# ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

**Ακαδημαϊκό έτος 2019-2020**

Φώτιος Κ. Διάκονος

Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

# 16. Συνεχείς ομάδες

Έστω σύνολο με στοιχεία $R(\boldsymbol{a})$ που προσδιορίζονται από ένα **σύνολο $r$ παραμέτρων** $\boldsymbol{a} = \{a_1,\ a_2, ...,\ a_r\}$ που παίρνουν συνεχείς τιμές στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιούν τις απαιτήσεις της ομάδας (**κλειστότητα, ύπαρξη ουδετέρου και αντιστρόφου, προσεταιριστικότητα**) ως προς κατάλληλα ορισμένη πράξη **γινομένου**. Το σύνολο αυτό λέγεται **συνεχής $r$–παραμετρική ομάδα**.

Θα ισχύει:

$$R(\boldsymbol{a}) \cdot R(\boldsymbol{b}) \;=\; R(\boldsymbol{c})$$

για τα στοιχεία του συνόλου.

Οι παράμετροι $\mathbf{c} = \{c_1,\ c_2, ...,\ c_r\}$ θα καθορίζονται από τις τιμές των $\mathbf{a} = \{a_1,\ a_2, ...,\ a_r\}$ και $\mathbf{b} = \{b_1,\ b_2, ...,\ b_r\}$ μέσω απεικόνισης:

$$\boldsymbol{c} \;=\; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$$

στον **παραμετρικό χώρο**.

## Ιδιότητες της απεικόνισης $f$

- **Προσεταιριστική ιδιότητα**:

$$R(\mathbf{a})\,(R(\mathbf{b})R(\mathbf{c})) = (R(\mathbf{a})R(\mathbf{b}))\,R(\mathbf{c}) \;\Rightarrow\; R(\mathbf{a})R(\mathbf{f}(\mathbf{b},\mathbf{c})) = R(\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{b}))R(\mathbf{c})$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{f}(\mathbf{b},\mathbf{c})) \;=\; \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{b}),\mathbf{c})$$

- **Ουδέτερο στοιχείο**:

$$R(\mathbf{a_e})R(\mathbf{a}) = R(\mathbf{a})R(\mathbf{a_e}) = R(\mathbf{a})$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{a} \;=\; \mathbf{f}(\mathbf{a_e},\mathbf{a}) \;=\; \mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{a_e})$$

- **Αντίστροφο στοιχείο**:

$$R(\mathbf{a})R(\mathbf{a_{-1}}) = R(\mathbf{a_{-1}})R(\mathbf{a}) = R(\mathbf{a_e})$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{a_e} \;=\; \mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{a_{-1}}) \;=\; \mathbf{f}(\mathbf{a_{-1}},\mathbf{a})$$

Αν το σύνολο των $f_i(\mathbf{a},\mathbf{b})$ $(\boldsymbol{f}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (f_1(\mathbf{a},\mathbf{b}),\ f_2(\mathbf{a},\mathbf{b}),...,\ f_r(\mathbf{a},\mathbf{b})))$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις των παραμέτρων $a_i$, $b_i$ τότε η ομάδα λέγεται **ομάδα Lie $r$-παραμέτρων**.

Οι ομάδες Lie συνδυάζουν ιδιότητες αναλυτικών συναρτήσεων με αυτές των ομάδων.

Από πλευράς Φυσικής ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν ομάδες που περιγράφουν **μετασχηματισμούς διανυσμάτων που ανήκουν σε ένα διανυσματικό χώρο**. Τέτοιοι μετασχηματισμοί γράφονται ως:

$$x_i' \;=\; f_i(x_1,\ x_2,...,\ x_d;\ a_1,\ a_2,...,\ a_r) \quad ; \quad i = 1,\ 2,...,\ d$$

Αν οι $f_i$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις τότε η ομάδα είναι μια $r$-παραμετρική ομάδα Lie μετασχηματισμών.

# Ομάδες γραμμικών μετασχηματισμών

Θα ασχοληθούμε στη συνέχεια με μια κατηγορία συνεχών ομάδων που ανήκουν στους **γραμμικούς μετασχηματισμούς**.

Είναι πίνακες που δρουν σε διανυσματικούς χώρους, π.χ.:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad ; \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

Τέτοιου τύπου ομάδες ονομάζονται: $M(d, F)$.

- το $M$ συμβολίζει την **ιδιότητα που χαρακτηρίζει τους πίνακες** της ομάδας. Π.χ. $M \Rightarrow GL,\ SL,\ O,\ SO,\ U,\ SU, \ldots$ με $G$ = general, $L$ = linear, $S$ = special ($\det(\mathbf{A}) = 1$), $O$ = orthogonal ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$), $U$ = unitary ($\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$) κ.λ.π.

- Το $d$ προσδιορίζει την **διάσταση του διανυσματικού χώρου** που δρουν τα $\mathbf{A}$ και το $F$ το **σώμα** (π.χ. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) στο οποίο παίρνουν τιμές τα $a_{ij}$.

## 17. Διατήρηση μηκών στο $\mathbb{R}^2$ - Ομάδα SO(2)

Θα μελετήσουμε αρχικά την **ομάδα γραμμικών μετασχηματισμών** που **αφήνει αναλοίωτο το μήκος** διανυσμάτων του $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (x',\ y') \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x,\ y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \det(\mathbf{A}) = 1, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}$$

Οπότε παίρνουμε τις συνθήκες:

- $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \Rightarrow a_{11} = \cos\phi,\ a_{21} = \sin\phi, \qquad \phi \in [-\pi,\ \pi).$
- $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \Rightarrow a_{12} = \cos\chi,\ a_{22} = \sin\chi, \qquad \chi \in [-\pi,\ \pi).$
- $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \Rightarrow \chi = \phi \pm \frac{\pi}{2}.$
- $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \Rightarrow \chi = \phi + \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{R}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

# Η ομάδα SO(2)

Οι ορθογώνιοι πίνακες $\mathbf{R}(\phi)$ της μορφής: $\mathbf{R}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ με $\phi \in [-\pi, \pi)$ έχουν τις εξής ιδιότητες:

- $\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$ (ουδέτερο στοιχείο).

- Για $\mathbf{R}(\phi_1)$, $\mathbf{R}(\phi_2) \in \mathrm{SO}(2)$ ισχύει ότι $\mathbf{R}(\phi_1)\mathbf{R}(\phi_2) \in \mathrm{SO}(2)$ (κλειστότητα). Πιο συγκεκριμένα:

$$\mathbf{R}(\phi_1)\mathbf{R}(\phi_2) = \mathbf{R}(\phi_3) \quad \text{με} \quad \phi_3 = (\phi_1 + \phi_2) \mod 2\pi$$

- Για κάθε $\mathbf{R}(\phi)$ υπάρχει ο αντίστροφος $\mathbf{R}^{-1}(\phi) = \mathbf{R}(-\phi)$ (αντίστροφο στοιχείο).

- Ισχύει: $\mathbf{R}(\phi_1)(\mathbf{R}(\phi_2)\mathbf{R}(\phi_3)) = (\mathbf{R}(\phi_1)\mathbf{R}(\phi_2))\mathbf{R}(\phi_3)$ (προσεταιριστική ιδιότητα).

$$\Downarrow$$

Οι $\mathbf{R}(\phi)$ σχηματίζουν την **μονοπαραμετρική** ομάδα SO(2)

Επειδή ισχύει:

$$\mathbf{R}(\phi_1)\mathbf{R}(\phi_2) \;=\; \mathbf{R}((\phi_1+\phi_2)\mathrm{mod}2\pi) \;=\; \mathbf{R}(\phi_2)\mathbf{R}(\phi_1)$$

η SO(2) είναι **αβελιανή** ομάδα.

Για οσοδήποτε μικρό $|\Delta\phi|$ και κάθε $\phi \in [-\pi,\ \pi)$ υπάρχει πίνακας που ορίζεται από το όριο:

$$\lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{1}{\Delta\phi}(\mathbf{R}(\phi+\Delta\phi)-\mathbf{R}(\phi)) \;=\; \begin{pmatrix} -\sin\phi & -\cos\phi \\ \cos\phi & -\sin\phi \end{pmatrix}$$

δηλ. μπορούμε να ορίσουμε την **παράγωγο του πίνακα** $\mathbf{R}(\phi)$:

$$\frac{d\mathbf{R}(\phi)}{d\phi} \;=\; \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{1}{\Delta\phi}(\mathbf{R}(\phi+\Delta\phi)-\mathbf{R}(\phi))$$

και κατ΄ επέκταση όλες τις ανώτερες παραγώγους $\frac{d^k\mathbf{R}(\phi)}{d\phi^k}$ οπότε η SO(2) είναι **ομάδα Lie**.

Παρατηρούμε ότι $\frac{d\mathbf{R}(\phi)}{d\phi} \;=\; \mathbf{R}(\phi+\frac{\pi}{2})$ οπότε ανήκει στην ομάδα SO(2). Θα δούμε ότι αυτό **δεν ισχύει για όλες της ομάδες Lie**.

Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι ο **πίνακας** $\mathbf{R}(\phi)$ προσεγγίζει με **αναλυτικό τρόπο** το ουδέτερο στοιχείο $\mathbf{R}(0)$ της SO(2) καθώς $\phi \to 0$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

$$\mathbf{R}(\phi) \;=\; \mathbf{R}(0) + \phi \left.\frac{d\mathbf{R}(\phi)}{d\phi}\right|_{\phi=0} + \frac{\phi^2}{2!}\left.\frac{d^2\mathbf{R}(\phi)}{d\phi^2}\right|_{\phi=0} + \ldots$$

Ο πίνακας $\mathbf{X} = \left.\frac{d\mathbf{R}(\phi)}{d\phi}\right|_{\phi=0}$ ονομάζεται **γεννήτορας** της SO(2) και περιγράφει απειροστές μεταβολές από τον ταυτοτικό μετασχηματισμό:

$$\mathbf{R}(\Delta\phi) \;\approx\; \underbrace{\mathbf{I}}_{\mathbf{R}(0)} + \Delta\phi\ \mathbf{X} \qquad \text{με } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ για την SO(2)}$$

Ένας πεπερασμένος μετασχηματισμός SO(2) μπορεί να παραχθεί από $N$ απειροστούς (για $N \to \infty$) οπότε:

$$\mathbf{R}(\phi) \;=\; \lim_{N\to\infty}\left(\mathbf{I} \;+\; \frac{\phi}{N}\ \mathbf{X}\right)^N \;=\; e^{\phi\mathbf{X}} \quad\Rightarrow\quad \text{εκθετικοποίηση}$$

## Κλάσεις συζυγίας

Για κάθε στοιχείο $\mathbf{R}(\phi)$ της **αβελιανής** SO(2) ισχύει:

$$\mathbf{R}(\theta)\mathbf{R}(\phi)\underbrace{\mathbf{R}(-\theta)}_{\mathbf{R}^{-1}(\theta)} = \mathbf{R}(\phi)$$

**Κάθε $\mathbf{R}(\phi)$ αποτελεί κλάση συζυγίας της SO(2) που διακρίνεται από την παράμετρο $\phi$.**

## Θεώρημα αναδιάταξης

Σε μια πεπερασμένη ομάδα $G$ ισχύει: $\sum_g f(gg') = \sum_g f(g)$

Σε μια συνεχή ομάδα θα ισχύει αντίστοιχα:

$$\int d\mu(g) f(gg') = \int d\mu(g) f(g) \quad \text{με} \quad d\mu(g) = \rho(g(\boldsymbol{\phi}))\, d\boldsymbol{\phi}$$

**Για την SO(2) θα ισχύει: $\rho(\phi) = 1$ (1-1 αντιστοιχία μεταξύ $\mathbf{R}(\phi)$ και σημείων του μοναδιαίου κύκλου)**

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi\ \mathbf{R}(\phi)\mathbf{R}(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi\ \mathbf{R}(\phi)$$

# Αναπαραστάσεις της SO(2)

Αφού η SO(2) είναι αβελιανή οι **ΜΑ, ΜΙ αναπαραστάσεις** της θα είναι **μονοδιάστατες**. Επομένως η αναπαράσταση:

$$\mathbf{R}(\phi) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

που χρησιμοποιήσαμε για να ορίσουμε την SO(2) είναι **αναγώγιμη**. Μας παρέχει όμως την **γεωμετρική ερμηνεία** της ομάδας: στροφές στο επίπεδο $(x, y)$.

Ας προσπαθήσουμε να βρούμε τις δυνατές ΜΙ, ΜΑ αναπαραστάσεις για μια κλάση συζυγίας κρατώντας το $\phi$ σταθερό. Ο χαρακτήρας της $k$-αναπαράστασης για τη κλάση συζυγίας με ¨δείκτη' $\phi$ θα είναι:

$$\chi_\phi^{(k)} \;\equiv\; \chi^{(k)}(\phi)$$

Επειδή η αναπαράσταση είναι $1-D$ το $\chi^{(k)}(\phi)$ θα ικανοποιεί τον πολλαπλασιασμό της ομάδας:

$$\chi^{(k)}(\phi)\chi^{(k)}(\phi') \;=\; \chi^{(k)}((\phi+\phi')\mathrm{mod}2\pi)$$

Επίσης θα ισχύει:

- $\chi^{(k)}(0) \ = \ 1.$
- $\chi^{(k)}(\phi+2\pi) \ = \ \chi^{(k)}(\phi).$
-

$$\chi^{(k)}(\phi)\chi^{(k)}(\Delta\phi) \ = \ \chi^{(k)}(\phi+\Delta\phi)$$

$$\Downarrow$$

$$\chi^{(k)}(\phi)\chi^{(k)}(\Delta\phi)-\chi^{(k)}(\phi)\chi^{(k)}(0) \ = \ \chi^{(k)}(\phi+\Delta\phi)-\chi^{(k)}(\phi)$$

διαιρώντας με $\Delta\phi$ και παίρνοντας το όριο $\Delta\phi \to 0$ βρίσκουμε:

$$\frac{d\chi^{(k)}(\phi)}{d\phi} \ = \ \lambda_k \chi^{(k)}(\phi) \quad ; \quad \lambda_k = \left.\frac{d\chi^{(k)}(\phi)}{d\phi}\right|_{\phi=0}$$

με λύση (συμβατή με τη συνθήκη $\chi^{(k)}(\phi+2\pi) \ = \ \chi^{(k)}(\phi)$):

$$\chi^{(k)}(\phi) \ = \ \underbrace{\chi^{(k)}(0)}_{=1} e^{\lambda_k \phi} \quad \text{με } \lambda_k \ = \ i\ k, \ \ k \ \in \ \mathbb{Z}$$

Ο πίνακας χαρακτήρων της SO(2) θα έχει επομένως την μορφή:

| $SO(2)$ | $\mathcal{C}(\phi)$ |
|---|---|
| $\ldots$ | $\ldots$ |
| $\Gamma_{-m}$ | $e^{-im\phi}, \;\; m \;\in\; \mathbb{N}$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ |
| $\Gamma_0$ | $1$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ |
| $\Gamma_m$ | $e^{im\phi}, \;\; m \;\in\; \mathbb{N}$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ |

Επομένως ο πίνακας $\mathbf{R}(\phi)$ της *΄καθορίζουσας΄* **αναπαράστασης** $\Gamma_D$ **(defining representation) της SO(2)** μπορεί να αναλυθεί σε ΜΙ, ΜΑ αναπαραστάσεις ως εξής:

$$\chi_{\Gamma_D}(\phi) \;=\; \mathrm{Tr}(\mathbf{R}(\phi)) \;=\; 2\cos\phi \;=\; \chi_{\Gamma_{-1}}(\phi) + \chi_{\Gamma_1}(\phi)$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma_D \;=\; \Gamma_{-1} \bigoplus \Gamma_1$$

Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί και με διαγωνοποίηση του $\mathbf{R}(\phi)$:

$$\mathbf{R}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

## Σχέσεις ορθογωνιότητας χαρακτήρων της SO(2)

- $$\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \chi_{\Gamma_m}(\phi)\chi^*_{\Gamma_{m'}}(\phi)}_{\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma \chi_\gamma^{(m)} \chi_\gamma^{*(m')}} = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{i(m-m')\phi} = \underbrace{2\,\pi}_{|\mathrm{SO}(2)|} \delta_{m,m'}.$$

- $$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \chi_{\Gamma_m}(\phi)\chi^*_{\Gamma_m}(\phi') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} = 2\pi\delta(\phi-\phi').$$