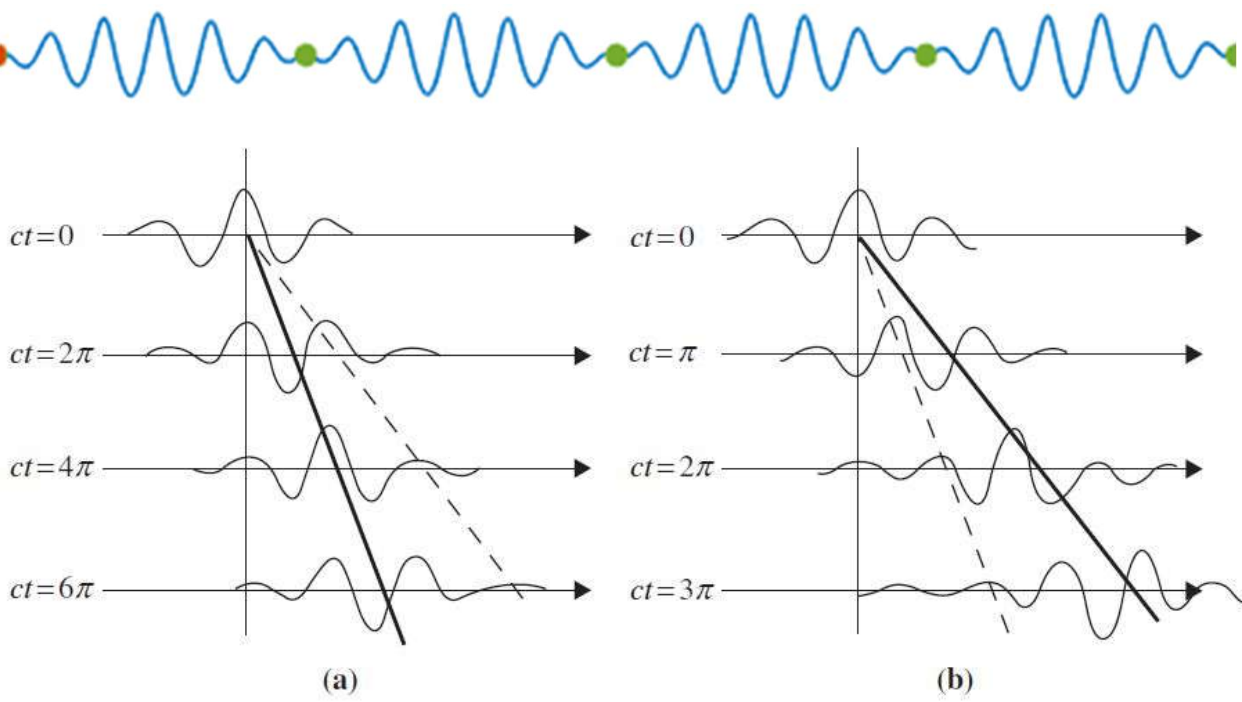
Ομάδα κυμάτων που σχηματίζεται από δύο ημιτονοειδείς συνιστώσες ελαφρώς διαφορετικού μήκους κύματος.

Non-dispersive waves: το μοτίβο στο κάτω μέρος διαδίδεται χωρίς αλλαγή σχήματος.

Dispersive waves: το σχήμα του μοτίβου αλλάζει με το χρόνο.

Ομαδική ταχύτητα – group velocity :

Η ταχύτητα με την οποία ένα κυματοπακέτο (ομάδα κυμάτων) κινείται. Οι περισσότερες ποσότητες ενδιαφέροντος (όπως η ενέργεια) μεταφέρονται με την ομαδική ταχύτητα.



Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων. Ξεχωριστές κορυφές κινούνται με τη **φασική ταχύτητα (κόκκινο)**. Το κυματοπακέτο κινείται με την **ομαδική ταχύτητα (πράσινο)**.

Η ομαδική ταχύτητα είναι γενικά διαφορετική από τη μέση ταχύτητα των ξεχωριστών συνιστωσών κυμάτων.

----- Φασική ταχύτητα
———— Ομαδική ταχύτητα

10. Μαθηματική έκφραση ομαδικής ταχύτητας

Θεωρούμε δυο κύματα τα οποία κινούνται στην οριζόντια διεύθυνση (x). Έχουν ίδιο πλάτος αλλά μήκη κύματος και κυκλικές συχνότητες που διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους. Δηλαδή έχουν **κυματαριθμούς** που διαφέρουν κατά **2δk** και **συχνότητες** κατά **2δω**.

$$\psi_1 = Re \{ A e^{i[(k-\delta k)x - (\omega - \delta \omega)t]} \} \Rightarrow \psi_1 = e^{i[(k-\delta k)x - (\omega - \delta \omega)t]}$$

Συχνά απλοποιούμε τις εκφράσεις των κυματοσυναρτήσεων και ο συμβολισμός **Re[]** παραλείπεται. Υπονοείται ότι μόνο το πραγματικό μέρος της έκφρασης έχει φυσική σημασία.

$$\psi_2 = Re \{ A e^{i[(k+\delta k)x - (\omega + \delta \omega)t]} \} \Rightarrow \psi_2 = e^{i[(k+\delta k)x - (\omega + \delta \omega)t]}$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = e^{i[(k-\delta k)x - (\omega - \delta \omega)t]} + e^{i[(k+\delta k)x - (\omega + \delta \omega)t]}$$

Η κυματοσυνάρτηση της ολικής κυματικής διαταραχής.

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = e^{i(kx - \omega t)} [e^{i(\delta k x - \delta \omega t)} + e^{-i(\delta k x - \delta \omega t)}] \Rightarrow$$

Τύπος Euler

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$
$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

$$\psi = e^{i(kx - \omega t)} [\cos(\delta k x - \delta \omega t) + i \cancel{\sin(\delta k x - \delta \omega t)}] + e^{i(kx - \omega t)} [\cos(\delta k x - \delta \omega t) - i \cancel{\sin(\delta k x - \delta \omega t)}] \Rightarrow$$

$$\psi = 2 \cos(\delta k x - \delta \omega t) e^{i(kx - \omega t)}$$

Το αποτέλεσμα της υπέρθεσης δυο “παρόμοιων” ημιτονειδών κυμάτων είναι μια σύνθετη κυματική διαταραχή με δυο κυματικές συνιστώσες

10. Μαθηματική έκφραση ομαδικής ταχύτητας

Η προκύπτουσα διαταραχή είναι προϊόν 2 κυμάτων. Ενός υψηλής συχνότητας/μικρού μ.κ. **φέροντος κύματος (carrier wave)** και ενός χαμηλής συχνότητας/μεγάλου μ. κ. **περιβάλλοντος κύματος (envelope wave)**.

Ταχύτητας διάδοσης διαταραχής

$$\lambda^{ew} = \frac{2\pi}{\delta k}$$

$$c^{ew} = \frac{\delta \omega}{\delta k}$$

$$\lambda^{cw} = \frac{2\pi}{k} \quad c_p^{cw} = \frac{\omega}{k}$$

$$\psi = 2 \cos(\delta k x - \delta \omega t) e^{i(kx - \omega t)}$$

Το περιβάλλον κύμα έχει πολύ μεγαλύτερο μήκος κύματος από το φέρον κύμα.

Το φέρον κύμα έχει μήκος κύματος και φασική ταχύτητα, οι οποίες υπολογίζονται από τον **μέσο όρο** κυματαριθμού και συχνότητας των συνιστωσών κυμάτων.

$$\delta k \ll k \Rightarrow \lambda^{cw} \ll \lambda^{ew}$$

$$\delta \omega \ll \omega \Rightarrow \frac{\delta \omega}{2\pi} \ll \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow v^{ew} \ll v^{cw}$$

Envelope wave: έχει πολύ μεγαλύτερο μήκος κύματος

Envelope wave: έχει πολύ χαμηλότερη συχνότητα



Εξχωριστές κορυφές κινούνται με τη **φασική ταχύτητα (κόκκινο)**. Το κυματοπακέτο κινείται με την **ομαδική ταχύτητα (πράσινο)**.

Στο όριο $\delta k \rightarrow 0 \Rightarrow c^{ew} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$

Ταχύτητας διάδοσης του περιβάλλοντος κύματος

Σημείωση: η ανάλυση ισχύει για οποιαδήποτε διαταραχή μπορεί να αναλυθεί σε συνιστώσες-κύματα αρκεί αυτές να διαφέρουν πολύ λίγο ως προς τις ιδιότητές τους ώστε η προκύπτουσα διαταραχή να έχει πολύ μεγαλύτερο μ.κ.

Ομαδική ταχύτητα – group velocity :

Η ταχύτητα (διάνυσμα) με την οποία ένα κυματοπακέτο (ομάδα κυμάτων) κινείται. Οι περισσότερες ποσότητες ενδιαφέροντος (όπως η ενέργεια) μεταφέρονται με την ομαδική ταχύτητα.

10. Ομαδική ταχύτητα



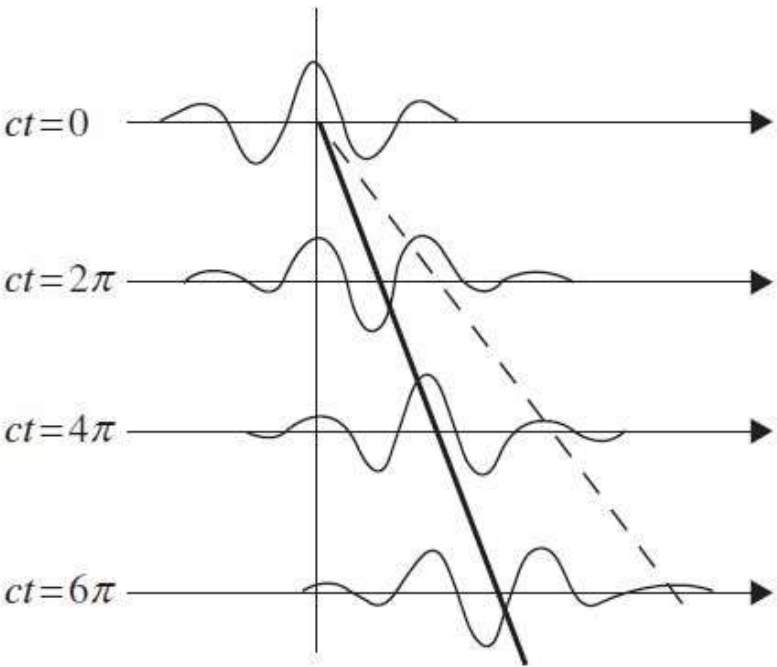
$$c_g^x = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Η ομαδική ταχύτητα είναι γενικά διαφορετική από τη μέση ταχύτητα των ξεχωριστών συνιστωσών κυμάτων.

----- Φασική ταχύτητα
———— Ομαδική ταχύτητα

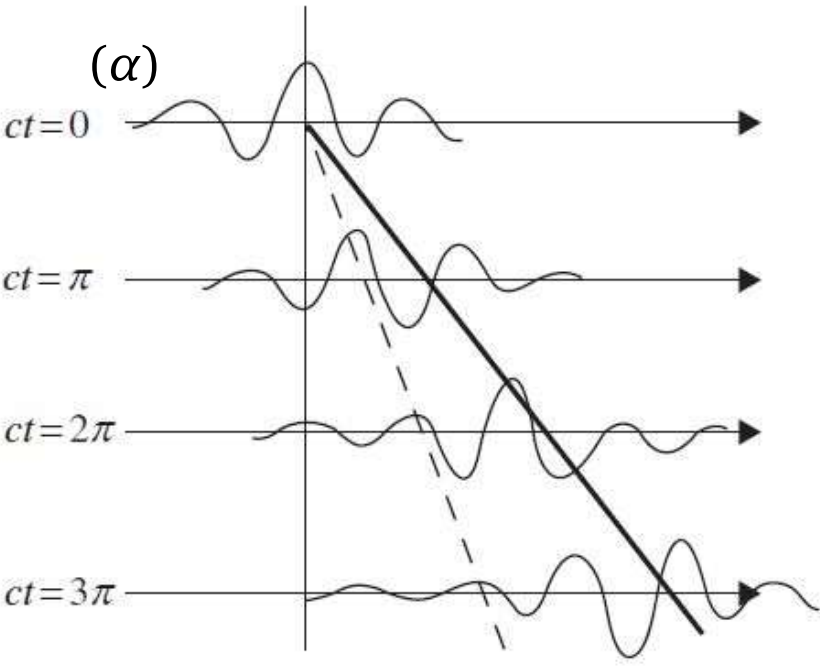
Το πρόσθιο μέρος της συνολικής διαταραχής κινείται με την ομαδική ταχύτητα.
Ξεχωριστές κορυφές ή κοιλάδες κινούνται με τη φασική ταχύτητα

(b)



Η ομαδική ταχύτητα είναι **μικρότερη** από τη μέση φασική ταχύτητα των συνιστωσών κυμάτων

(α)



Η ομαδική ταχύτητα είναι **μεγαλύτερη** από τη μέση φασική ταχύτητα των συνιστωσών κυμάτων

Η ομαδική ταχύτητα, δηλαδή η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται το κυματοπακέτο, μπορεί να είναι μικρότερη (b) ή μεγαλύτερη (a) από την μέση ταχύτητα φάσης των συνιστωσών-κυμάτων. Στην ατμόσφαιρα όταν ισχύει το τελευταίο, εμφανίζεται το φαινόμενο **downstream development**.

11. Διάδοση κυμάτων σε 2D / 3D

Λύση αναζητείται με μορφή επίπεδων κυμάτων (**plane waves**): Κύματα σε 2D ή 3D με τις κορυφές/κοιλιάδες να σχηματίζουν γραμμές/επίπεδα κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης $\vec{k}$.

$$\psi = Re \left\{ Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right\} = Re \left\{ Ae^{i(kx + ly + mz - \omega t)} \right\} = Re \left\{ Ae^{i\phi} \right\}$$

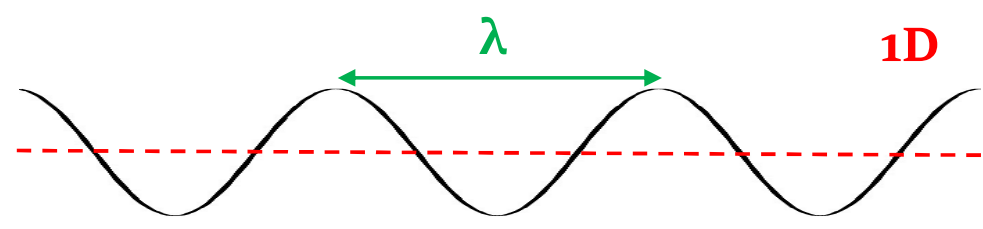
ϕ : φάση κύματος

A : πλάτος κύματος

ω : συχνότητα κύματος

Κυματόανυσμα
 $\vec{k} = (k^x, k^y, k^z) = (k, l, m)$

Μήκος κύματος (λ): Η απόσταση ανάμεσα σε δυο διαδοχικές κορυφές (διαφορά φάσης 2π).



Κυματαριθμός (K): Ρυθμός επανάληψης κύματος στην μονάδα χώρου

$$\vec{k} = \nabla \phi$$

Κυματόανυσμα κάθετο στις γραμμές ίσης ϕ .

$$K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$K = |\vec{k}| = \sqrt{k^2 + l^2 + m^2}$$

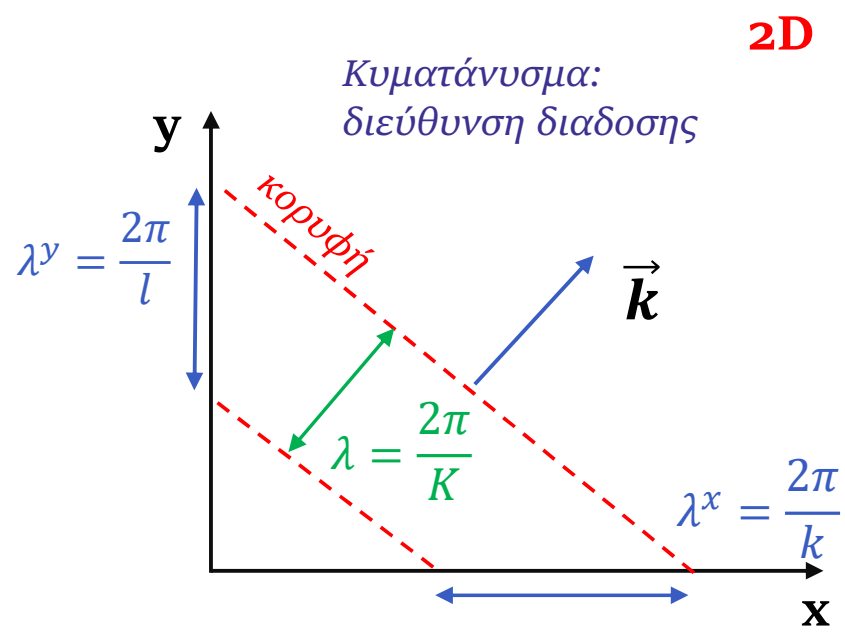
Ολικός κυματαριθμός

$$\lambda^x = \frac{2\pi}{k}$$

$$\lambda^y = \frac{2\pi}{l}$$

$$\lambda^z = \frac{2\pi}{m}$$

Μήκος κύματος σε κάθε διεύθυνση



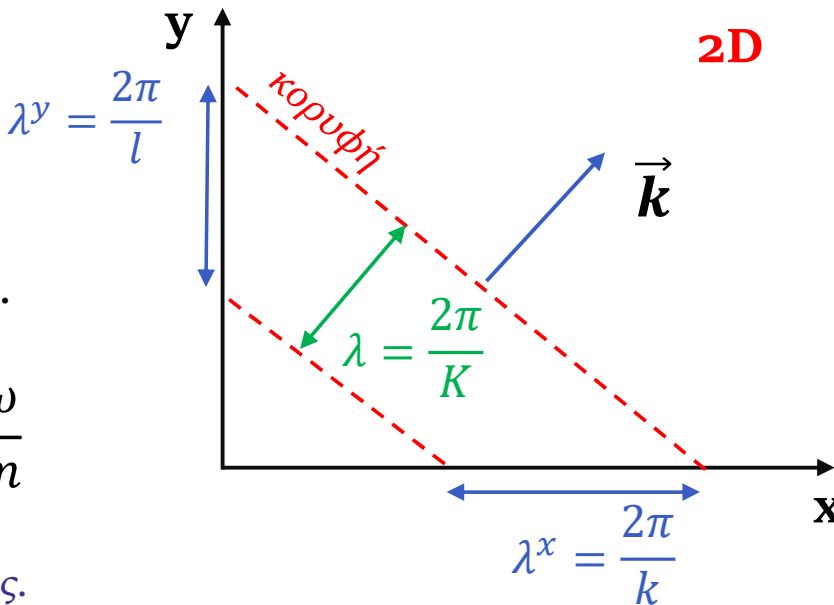
11. Διάδοση κυμάτων σε 2D / 3D

Περίοδος (T): Χρόνος που απαιτείται για δυο κορυφές να διέλθουν από το ίδιο σημείο.

Κυκλική συχνότητα (ω): $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Φασική ταχύτητα – phase speed (C_p):
Η ταχύτητα (δεν είναι διάνυσμα) με την οποία οι κοιλάδες/κορυφές κινούνται κατά την κατεύθυνση διάδοσης.

$c_p = \frac{\omega}{K} = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$ $c_p^x = \frac{\omega}{k}$ $c_p^y = \frac{\omega}{l}$ $c_p^z = \frac{\omega}{m}$



Ταχύτητα διάδοσης κορυφών/κοιλάδων προς τις επιμέρους διευθύνσεις.
Σημείωση: οι ταχύτητες αυτές **δεν** αποτελούν συνιστώσες ενός διανύσματος C_p.

$c_p^2 \neq (c_p^x)^2 + (c_p^y)^2 + (c_p^z)^2$

Ομαδική ταχύτητα – group velocity (C_g):
Η ταχύτητα (διάνυσμα) με την οποία ένα κυματοπακέτο (ομάδα κυμάτων) κινείται. Οι περισσότερες ποσότητες ενδιαφέροντος (όπως η ενέργεια) μεταφέρονται με την ομαδική ταχύτητα.

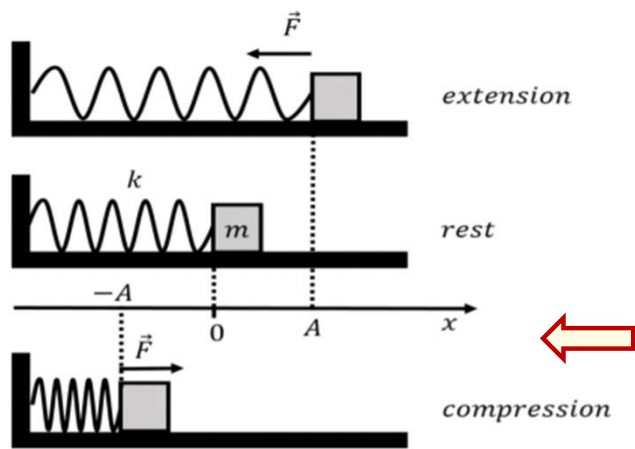
$\vec{c}_g = \left[\frac{\partial \omega}{\partial k} \quad \frac{\partial \omega}{\partial l} \quad \frac{\partial \omega}{\partial m} \right]$



Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων. Ξεχωριστές κορυφές κινούνται με τη **φασική ταχύτητα (κόκκινο)**. Το κυματοπακέτο κινείται με την **ομαδική ταχύτητα (πράσινο)**.

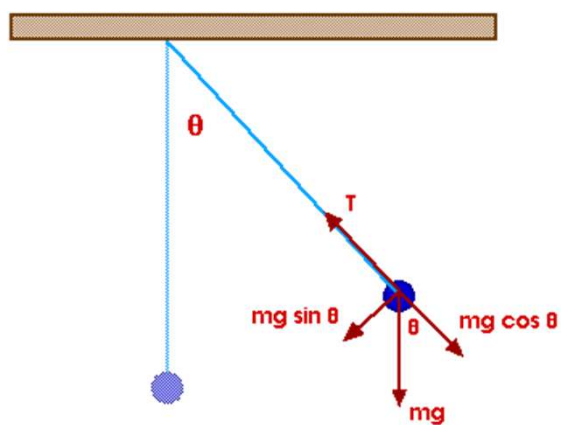
12. Μηχανισμός διατήρησης και είδη μηχανικών κυμάτων

Μηχανισμός διατήρησης : Συνέργεια αδράνειας του ρευστού (τάση συνέχισης μεταβολής κατόπιν αρχικής διαταραχής) και **δύναμης επαναφοράς** – ΔΕ (restoring force) που τείνει να το επαναφέρει σε κατάσταση ισορροπίας. Η τελευταία χαρακτηρίζει το είδος κύματος.



Η δύναμη επαναφοράς στην ταλάντωση που εκτελεί το **απλό εκκρεμές** είναι η δύναμη της βαρύτητας.

Η δύναμη επαναφοράς στην ταλάντωση που εκτελεί το **σύστημα μάζας-ελατηρίου** είναι η δύναμη ελατηρίου $\vec{F}$ που περιγράφεται από τον Νόμο του Hooke.



$\vec{F} = k\vec{x}$

Ατμοσφαιρικά κύματα που θα περιγραφούν

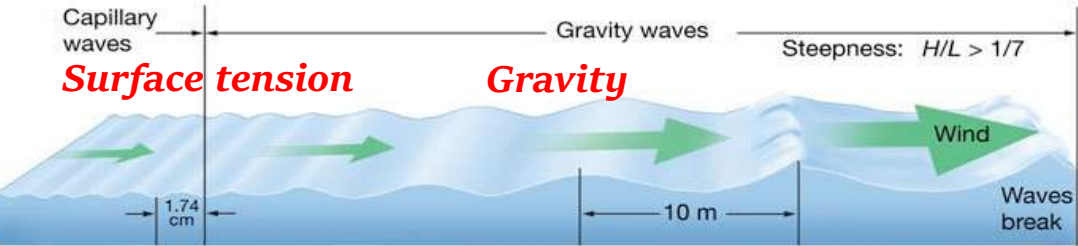
Κύματα Βαρύτητας
ΔΕ: Βαρύτητα

Κύματα Rossby
ΔΕ: β-effect

Compression/Expansion
ΔΕ: Συμπιεστικότητα ρευστού

Gravity waves : Κύματα σε ρευστό όπου η βαρύτητα παρέχει τη δύναμη επαναφοράς, η οποία για να δράσει απαιτεί στρωμάτωση του ρευστού (ρ μεταβλητή):

α) Internal gravity waves: συνεχής μεταβολή ρ **β) Interface gravity waves:** απότομη μεταβολή ρ



Surface gravity-capillary waves: Τα πιο οικεία κύματα είναι τα κύματα νερού που διαδίδονται στο όριο ακραίας μεταβολή ρ, δηλαδή την ασυνέχεια ωκεανού-ατμόσφαιρας.

13. Εφαρμογή στρατηγικής για μελέτη κυμάτων (Rossby)

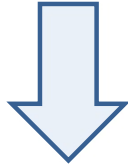
Τα γραμμικά κύματα εμφανίζονται ως λύση γραμμικών διαφ. εξισώσεων (πχ απλοποιημένη μορφή εξισώσεων κίνησης). Συνήθως το πρόβλημα έχει μορφή $L(\psi) = 0$ (L : linear operator in space / time).

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right) \zeta + \beta v = 0$$

Βαροτροπικό μοντέλο:
Απλούστευση των αρχικών
εξισώσεων

Προτάθηκε για την μελέτη των
κυμάτων Rossby τα οποία
αποτελούν λύση της εξίσωσης

Γραμμικοποίηση:
Μέθοδος μικρών
διαταραχών



$$u = \bar{u} + u'$$
$$v = \bar{v} + v'$$

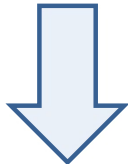
$$\zeta = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \zeta'$$
$$\zeta' = \nabla^2 \psi'$$
$$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}$$
$$v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi' + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0$$

$$L(\psi') = 0$$

$$L \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 + \beta \frac{\partial}{\partial x}$$

**Μαθηματική
επεξεργασία**



$$\psi' = Re \{ Ae^{i(kx + ly - \omega t)} \}$$

$\psi' = \psi'(\vec{x}, t)$ streamfunction

Λύση αναζητείται με μορφή υπέρθεσης κυμάτων
(**plane waves**). Εισάγουμε ποιοτικά τη μορφή ενός
Fourier component.

$$\omega = \bar{u}k - \frac{\beta k}{k^2 + l^2}$$

Σχέση διασποράς $\omega = \omega(\vec{k}) = \omega(k, l, m)$

Κάθε κατηγορία κύματος χαρακτηρίζεται από μια ειδική σχέση μεταξύ της συχνότητας ω και του μεγέθους του (όπως εκφράζεται από το κυματόνυσμα $\vec{k}$).

Η μορφή της σχέσης διασποράς αποτελεί κληρονομιά της μορφής του τελεστή L . Διαφορετικές οικογένειες κυμάτων (gravity waves, Rossby waves κτλ) χαρακτηρίζονται από διαφορετικές σχέσεις διασποράς.