

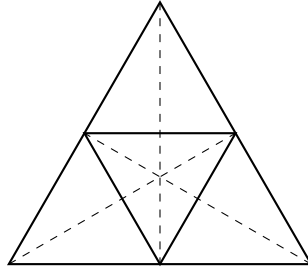
# ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

## Ενδεικτικές ασκήσεις

1.) Δίνεται ο πίνακας:  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- Ναδειχθεί ότι ο  $\mathbf{R}$  αποτελεί στοιχείο της  $SO(2)$ , να βρεθεί η γωνία στροφής και κατόπιν να προσδιοριστεί η κυκλική ομάδα που παράγεται από τον  $\mathbf{R}$ .
- Να βρεθούν οι υποομάδες, οι κλάσεις συζυγίας της κυκλικής αυτής ομάδας. Κατόπιν χρησιμοποιώντας τις κανονικές υποομάδες να προσδιοριστούν οι αντιστοιχες ομάδες-πηλίκο. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία τους;
- Να βρεθούν οι μη αναγώγιμες αναπαράστασεις της κυκλικής ομάδας που παράγει ο  $\mathbf{R}$  γράφοντας τον πίνακα χαρακτήρων της. Ποια είναι η διάσπαση του  $\mathbf{R}$  σε μη αναγώγιμες αναπαράστασεις αυτής της κυκλικής ομάδας.

2.) Ένα ισόπλευρο τρίγωνο χωρίζεται σε 4 ίσα μεταξύ τους (σε μέγεθος) μικρότερα ισόπλευρα τρίγωνα:



Χρησιμοποιώντας  $q$  χρώματα βάφουμε κάθε μικρό τρίγωνο. Πόσοι διαφορετικοί χρωματισμοί του μεγάλου τριγώνου μπορούν να σχηματισθούν; Χρησιμοποιείστε το λήμμα του Burnside για τον προσδιορισμό αυτού του αριθμού.

3.) Δίνεται το διάγραμμα Feynman:



Σε κάθε εξωτερική κορυφή μπορεί να βρεθεί ένα σωματίο με εσωτερικό φορτίο  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Χρησιμοποιώντας το λήμμα Burnside να υπολογίσετε τον αριθμό διαφορετικών διαγραμμάτων που μπορούν να προκύψουν από την αντιστοίχιση του εσωτερικού φορτίου στις εξωτερικές κορυφές.