Ειδικά Θέματα Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων

Τρίτη, 9 Μαρτίου 2021 9:51 πμ

Περιεχόμενο μαθήματος

- Ο ρόλος των συμμετριών στην περιγραφή της Φύσης
- Μαθηματική περιγραφή καθολικών συμμετριών ⇒ Θεωρία ομάδων

διακριτές ομάδες βασικές έννοιες

συνεχείς ομάδες

SU(N)

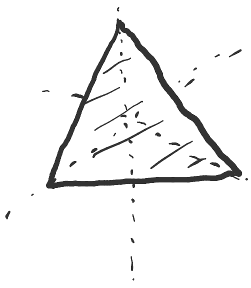
- Από καθολικές συμμετρίες σε τοπικές συμμετρίες

⇓

Θεωρίες βαθμίδας και Καθιερωμένο πρότυπο

Γεωμετρική χρήση της συμμετρίας

Ένα σημειοσύνολο που μένει αναλλοίωτο κάτω από συγκεκριμένους μετασχηματισμούς αντιστοιχίζεται



π.χ. ισόπλευρο τρίγωνο

⇓

μετασχηματισμοί αντιστοιχίζουν

ανακλάσεις ως προς άξονες

στροφές γύρω από άξονα

Γεωμετρία ⇒ στατική εικόνα της συμμετρίας

⇓

Γεωμετρία $\Rightarrow$ στατική ακολ...

$\Downarrow$

Εφαρμογή σε κρυσταλλικές δομές

Συμμετρίες και δυναμική:

Κλασική μηχανική: $\mathcal{L}[x, \dot{x}]$

$\bullet$ = παράγωγος ως προς χρόνο

$x' \to x + \varepsilon$ $\quad x(t) + \varepsilon$ $\quad$ συνεχείς τιμές

απειροστό μεγεθ.

$$\mathcal{L}[x+\varepsilon, (\dot{x+\varepsilon})] = \mathcal{L}[x, \dot{x}]$$

$$(\dot{x+\varepsilon}) = \dot{x}$$

$$\mathcal{L}[x+\varepsilon, \dot{x}] - \mathcal{L}[x, \dot{x}] = 0$$

$\varepsilon << x$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \text{Χρονική εξέλιξη}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)}_{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = p_x} = 0$$

$$\frac{d p_x}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{p_x = \text{σταθ.}}$$

$\Downarrow$

νόμος διατήρησης (εδώ της ορμής)

Ένα λίγο πιο σύνθετο πρόβλημα:

$$\mathcal{L}[x, y, \dot{x}, \dot{y}] \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{L}[x, y, \dot{x}, \dot{y}] \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Καθώς έχει αυξηθεί η διάσταση του χώρου που ορίζονται οι βαθμοί ελευθερίας επιτρέπονται και άλλοι μετασχηματισμοί συντεταγμένων, εδώ π.χ.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Απαίτηση: $\mathcal{L}[x', y', \dot{x}', \dot{y}'] = \mathcal{L}[x, y, \dot{x}, \dot{y}]$

Απειροστοί μετασχηματισμοί: (συνεχείς τιμές της παραμέτρου των μετασχηματισμών: θ))

$\Downarrow$

δεν ορίζονται πάντα

$\delta\theta$ για απειροστό μετασχ.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta \\ \delta\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - \delta\theta\, y \\ y' &= x\,\delta\theta + y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \dot{x}' &= \dot{x} - \delta\theta\, \dot{y} \\ \dot{y}' &= \dot{y} + \dot{x}\,\delta\theta \end{aligned}$$

$\delta\theta$ δεν εξαρτάται από χρόνο

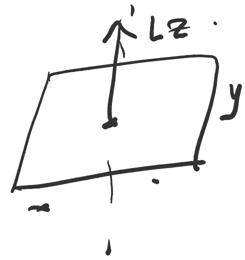
$$\mathcal{L}[x', y', \dot{x}', \dot{y}'] - \mathcal{L}[x, y, \dot{x}, \dot{y}] = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \underbrace{(-y\,\delta\theta)}_{\delta x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \underbrace{(x\,\delta\theta)}_{\delta y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \overbrace{(-\dot{y}\,\delta\theta)}^{\delta \dot{x}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \overbrace{(\dot{x}\,\delta\theta)}^{\delta \dot{y}} = 0$$

$$\underline{\underline{\delta\theta}}\left[-\frac{\partial L}{\partial x}y+\frac{\partial L}{\partial y}x-\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot x}}_{p_x}\dot y+\dot x\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot y}}_{p_y}\right]=0$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot x}}_{p_x}\Big)=\frac{\partial L}{\partial x}\quad,\quad \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot y}}_{p_y}\Big)=\frac{\partial L}{\partial y}\qquad \underline{\text{Εξ. E-L}}$$

$$\left[-\underbrace{\frac{dp_x}{dt}}_{\dot p_x}y+\underbrace{\frac{dp_y}{dt}}_{\dot p_y}x-p_x\dot y+p_y\dot x\right]=0$$



$$\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{p_y x-y p_x}_{L_z}\Big]=0$$

L_z = σταθ.

<u>Νόμος διατήρησης!</u>

Συμμετρία : αναλλοίωτα γεννήτριας συνάρτησης ως προς <u>μετασχηματισμού</u>

παραμετρικοποίηση με συνεχείς παραμέτρους

Νόμοι διατήρησης (δηλ. προσδιορισμός μεγεθών που μένουν αναλλοίωτα στη χρονική εξέλιξη)

Έστω τώρα ότι παραβιάζομε την υπόθεση ότι η παράμετρος του μετασχηματισμού παίρνει συνεχείς

Έστω τώρα ότι ... παίρνει συνεχείς η παράμετρος του μετασχηματισμού τιμές:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

Έστω η γεννήτρια της δυναμικής του αρμονικού ταλαντωτή

Προφανής συμμετρία:

$$x \to -x \quad (\text{καθρεπτισμός})$$

$$\mathcal{L}\left[-x, \dot{(-x)}\right] = \mathcal{L}\left[x, \dot{x}\right]$$

Τι σημαίνει αυτή η συμμετρία για το σύστημα που μελετάω;

Έστω $x(t)$ μια τροχιά του συστήματος ήδη προσδιο. ρίζεται από E-L. Τότε και η $(-x(t), -\dot{x}(t))$ είναι τροχιά του συστήματος.

$$\Downarrow$$

Εύρεση άλλων $\underset{\text{λύσεων}}{\overset{\text{τροχιών}}{}}$ από μια $\underset{\text{λύση}}{\overset{\text{τροχιά}}{}}$ μέσω μετασχηματισμών συμμετρίας.

Κβαντική Μηχανική και συμμετρίες

Έστω $\psi(\underset{\sim}{x})$ κατάσταση κβαντικού συστήματος.

$$\underset{=}{\hat{O}}\, \underset{\sim}{\psi}(x) = \psi(\underset{\sim}{\hat{T}}^{-1} x)$$

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\underbrace{\hat{O}\hat{H}\psi(x) = E\hat{O}\psi(x)}$$

$$\hat{O}\hat{H}\hat{O}^{-1}\hat{O}\psi(x) = E\hat{O}\psi(x)$$

......,

$$\underbrace{\hat O \hat H \hat O^{-1}} \hat O \psi(x) = E \hat O \psi(x)$$

$$\underbrace{\hat H'}_{=\hat H} \hat O \psi(x) = E \hat O \psi(x)$$

$\hat H = \hat O \hat H \hat O^{-1}$ ⇒ πολλ. από δεξιά με $\hat O$

$\hat H \hat O = \hat O \hat H \underbrace{\hat O^{-1} \hat O}_{I}$ ⇒ $\hat H \hat O = \hat O \hat H$ ⇒ $\boxed{[\hat H, \hat O] = 0}$

Σύνδεση των χειριστών συμμετριών στη Κβαντική Μηχανική με τον χειριστό συμμετριών στην Κλασική Μηχανική

⇓

Κβαντική Θεωρία Πεδίων $(\psi(x))$ — πεδίο

$\tilde x, t \in R$

κβαντικές ιδιότητες

έχει σαν υπόβαθρο κλασική θεωρία πεδίων

γεννήτρια συνάρτηση: Λαγκρανζιανή πυκνότητα $\mathcal{L}$

⇓

Διατήρηση της επίπτωσης των συμμετριών στην δυναμική εξέλιξη με τρόπο ανάλογο της κλασσικής μηχανικής.

... να [illegible] την εξίσωση

της μηχανικής.

Ας προσπαθήσουμε π.χ. να συνδέσουμε την εξίσωση συνέχειας στην Κβαντική Μηχανική (εξίσωση Schrödinger) με μετασχηματισμούς συμμετρίας.

- Θα χρειαστούμε Λαγκρανζιανή διατύπωση της κβαντικής δυναμικής (εξίσωση Schrödinger)

•• Θα χρειαστεί να ορίσουμε κατάλληλο μετασχηματισμό συμμετρίας που αφήνει αναλλοίωτη την Λαγκρανζιανή

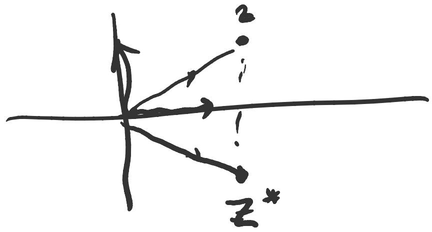
••• Θα ελέγξουμε την επίπτωση της αναλλοιότητας της Λ. κάτω από αυτό τον μετασχηματισμό.

$$\mathcal{L} = \psi^*(i\partial_t - \hat{H})\psi$$

(Λαγκρανζιανή που παράγει την εξίσωση Schrödinger από λογισμό μεταβολών)

δεν είναι πραγματική.

Ανεξάρτητοι βαθμοί ελευθερίας ψ, ψ^* $\underline{(Re\psi, Im\psi)}$



Μεταβολή ως προς ψ^* $\Rightarrow$ $\underbrace{(i\partial_t - \hat{H})\psi = 0}_{\text{Εξίσωση Schrödinger}}$

$$\mathcal{L} = \psi^*[i\partial_t - \hat{H}]\psi$$

$\Rightarrow$ συμμετρία ως προς τον μετασχηματισμό:

$\underline{\psi' = e^{i\theta}\psi}$, $\psi'^* = e^{-i\theta}\psi^*$ $\Big\}$ $\psi' = (1+i\theta)\psi$, $\psi' = \psi + i\theta\psi$

$$\underline{\psi' = e^{i\theta}\psi} \qquad \left.\begin{array}{l} \\ \psi'^{*} = e^{-i\theta}\psi^{*} \end{array}\right\} \quad \psi' = \psi + \underbrace{i\theta\psi}_{\delta\psi}$$

$$\mathcal{L}' = (\psi^{*} + \delta\psi^{*})\left[i\partial_t - \hat{H}\right](\psi + \delta\psi) \qquad \begin{array}{l} \psi \to \psi + \delta\psi \\ \psi^{*} \to \psi^{*} + \delta\psi^{*} \end{array}$$

$$= \psi^{*}\left[i\partial_t - \hat{H}\right]\psi + \delta\psi^{*}\left[i\partial_t - \hat{H}\right]\psi +$$

$$\psi^{*}\left[i\partial_t - \hat{H}\right]\delta\psi$$

$$S = \int d^Dx \int dt \;\; \mathcal{L} = \int d^Dx \int dt \;\; \psi^{*}\left[i\partial_t - \hat{H}\right]\psi$$

$$S' = \int d^Dx \int dt \; \mathcal{L}' = \int d^Dx \int dt \left[\psi^{*}\left[i\partial_t - \hat{H}\right]\psi + \delta\psi^{*}\left[i\partial_t - \hat{H}\right]\psi + \underbrace{\psi^{*}\left[i\partial_t - \hat{H}\right]\delta\psi}\right]$$

$$\underline{\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)}$$

$$S' = \int d^Dx \int dt \left[\psi^{*}\left[i\partial_t - \hat{H}\right]\psi + \delta\psi^{*}\left[i\partial_t - \hat{H}\right]\psi + \psi^{*}\left[i\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - V(x)\right]\delta\psi\right\} \Pi$$

$$\Pi = \int dx \int dt \left[\psi^{*}\left(i\partial_t(\delta\psi) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\delta\psi) - V(x)\delta\psi\right]\right.$$

κατά παράγοντες ολοκληρώσεις
(συνοριακοί όροι δεν αντιστοιχούν)

$$\Pi = \int dx \int dt \left[-i\partial_t \psi^* \, \delta\psi + \frac{\hbar^2}{2m} \delta\psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} - V(x)\,\delta\psi \right]$$

$$S = \int dx \int dt \; \psi^* [i\partial_t - \hat{H}] \psi$$

$$S' = \int dx \int dt \Big[\psi^* [i\partial_t - \hat{H}] \psi + \delta\psi^* [i\partial_t - \hat{H}] \psi + \delta\psi [-i\partial_t - \hat{H}] \psi^* \Big]$$

$$\delta\mathcal{L} = \delta\psi^* [i\partial_t - \hat{H}] \psi + \delta\psi [-i\partial_t - \hat{H}] \psi^*$$

$$\delta\psi^* = -i\theta\psi^* \qquad \delta\psi = i\theta\psi$$

$$\delta\mathcal{L} = -i\theta\psi^* [i\partial_t - \hat{H}] \psi + i\theta\psi [-i\partial_t - \hat{H}] \psi^*$$

$$\delta\mathcal{L} = 0 \Rightarrow -i\psi^* i\partial_t\psi + i\psi^*\hat{H}\psi + i\psi(-i\partial_t\psi^*) - i\psi\hat{H}\psi^* = 0$$

$$\psi^*\partial_t\psi + \psi\partial_t\psi^* + i\psi^*\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cancel{V(x)}\right]\psi - i\psi\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cancel{V(x)}\right]\psi^* = 0$$

$$\partial_t(\psi^*\psi) + i\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left[\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\right] = 0$$

$$\partial_t(\psi^*\psi) + \frac{\hbar^2}{2mi}\frac{\partial}{\partial x}\boxed{\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right]} = 0$$

Εξίσωση συνέχειας της εξ. Schrödinger!

Εξίσωση συνέχειας της εξ. Schrödinger!

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\,\phi(x)$$