ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Ακαδημαικό έτος 2019-2020

Φώτιος Κ. Διάκονος

Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

1. Ομάδες - Γενικές έννοιες

Ομάδα: **Σύνολο** $G = \{g_1, g_2, ..., g_N\}$ εφοδιασμένο με **πράξη** '$\circ$' (πολλαπλασιασμός) έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι **ιδιότητες**:

1. $\forall\ g_i,\ g_j \in\ G \Rightarrow g_i \circ g_j \in G$ (κλειστότητα).

2. Αν $g_i,\ g_j,\ g_k\ \in G$ τότε: $g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k$ (προσεταιριστική ιδιότητα).

3. Υπάρχει δεξί ουδέτερο στοιχείο $e \in G$: $g_i \circ e = g_i, \quad \forall g_i \in G$

4. Υπάρχει δεξί αντίστροφο στοιχείο: $\forall\ g_i\ \in\ G\ \ \exists\ g_i^{-1}\ \in\ G$:

$$g_i \circ g_i^{-1} = e$$

Η ύπαρξη δεξιού ουδέτερου στοιχείου και δεξιού αντιστρόφου επάγουν την **ύπαρξη και αριστερού ουδέτερου στοιχείου και αντιστρόφου**:

Ισχύει για $g,\ g^{-1},\ e\ \in\ G$: $\qquad g \circ g^{-1} = e$

$$\Downarrow$$

$$g^{-1} \circ (g^{-1})^{-1} = e \ \Rightarrow g^{-1} \circ \overbrace{\underbrace{g \circ g^{-1}}_{e}} \circ (g^{-1})^{-1} = e$$

$$\Downarrow$$

$$g^{-1} \ \circ\ g\ \circ\ \underbrace{(g^{-1} \circ (g^{-1})^{-1})}_{e} = e$$

$$\Downarrow$$

$$g^{-1} \circ g = e$$

Αριστερό αντίστροφο = Δεξί αντίστροφο

Στη συνέχεια από την ύπαρξη αριστερού αντιστρόφου προκύπτει:

$$g^{-1} \circ g = e$$

$$\Downarrow$$

$$g \circ g^{-1} \circ g = g \circ e \Rightarrow e \circ g = g$$

$$\Downarrow$$

Υπάρχει αριστερό ουδέτερο στοιχείο και ισχύει:
Αριστερό ουδέτερο στοιχείο = Δεξί ουδέτερο στοιχείο

$$\Downarrow$$

Υπάρχει **μοναδικό ουδέτερο** στοιχείο και **μοναδικό αντίστροφο** στοιχείο

Παραδείγματα Ομάδων

- Το σύνολο των ακεραίων με $\circ = +$ (συνήθης πρόσθεση). Ουδέτερο στοιχείο: 0, αντίστροφο στοιχείο: $-g$. Ισχύει για τους φυσικούς αριθμούς;

- Το σύνολο των θετικών ρητών με $\circ = *$ (συνήθης πολλαπλασιασμός). Ουδέτερο στοιχείο: 1, αντίστροφο στοιχείο: $\frac{1}{g}$.

- Το σύνολο των πινάκων M με ορίζουσα $\det[\mathrm{M}] = 1$. Ουδέτερο στοιχείο: $\mathbf{I}$, αντίστροφο στοιχείο: $g^{-1} = \mathrm{M}^{-1}$ (υπάρχει αφού $\det\mathrm{M} \neq 0$).

- Το σύνολο $\{0, 1\}$ αποτελεί ομάδα με $\circ = + \bmod 2$, δηλ. $g_i \circ g_j = (g_i + g_j) \bmod 2$. Ποιά είναι τα αντίστροφα στοιχεία σε αυτή την περίπτωση;

Κατηγοριοποίηση Ομάδων

Ομάδες

↙ ↘

διακριτές — συνεχείς (άπειρες μη αριθμήσιμες)

διακριτές:

↙ ↘

πεπερασμένες — άπειρες (αριθμήσιμες)

Θα επικεντρωθούμε αρχικά στις **πεπερασμένες διακριτές ομάδες**.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε διακριτές ομάδες ξεκινώντας από τις πιο απλές.

Η πιο απλή διακριτή ομάδα περιέχει ένα μόνο στοιχείο:

$$G_1 = \{e\}$$

και προφανώς ισχύει: $e \circ e = e$.

Η αμέσως πιο πολύπλοκη ομάδα περιέχει 2 στοιχεία:

$$G_2 = \{e, g\}$$

Είναι χρήσιμο να δούμε πως προσδιορίζεται το γινόμενο των στοιχείων της ομάδας. Προφανώς θα ισχύει:

$$e \circ e = e \quad , \quad e \circ g = g \circ e = g$$

Μένει να προσδιορίσουμε το γινόμενο $g \circ g$:

Υπάρχουν 2 επιλογές: $g \circ g = \begin{cases} e, & \\ g, & \text{άτοπο αφού πρέπει} \quad g = e \end{cases}$

Παρατηρήσεις που προκύπτουν από την ομάδα G_2:

- Για κάθε στοιχείο μιας πεπερασμένης ομάδας θα πρέπει να υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$\overbrace{(g \circ g \ldots \circ g)}^{k-\text{φορές}} \quad \longleftrightarrow \quad g^k = e$$

  Το μικρότερο k που ικανοποιεί την σχέση αυτή λέγεται **τάξη** του στοιχείου g. Στην G_2 το g έχει τάξη 2.

- Ας συμβολίσουμε $g \circ G_2 = g \circ \{e, g\}$ τότε θα ισχύει:

$$g \circ G_2 = \{g \circ e, g \circ g\} = \{g, e\}$$

$$\Downarrow$$

Αναδιάταξη των στοιχείων της G_2!

- Μια πεπερασμένη ομάδα έχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων $\Rightarrow$ **Τάξη της ομάδας** $|G|$. Προφανώς $|G_2| = 2$.

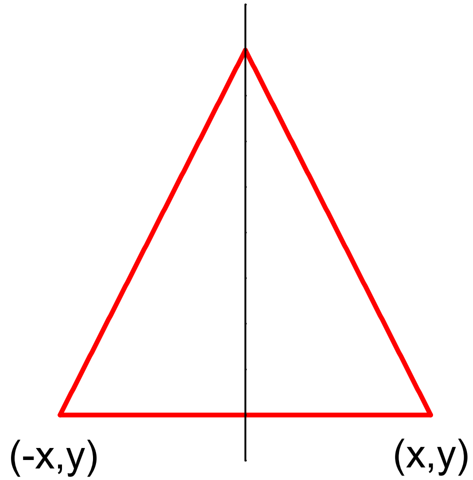
- Το στοιχείο e της G_2 αποτελεί από μόνο του ομάδα

$$\Downarrow$$

Υποομάδα της G_2 (η G_1).

Παράδειγμα υλοποίησης της ομάδας G_2

Ισοσκελές τρίγωνο



Αναλλοιότητα σε ανακλάσεις ως προς τον y-άξονα

$$G_2 \; = \; \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \, , \, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad ; \quad \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Αναπαράσταση με πίνακες των στοιχείων e, g.

Οι ιδιότητες μιας ομάδας συνοψίζονται στον **πίνακα πολλαπλασιασμού**:

G_2	e	g
e	e	g
g	g	e

Θεώρημα αναδιάταξης

Έστω $G = \{g_1,\ g_2,\ ....,\ g_N\}$ τότε ισχύει:

$$\forall\ g_i\ \in\ G:\ g_i\ \circ\ G\ =\ \{g_i\ \circ\ g_1,\ g_i\ \circ\ g_2, \ldots,\ g_i\ \circ\ g_N\}\ =\ G$$

Το γινόμενο $g_i\ \circ\ g_j$ με $j = 1,\ 2, \ldots,\ N$ παράγει N διαφορετικά στοιχεία που ανήκουν στο G. Πράγματι αν $g_j \neq g_k$ τότε είναι αδύνατον να ισχύει $g_i\ \circ\ g_j\ =\ g_i\ \circ\ g_k$ καθώς αν ίσχυε κάτι τέτοιο θα είχαμε:

$$g_i \circ g_j\ =\ g_i \circ g_k\ \Rightarrow\ g_i^{-1} \circ g_i \circ g_j\ =\ g_i^{-1} \circ g_i \circ g_k\ \Rightarrow\ g_j\ =\ g_k \text{ άτοπο}$$