

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.11

Ένας απέραντος λεπτός ευθύγραμμος αγωγός διαρρέεται από ρεύμα I_2 παράλληλο προς τη μικρή πλευρά ενός ορθογωνικού αγωγώμου πλαισίου διαστάσεων $2a \times 2b$ ($a > b$), που διαρρέεται από ρεύμα I_1 . Αν c είναι η απόσταση του αγωγού από το κέντρο του πλαισίου, ζητούνται:

- (α) Να υπολογιστεί ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής μεταξύ των δύο κυκλωμάτων.
 - (β) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται επί των δύο κυκλωμάτων.
- Δίνεται ότι ο αγωγός και το πλαίσιο βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

ΛΥΣΗ: (α) Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα αξόνων $Oxyz$, όπου ο άξονας z συμπίπτει με τον αγωγό, ο άξονας y διχοτομεί τη μικρή πλευρά του πλαισίου, ενώ ο άξονας x είναι κάθετος προς το επίπεδο του πλαισίου.

Μπορούμε να διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις (α) και (β) του σχήματος 7.18 κατά τις οποίες ο αγωγός βρίσκεται εκτός του πλαισίου ($c > a$) και εντός του πλαισίου ($c < a$), αντίστοιχα. Η αμοιβαία δυναμική ενέργεια, σύμφωνα με την (7.48), είναι

$$W_{12} = I_1 \iint_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_1 = -I_1 \iint_S \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{x}_0 dy dz, \quad (1)$$

που \mathbf{B}_2 η μαγνητική επαγωγή που οφείλεται στο ρεύμα I_2 του αγωγού και S_1 η επιφάνεια του πλαισίου. Επειδή, όμως, η μαγνητική επαγωγή \mathbf{B}_2 δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \boldsymbol{\varphi}_0 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi y} (-\mathbf{x}_0), \quad (2)$$

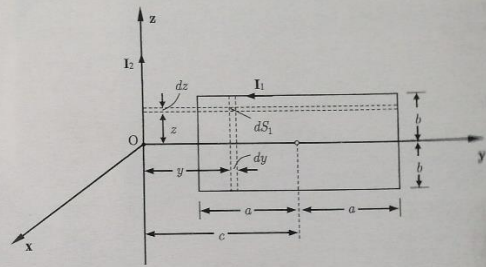
α την περίπτωση όπου $c > a$, με αντικατάσταση της (2) στην (1), έχουμε

$$W_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{-b}^b \int_{c-a}^{c+a} dz \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{-b}^b dz \int_{c-a}^{c+a} \frac{dy}{y} \quad (3)$$

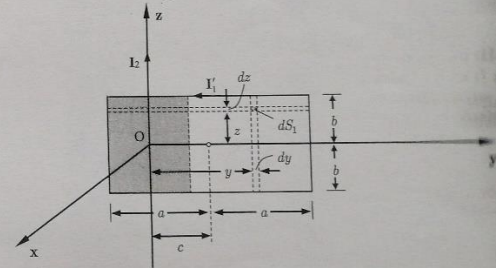
$$W_{12} = \frac{\mu_0 b}{\pi} I_1 I_2 \ln \frac{c+a}{c-a} \quad (4)$$

Στην περίπτωση όπου $c < a$, η συνολική ροή στα δύο συμμετρικά διαγραμμαμένα τμήματα είναι μηδέν, οπότε

$$W_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} b \int_{a-c}^{a+c} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} b \ln \frac{c+a}{a-c} \quad (5)$$



(α)



(β)

ΣΧΗΜΑ 7.18

Από τις (4) και (5) παρατηρούμε, ότι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε

$$W_{12} = \frac{\mu_0 b I_1 I_2}{\pi} \ln \frac{c+a}{|c-a|}$$

Ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής L_{12} , όπως προκύπτει από την (7.46) και (6), είναι

$$L_{12} = \frac{\mu_0 b}{\pi} \ln \frac{c+a}{|c-a|}$$

πολογίζεται εύκολα το ορισμένο ολοκλήρωμα (20), που, μετά από μερικές πράξεις,ίνει και πάλι

$$\Psi = \frac{0,0518 \mu_0 C^2 \rho_0^2}{I}, \quad (22)$$

$$L_{int} = 24,321 \text{ nH/m}. \quad (23)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.8

Αγωγός κυκλικής διατομής ακτίνας ρ_0 , διαρρέεται από ρεύμα παράλληλο προς τον άξονά του. Η μαγνητική πεδιακή ένταση \mathbf{H} μέσα στον αγωγό δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{H}(\rho) = H_0 \left[\frac{1}{2} (\rho/\rho_0) - \frac{1}{3} (\rho/\rho_0)^2 \right] \boldsymbol{\varphi}_0 = H_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0,$$

όπου H_0 δοσμένη σταθερά, ρ η ακτινική απόσταση από τον άξονα του αγωγού και $\boldsymbol{\varphi}_0$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την εφαπτομενική διεύθυνση. Υπό την προϋπόθεση ότι το υλικό του αγωγού είναι μη μαγνητικό και ότι ο κύλινδρος βρίσκεται μόνος μέσα στον άπειρο κενό χώρο, ζητείται να υπολογιστούν:

- (α) Η πυκνότητα \mathbf{J} της έντασης του ρεύματος.
- (β) Η μαγνητική πεδιακή ένταση \mathbf{H} έξω από τον κύλινδρο ($\rho > \rho_0$).
- (γ) Ο ανά μονάδα μήκους του κυλίνδρου εσωτερικός συντελεστής αντεπαγωγής.

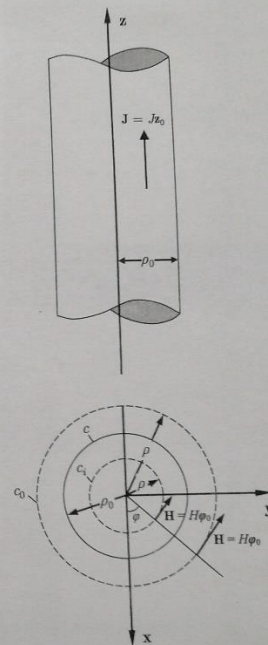
ΥΣΗ: (α) Αν η στρόφι της μαγνητικής πεδιακής έντασης \mathbf{H} εκφραστεί σε κυλινδικές συντεταγμένες, τότε, από την πρώτη εξίσωση του Maxwell (6.11) έχουμε

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) \boldsymbol{\rho}_0 + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \boldsymbol{\varphi}_0 + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) - \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} \right] \mathbf{z}_0 \quad (1)$$

επειδή

$$H_\rho = H_z = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \frac{\partial H_\rho}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) \mathbf{z}_0. \quad (3)$$



ΣΧΗΜΑ 7.15

Η (3), μετά την αντικατάσταση της H_φ , από την έκφραση της εκφώνησης φαίνεται

$$\mathbf{J} = J(\rho) \mathbf{z}_0 = \frac{H_0}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) \mathbf{z}_0.$$

Από την (4), παρατηρούμε ότι η πυκνότητα \mathbf{J} του ρεύματος είναι μέγιστη

στον άξονα του κυλίνδρου ($J_{\max} = J(0) = H_0/\rho_0$) και ελάχιστη πάνω στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου $J_{\min} = J(\rho_0) = 0$.

(β) Το συνολικό ρεύμα I υπολογίζεται εύκολα με ολοκλήρωση της (4) στη διατομή του κυλινδρικού αγωγού

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} J(\rho) \rho d\rho d\varphi = 2\pi \frac{H_0}{\rho_0} \int_0^{\rho_0} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) d\rho = \frac{\pi}{3} H_0 \rho_0. \quad (5)$$

Ας σημειωθεί ότι η (5) μπορεί επίσης να προκύψει και από το νόμο του Ampère, όταν η κλειστή διαδρομή συμπίπτει με την περιφέρεια $\rho = \rho_0$ της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου. Τότε, έχουμε

$$I = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} H(\rho_0) \rho_0 d\varphi = 2\pi \rho_0 H(\rho_0) = \frac{\pi}{3} H_0 \rho_0. \quad (6)$$

Για τον υπολογισμό της μαγνητικής πεδιακής έντασης \mathbf{H}' όταν $\rho > \rho_0$, με εφαρμογή και πάλι του νόμου του Ampère για μια περιφέρεια ακτίνας ρ , έχουμε

$$\mathbf{H}'(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho} \varphi_0 = \frac{H_0 \rho_0}{6} \frac{\varphi_0}{\rho}. \quad (7)$$

(γ) Η ανά μονάδα μήκους του αγωγού ενέργεια W_m του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι

$$\begin{aligned} W_m &= \iiint_V \frac{1}{2} \mu_0 H^2 dV = \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \mu_0 H^2(\rho) \rho d\rho d\varphi = \pi \mu_0 \int_0^{\rho_0} H^2(\rho) \rho d\rho \\ &= \pi \mu_0 \int_0^{\rho_0} \rho H_0^2 \left[\frac{1}{2} (\rho/\rho_0) - \frac{1}{3} (\rho/\rho_0)^2 \right]^2 d\rho = \frac{31}{2160} \pi \mu_0 H_0^2 \rho_0^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Με αντικατάσταση των (6) και (8) στην

$$W_m = \frac{1}{2} L_{\text{int}} I^2, \quad (9)$$

υπολογίζεται ο ζητούμενος εσωτερικός συντελεστής αυτεπαγωγής

$$L_{\text{int}} = \frac{31}{120\pi} \mu_0. \quad (10)$$

Ας σημειωθεί ότι η (10) μπορεί, επίσης, να προκύψει και με τις άλλες δύο μεθόδους που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη άσκηση. Η επαλήθευση αυτή προτείνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

όπου

$$\omega_0^2 = \frac{3\pi\mu_0\alpha^2 I_1 I_2}{2ma^3} \quad (26)$$

Από την (26), υπολογίζεται η ζητούμενη συχνότητα f_0

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{3\mu_0\alpha^2 I_1 I_2}{8\pi ma^3}} \quad (27)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.10

Κυλινδρικός αγωγός απείρου μήκους ακτίνας a και μαγνητικής διαπερατότητας μ_1 διαρρέεται από ρεύμα I , που επιστρέφει μέσω ενός ομοαξονικού αγωγού κυλινδρικού κελύφους διαπερατότητας μ_2 , εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής c . Να βρεθεί η ανά μονάδα μήκους του συστήματος ενέργεια του μαγνητικού πεδίου.

ΛΥΣΗ: Αν $\mathbf{H} = H(\rho)\varphi_0$ είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου σε μια απόσταση ρ από τον άξονα, όπου φ_0 είναι το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα, τότε, με εφαρμογή του νόμου του Ampère για τις περιοχές 1 ($\rho < a$), 2 ($a < \rho < b$), 3 ($b < \rho < c$) και 4 ($\rho > c$) έχουμε, αντίστοιχα

πριοχή 1:

$$H_1 2\pi\rho = I(\rho) = \frac{I}{\pi a^2} \pi \rho^2 \Rightarrow H_1 = \frac{I}{2\pi a^2} \rho \quad (1)$$

πριοχή 2:

$$H_2 2\pi\rho = I \Rightarrow H_2 = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (2)$$

πριοχή 3:

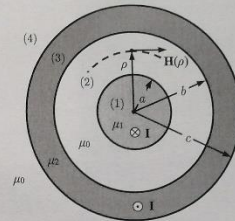
$$H_3 2\pi\rho = I(\rho) = I - \frac{I\pi(\rho^2 - b^2)}{\pi(c^2 - b^2)} = I \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \Rightarrow H_3 = \frac{I(c^2 - \rho^2)}{2\pi\rho(c^2 - b^2)} \quad (3)$$

πριοχή 4:

$$H_4 2\pi\rho = 0 \Rightarrow H_4 = 0. \quad (4)$$

Οι ανά μονάδα μήκους του συστήματος ενέργειες W_i ($i = 1, \dots, 4$) του μαγνητικού πεδίου στις περιοχές 1, 2, 3 και 4, αντίστοιχα, λόγω των (1), (2), (3), (4) είναι

$$W_1 = \iiint_{V_1} \frac{1}{2} \mu_1 H_1^2 dV = \int_0^a \frac{1}{2} \mu_1 2\pi\rho \left(\frac{I}{2\pi a^2}\right)^2 \rho^2 d\rho = \mu_1 \frac{I^2}{16\pi} \quad (5)$$



ΣΧΗΜΑ 7.17

$$W_2 = \iiint_{V_2} \frac{1}{2} \mu_2 H_2^2 dV = \int_a^b \frac{1}{2} \mu_2 2\pi\rho \left(\frac{I}{2\pi\rho}\right)^2 d\rho = \mu_2 \frac{I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\begin{aligned} W_3 &= \iiint_{V_3} \frac{1}{2} \mu_2 H_3^2 dV = \int_b^c \frac{1}{2} \mu_2 \left[\frac{I}{2\pi(c^2 - b^2)} (c^2 - \rho^2) \right]^2 2\pi\rho d\rho \\ &= \frac{\mu_2}{4\pi} \frac{I^2}{(c^2 - b^2)^2} \left[c^4 \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{c^4 - b^4}{4} - c^2(c^2 - b^2) \right] \end{aligned}$$

και

$$W_4 = 0.$$

Από τις (5), (6), (7) και (8) υπολογίζεται η ζητούμενη ενέργεια W ανά μονάδα μήκους του καλωδίου

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \\ &= \frac{I^2}{4\pi} \left[\frac{\mu_1}{4} + \mu_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \mu_2 \left(\frac{c^2}{c^2 - b^2} \right) \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{\mu_2}{4} \frac{b^2 - 3c^2}{c^2 - b^2} \right] \end{aligned}$$