ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Άσκηση 1

Μελετείστε την ομάδα συμμετρίας μετασχηματισμών (στροφές, καθρεπτισμοί) που αφήνουν αναλλοίωτο το τετράγωνο στο επίπεδο (x, y).

- Βρείτε το πίνακα πολλαπλασιασμού, τις υπάρχουσες υποομάδες, αναλλοίωτες υποομάδες και τις αντίστοιχες ομάδες πηλίκο.
- Βρείτε τις κλάσεις συζυγίας και τις διαστάσεις των μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων της ομάδας αυτής.
- Βρείτε τον πίνακα χαρακτήρων της ομάδας. Με ποιό υποσύνολο του S_4 είναι ισόμορφη η ομάδα αυτή;

Άσκηση 2

Η ομάδα D_n περιγράφει όλες τις συμμετρίες που αφήνουν αναλλοίωτο το κανονικό πολύγωνο τάξης n.

- Βρείτε τις διαστάσεις των μη ισοδύναμων, μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων της D_5 καθώς και τον αντίστοιχο πίνακα χαρακτήρων.
- Βρείτε μία μη αναγώγιμη αναπαράσταση της D_5 με διάσταση $d = 2$.
- Βρείτε τις υποομάδες, αναλλοίωτες υποομάδες και κλάσεις συζυγίας της D_5.
- Δώστε γεωμετρική ερμηνεία των κλάσεων συζυγίας της.

Άσκηση 3

Το CO_2 είναι ένα μόριο που προσεγγιστικά έχει μία γραμμική διάταξη. Στη θεμελιώδη του κατάσταση το άτομο C είναι στο κέντρο της απόστασης μεταξύ των 2 ατόμων O. Η αντίστοιχη ομάδα συμμετρίας V_4 αποτελείται από 4 στοιχεία: τον ταυτοτικό μετασχηματισμό (I), τον καθρεπτισμό ως προς τον άξονα κατα μήκος του μορίου, τον καθρεπτισμό ως προς άξονα κάθετο στη διεύθυνση του μορίου που περνάει από το άτομο C και τέλος την στροφή 180° γύρω από την τομή των δύο αξόνων καθρεπτικής συμμετρίας. Θεωρείστε μία περιγραφή του συστήματος όπου οι επίπεδες ταλαντώσεις των ατόμων που απαρτίζουν το μόριο περιγράφονται από ένα διάνυσμα $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ του $\mathbb{R}^6$.

- Βρείτε τη δράση των στοιχείων της V_4 στα ανύσματα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^6$ και από εκεί καθορίστε μία αναπαράσταση διάστασης $d = 6$ της ομάδας αυτής.
- Βρείτε την ανάλυση της αναπαράστασης αυτής σε μη ισοδύναμες, μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις.
- Βρείτε τον πίνακα χαρακτήρων της V_4.

Άσκηση 4

Έστω

$$g = \begin{pmatrix} u & -v^* \\ v & u^* \end{pmatrix} \quad ; \quad u, v \in \mathbb{C} \quad ; \quad |u|^2 + |v|^2 = 1$$

Δείξτε ότι $g \in \mathrm{SU}(2)$.

Δίνονται επίσης τα ανύσματα βάσης: $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ του $\mathbb{C}^2$ που μετασχηματίζονται με την δισδιάστατη αναπαράσταση $\Gamma^2(g) = g$ για κάθε $g \in \mathrm{SU}(2)$.

Βρείτε τα ανύσματα $\Gamma^2(g)|\uparrow\rangle$ και $\Gamma^2(g)|\downarrow\rangle$ ως γραμμικό συνδυασμό των $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$.

Θεωρείστε τώρα τον $\mathbb{C}^2 \bigotimes \mathbb{C}^2$ με βάση τα ανύσματα $|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \bigotimes |\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ και $|\downarrow\downarrow\rangle$ που μετασχηματίζονται με την $\Gamma^{2\bigotimes 2}(\mathrm{SU}(2))$.

- Αναπτύξτε τα ανύσματα $\Gamma^{2\bigotimes 2}|\uparrow\uparrow\rangle$, $\Gamma^{2\bigotimes 2}|\uparrow\downarrow\rangle$ κ.λ.π. στην ανωτέρω βάση.
- Δείξτε ότι το άνυσμα $|0,0\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$ μετασχηματίζεται με την μονοδιάστατη, τετριμμένη αναπαράσταση $\Gamma^1(\mathrm{SU}(2))$ ενώ τα ανύσματα $|1,1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$, $|1,0\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$, $|1,-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$ μετασχηματίζονται με την τρισδιάστατη αναπαράσταση $\Gamma^3(\mathrm{SU}(2))$, ενώ ισχύει $\Gamma^{2\bigotimes 2} = \Gamma^1 \bigoplus \Gamma^3$.

Άσκηση 5

Χρησιμοποιώντας την τεχνική των διαγραμμάτων Young να βρεθούν οι κλάσεις συζυγίας και η τάξη (αριθμός στοιχείων) τους για την ομάδα συμμετρίας S_4 (μεταθέσεις 4 αντικειμένων).

Άσκηση 6

Έστω σωμάτιο εγκλωβισμένο σε διδιάστατο πηγάδι δυναμικού ακαθορίστου σχήματος. Οι ιδιοκαταστάσεις του περιγράφονται είτε από τις ιδιοσυναρτήσεις:

$$\Psi^{(1)}_{m,n}(x,y) = C_{m,n}\left[\cos(\frac{2\pi m x}{a})\sin(\frac{2(2n+m)\pi y}{\sqrt{3}a}) - \cos(\frac{2\pi n x}{a})\sin(\frac{2(2m+n)\pi y}{\sqrt{3}a}) - \cos(\frac{2\pi(m+n)x}{a})\sin(\frac{2(n-m)\pi y}{\sqrt{3}a})\right]$$

με $m = 0, 1, 2, ..,$ $n = m+1, m+2, ...,$ $C_{m,n}$ σταθερά κανονικοποίησης, είτε από τις ιδιοσυναρτήσεις:

$$\Psi^{(2)}_{m,n}(x,y) = \tilde{C}_{m,n}\left[\sin(\frac{2\pi m x}{a})\sin(\frac{2(2n+m)\pi y}{\sqrt{3}a}) - \sin(\frac{2\pi n x}{a})\sin(\frac{2(2m+n)\pi y}{\sqrt{3}a}) + \sin(\frac{2\pi(m+n)x}{a})\sin(\frac{2(n-m)\pi y}{\sqrt{3}a})\right]$$

με $m = 1, 2, ..,$ $n = m+1, m+2, ...$ και $\tilde{C}_{m,n}$ σταθερά κανονικοποίησης. Το a είναι σταθερά με διαστάσεις μήκους. Υπάρχει μία ακόμη κατηγορία ιδιοκαταστάσεων που δεν χρειάζεται να σας απασχολήσει εδώ.

- Να δειχθεί ότι οι ανωτέρω κυματοσυναρτήσεις μηδενίζονται για $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ και $y = \sqrt{3}(a - x)$ και κατόπιν να προσδιορισθεί επακριβώς το δυναμικό του πηγαδιού και να αποδοθεί σε ένα σχήμα.

- Να προσδιορισθεί η Χαμιλτονιανή ομάδα του προβλήματος και να καταγραφούν οι μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της καθώς και ο αντίστοιχος πίνακας χαρακτήρων. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε υπολογισμούς που έχουμε κάνει στο μάθημα.

- Να προσδιορισθεί το ενεργειακό φάσμα των ανωτέρω ιδιοκαταστάσεων και να μελετηθεί ως προς τον εκφυλλισμό του.

- Τέλος να προσδιορισθεί σε ποιές αναπαραστάσεις (όχι υποχρεωτικά μη αναγώγιμες) της Χαμιλτονιανής ομάδας ανήκουν οι ανωτέρω ιδιοκαταστάσεις.

Άσκηση 7

Έστω η ομάδα G που ορίζεται από τις γεννήτριες σχέσεις:

$$\{a, b | a^6 = e, b^2 = a^3, aba = b\}$$

με a, b στοιχεία της ομάδας.

- Να βρεθούν οι τάξεις συζυγίας της ομάδας.
- Να εξετασθεί αν οι υποομάδες:

$$\mathbb{Z}_2 = \{e, a^3\} \ ; \ \mathbb{Z}_3 = \{e, a^2, a^4\} \ ; \ \mathbb{Z}_4 = \{e, b, b^2, b^3\}$$

  είναι κανονικές (αναλλοίωτες).
- Να βρεθεί η ομάδα πηλίκο $G/\mathbb{Z}_3$ όπου η $\mathbb{Z}_3$ έχει καθορισθεί στο προηγούμενο ερώτημα.
- Να ελεγχθεί ποιές από τις ακόλουθες αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες:

$$D_1(a) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix} \quad ; \quad D_1(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2(a) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} \quad ; \quad D_2(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_3(a) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} \quad ; \quad D_3(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_4(a) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & i\sin(\frac{\pi}{3}) \\ i\sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \quad ; \quad D_4(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 8

Να δείξετε την ισχύ του μεγάλου θεωρήματος ορθογωνιότητας για την αναπαράσταση της ομάδας $\mathbb{Z}_3$ (κυκλική τάξης 3) που καθορίζεται από τον πίνακα:

$$D(g) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$