ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Ακαδημαικό έτος 2019-2020

Φώτιος Κ. Διάκονος

Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

5. Σύμπλοκα

Γνήσιες υποομάδες της $G = C_2 \otimes C_2$ (εκτός της τετριμμένης):

$$H_1 = \{e,\ g_2\} \quad ; \quad H_2 = \{e,\ g_3\} \quad ; \quad H_3 = \{e,\ g_4\}$$

Θα ισχύει προφανώς: $g_2 \circ H_1 = H_1$ (θεώρημα αναδιάταξης)

Επίσης: $g_2 \circ H_2 = \{g_2,\ g_4\}$ και $g_2 \circ H_3 = \{g_2,\ g_3\}$

Έστω H υποομάδα ομάδας G και $g_i \in G$ με $g_i \notin H$. Τότε το σύνολο $g_i \circ H$ ονομάζεται **αριστερό σύμπλοκο της H στην G ως προς g_i**. Αντίστοιχα το $H \circ g_i$ είναι **δεξί σύμπλοκο της H στην G ως προς g_i**.

Παρατηρούμε ότι $H_2 \cup g_2 \circ H_2 = G$ και $H_3 \cup g_2 \circ H_3 = G$.

Αυτή η ιδιότητα γενικεύεται για κάθε ομάδα G, τις υποομάδες της και τα αντίστοιχα σύμπλοκα.

Ιδιότητες συμπλόκων

Έστω H υποομάδα πεπερασμένης ομάδας G. Επίσης έστω g_i στοιχείο της G που δεν ανήκει στην H. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- Αν h_j, h_k στοιχεία της H με $h_j \neq h_k$ τότε:

  1. Το $g_i \circ h_j$ δεν ανήκει στην H. Πράγματι έστω $g_i \circ h_j \in H$, τότε και $g_i \circ h_j \circ h_j^{-1} = g_i$ ανήκει στην H (αφού το h_j^{-1} ανήκει υποχρεωτικά στην H) $\Rightarrow$ άτοπο καθώς από υπόθεση το g_i δεν ανήκει στο H.

  2. $g_i \circ h_j \neq g_i \circ h_k$. Πράγματι αν $g_i \circ h_j = g_i \circ h_k$ τότε και $g_i^{-1} \circ g_i \circ h_j = g_i^{-1} \circ g_i \circ h_k \Rightarrow h_j = h_k$, άτοπο αφού από υπόθεση $h_j \neq h_k$.

- Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι:

  1. Τα σύνολα H και $g_i \circ H$ δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο.

  2. Το σύνολο $g_i \circ H$ έχει $|H|$ διαφορετικά στοιχεία.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι $|H| + |g_i \circ H| < |G|$

(Δεν γίνεται να είναι μεγαλύτερο το αριστερό μέρος. Γιατί;)

- Αν g_j στοιχείο της G που **δεν ανήκει** στο H αλλά **ούτε** και στο $g_i \circ H$. Τότε το **σύνολο** $g_j \circ H$ **δεν έχει κανένα κοινό στοιχείο ούτε με την** H (ίδια περίπτωση με $g_i \circ H$) **αλλά ούτε και με την** $g_i \circ H$.
  - Προφανώς ισχύει $g_i \neq g_j$ (γιατί;).
  - Έστω οι $g_i \circ H$ και $g_j \circ H$ έχουν κοινό στοιχείο: $g_i \circ h_k = g_j \circ h_\ell$ τότε $g_j = g_i \circ h_k \circ h_\ell^{-1} \Rightarrow$ άτοπο αφού σε αυτή την περίπτωση το g_j θα ανήκει στο $g_i \circ H$ αντίθετα με την υπόθεση.

- Αφού τα $g_i \circ H$ και $g_j \circ H$ με $g_i \neq g_j$ δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο και σύμφωνα με τις ιδιότητες που αποδείξαμε πιο πριν θα ισχύει:

$$|g_i \circ H| = |g_j \circ H| = |H|$$

  τότε είτε η G καλύπτεται από τα H, $g_i \circ H$, $g_j \circ H$ είτε περισσεύουν $n|H|$ στοιχεία της G με $n \in N$.

6. Θεώρημα Lagrange

Έστω H υποομάδα πεπερασμένης ομάδας G. Ισχύει:

$$\frac{|G|}{|H|} = m \quad ; \quad m \in \mathbb{N}$$

Σύμφωνα με την συζήτηση για τα σύμπλοκα θα ισχύει:

$$|G| \xrightarrow{H} |G| - |H| \xrightarrow[g_i \notin H]{g_i \circ H} |G| - 2|H| \xrightarrow[g_j \notin H,\ g_j \notin g_i \circ H]{g_j \circ H} |G| - 3|H| .....$$

Η διαδικασία τερματίζει όταν μετά από m επαναλήψεις **δεν θα υπάρχει** $g \in G$ για να σχηματισθεί νέο σύμπλοκο!

$$\Downarrow$$

$$|G| - m|H| = 0$$

Συνέπειες του θεωρήματος Lagrange

- Η τάξη μιας υποομάδας πρέπει να **διαιρεί ακριβώς** την τάξη της ομάδας $\Rightarrow$ **περιορίζει** τις δυνατές υποομάδες μιας ομάδας.

- Επειδή κάθε στοιχείο μιας πεπερασμένης ομάδας είναι γεννήτορας μίας κυκλικής ομάδας με τάξη ίση με την τάξη αυτού του στοιχείου $\Rightarrow$ **Η τάξη κάθε στοιχείου μιας ομάδας διαιρεί ακριβώς την τάξη της ομάδας**.

$$\Downarrow$$

Περιορίζει την **τάξη των στοιχείων** μιας ομάδας.

- Μια ομάδα με $|G| = p$ όπου p **πρώτος αριθμός** είναι υποχρεωτικά **κυκλική** και όλα τα στοιχεία της (πλην του ουδετέρου) έχουν τάξη p.

Σύμπλοκα: ιδιότητες και παραδείγματα

- Προφανώς υπάρχουν αριστερά $g_i \circ H$ και δεξιά $H \circ g_i$ σύμπλοκα. Όταν σε μια υποομάδα **αριστερά και δεξιά σύμπλοκα συμπίπτουν** τότε η υποομάδα καλείται **κανονική**.

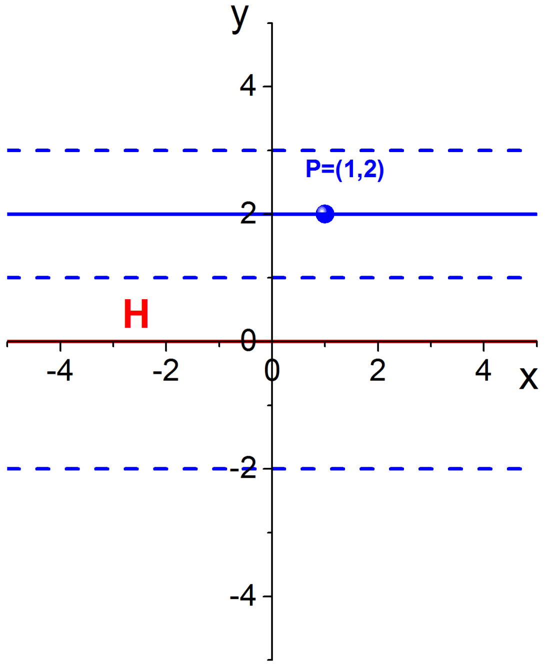
  (Συμβολίζεται συνήθως με N, normal).

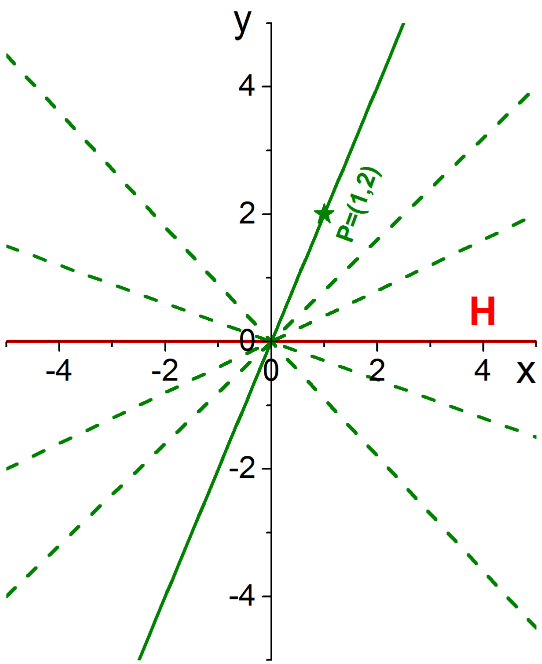
- Όσα είπαμε χρησιμοποιώντας αριστερά σύμπλοκα ισχύουν και για τα δεξιά. Γιατί;

- Τα σύμπλοκα αποτελούν **διαμέριση** μιας ομάδας σε **υποσύνολα** που έχουν όλα ίδια τάξη.

- Τα σύμπλοκα ορίζονται (με τον ίδιο ακριβώς τρόπο) και για μη πεπερασμένες ομάδες.

- Έστω $G = (\mathbb{R}^2, +)$ και $H = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Τα σύμπλοκα της H στην G είναι ευθείες παραλληλες στον άξονα x. Πράγματι έστω $P = (a, b)$ με $b \neq 0$ τότε $P \circ H = \{(x + a, b) : x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ ευθεία παράλληλη στον x-άξονα που περνάει από το P.





- Έστω $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$ και $H = (\mathbb{R}^*, \cdot\}$. Τα σύμπλοκα της H στην G είναι ευθείες που διέρχονται από το $(0, 0)$. Πράγματι αν $P = (a, b)$ με $a,\ b\ \in\ \mathbb{R}$ και $b \neq 0$ τότε $P \circ H = \{(a \cdot x, b \cdot x) : x \in \mathbb{R}\}$ $\Rightarrow$ η ευθεία $y = \frac{a}{b}x$.

7. Η G_5

Η $G_5 = \{e, g_2, g_3, g_4, g_5\}$ είναι υποχρεωτικά κυκλική αφού το 5 είναι πρώτος αριθμός.

Ισχύει:

$$g_2^5 = g_3^5 = g_4^5 = g_5^5 = e$$

Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός C_5 (αντί για G_5).

Υποομάδες: έχει μόνο την τετριμμένη και τον εαυτό της.

Γεωμετρική υλοποίηση: προσανατολισμένο πεντάγωνο ή η γενίκευση του triquetrum.

8. Η κατασκευή της G_6.

- Συμβολισμός: $G_6 = \{e, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$

- Εκτός του μοναδιαίου e τα υπόλοιπα στοιχεία της G_6 μπορούν να έχουν τάξη 2, 3 και 6.

- Ένα στοιχείο τάξης 6 σχηματίζει την κυκλική ομάδα C_6. Έστω g_2 το στοιχείο αυτό. Τότε θα ισχύει:

$$g_2^2 = g_3 \quad ; \quad g_2^3 = g_4 \quad ; \quad g_2^4 = g_5 \quad ; \quad g_2^5 = g_6$$

  και προφανώς $g_2^6 = e$. Επίσης $g_6^6 = e$.

- Υποομάδες της $C_6 \Rightarrow$ για να τις βρούμε βοηθάει να προσδιορίσουμε την τάξη κάθε στοιχείου:

Στοιχείο της C_6	Τάξη στοιχείου
e	1
$g_2,\ g_6$	6 $(g_2^6 = e = g_6^6)$
$g_3,\ g_5$	3 $(g_3^3 = g_2^6 = e = g_5^3)$
g_4	2 $(g_4^2 = g_2^6 = e)$

- Εκτός από την τετριμμένη και την ίδια την C_6 θα υπάρχουν οι εξής υποομάδες:

$$H_1 = \{e,\ g_4\} \quad ; \quad H_2 = \{e,\ g_3,\ g_5\}$$

  Προφανώς ισχύει: $g_3^2 = g_2^4 = g_5$ και $g_5^2 = g_2^8 = g_2^2 = g_3$, ενώ $g_3 \circ g_5 = g_2^6 = e$.

- Ως κυκλική είναι αβελιανή τόσο η C_6 όσο και οι υποομάδες της $\Rightarrow$ μπορούσαμε να γράψουμε N_1, N_2 για τις H_1, H_2.

Άσκηση: Βρείτε τα σύμπλοκα των H_1, H_2 και επιβεβαιώστε ότι αυτές είναι **κανονικές**.

Η έννοια της ομάδας πηλίκο.

Έστω N **κανονική υποομάδα** ομάδας G. Τότε **η** N **μαζί με όλα τα σύμπλοκα της στην** G αποτελούν **ομάδα** με γινόμενο '$\circ$' το γινόμενο της G αλλά ορισμένο για σύνολα!

Η ομάδα αυτή λέγεται **ομάδα πηλίκο** G/N.

Πράγματι έστω $g_i \circ N$ και $g_j \circ N$ δύο στοιχεία της G/N (προφανώς $g_i \neq g_j$, $g_j \notin g_i \circ N$).

- $(g_i \circ N) \circ (g_j \circ N) = g_i \circ (N \circ g_j) \circ N = (g_i \circ g_j) \circ (N \circ N) \in G/N$ (κλειστότητα).
- Το N είναι το ουδέτερο στοιχείο.
- Το $g_i^{-1} \circ N$ είναι το αντίστροφο του $g_i \circ N$.

Για να καταλάβουμε καλύτερα την έννοια της ομάδας πηλίκο ας δούμε ένα παράδειγμα χρησιμοποιώντας την C_6 και την υποομάδα της $N_2 = \{e,\ g_3,\ g_5\}$.

- Εύρεση των συμπλόκων της N_2 στην C_6: $g_2 \circ N_2 = \{g_2 \circ e,\ g_2 \circ g_3,\ g_2 \circ g_5\} = \{g_2,\ g_4,\ g_6\} \Rightarrow$ δεν υπάρχει άλλο!

- Επομένως: $C_6/N_2 = \{N_2,\ g_2 \circ N_2\} = \{\{e,\ g_3,\ g_5\},\ \{g_2,\ g_4,\ g_6\}\}$

- $\{g_2,\ g_4,\ g_6\} \circ \{e,\ g_3,\ g_5\} = \{g_2 \circ e, g_2 \circ g_3, g_2 \circ g_5, g_4 \circ e, g_4 \circ g_3, g_4 \circ g_5, g_6 \circ e, g_6 \circ g_3, g_6 \circ g_5\} = \{g_2,\ g_4,\ g_6\} = \{e,\ g_3,\ g_5\} \circ \{g_2,\ g_4,\ g_6\}$

$$\Downarrow$$

Η N_2 είναι το ουδέτερο στοιχείο!

- Δείξτε ότι $(g_2 \circ N_2)^2 = N_2$ και επομένως η C_6/N_2 είναι ισόμορφη της C_2.