

Κύρια σημεία διαλέξεων Μη Γραμμικής Δυναμικής 2026

Π. Ι., Θ.Α., Φ. Χ.

28 Μαρτίου 2026

Διάλεξη 1- Πέμπτη 12/2

1. Δυναμικά συστήματα είναι μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν πως εξελίσσονται με τον χρόνο οι καταστάσεις που χαρακτηρίζουν το σύστημα. Μακροβιανά συστήματα είναι αυτά στα οποία οι μελλοντικές καταστάσεις του συστήματος για χρόνους $t \geq t_0$ εξαρτώνται μόνο από την κατάσταση του συστήματος στον χρόνο t_0 (αυτό ισχύει για κάθε t_0). Τα θεμελιώδη φαινόμενα στη φυσική περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις οι οποίες χ.ε.γ. (χωρίς έλλειψη της γενικότητας) μπορούν να θεωρηθούν ως πρωτοτάξιες διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες και ορίζουν μακροβιανά δυναμικά συστήματα. Δυναμικά συστήματα ορίζονται και από αναδρομικές σχέσεις (απεικονήσεις) π.χ. το δυναμικό σύστημα $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, το οποίο δεν είναι μακροβιανό.
2. Ενώ στα μαθηματικά η έννοια της γραμμικότητας ενός τελεστή έχει σαφές νόημα, η έννοια του γραμμικού δυναμικού συστήματος είναι ασαφής διότι εξαρτάται από την επιλογή των μεταβλητών. Π.χ. ο αρμονικός ταλαντωτής με μεταβλητή τη θέση x διέπεται από τη γραμμική εξίσωση $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, αν όμως λάβουμε ως μεταβλητή την $y = x^2$ το δυναμικό σύστημα με μεταβλητή την y δεν είναι πλέον γραμμικό. Σε τι αναφερόμαστε λοιπόν όταν λέμε ότι έχουμε μη γραμμική δυναμική; Αναφερόμαστε στα φαινόμενα που προκαλούνται από την αλληλεπίδραση καταστάσεων. Αυτές οι αλληλεπιδράσεις είναι που καθορίζουν τη διαμόρφωση των καταστάσεων ισορροπίας και τις οργανωμένες δομές που εμφανίζονται στη φύση.
3. Πειραματικά η μη γραμμικότητα ενός συστήματος ελέγχεται με τον κατά πόσον ικανοποιείται η υπέρθεση των διαφόρων λύσεων του συστήματος. Π.χ. το δυναμικό σύστημα που περιγράφει τη κίνηση σωματιδίου που κινείται ελεύθερα σε ένα διάστημα με ελαστικά ανακλώμενα τοιχώματα δεν είναι γραμμικό.
4. Γενικά τα μόνα συστήματα που μπορούν να λυθούν είναι τα γραμμικά. Αν η μεταβλητή είναι η $N \times 1$ κατάσταση ψ , και το δυναμικό σύστημα είναι το $\dot{\psi} = \mathbf{A}\psi$, όπου \mathbf{A} πίνακας $N \times N$, και αν στον χρόνο $t = 0$ η κατάσταση του συστήματος είναι $\psi(0)$ στον χρόνο t θα

27 είναι $\psi(t) = e^{At}\psi(0)$, όπου $e^{At} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}t^2/2! + \dots$ ή $e^{At} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{I} + \mathbf{A}t/n)^n$. Αυτό
28 σημαίνει ότι οι καταστάσεις του συστήματος t μονάδες το χρόνου αργότερα συνδέονται
29 με τις αρχικές καταστάσεις με ένα γραμμικό μετασχηματισμό, ο πίνακας του οποίου
30 είναι ο $\Phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{At}$ έτσι ώστε $\Phi(t) : \psi(0) \rightarrow \psi(t)$. Ο $\Phi(t)$ λέγεται διαδότης (propagator) του
31 συστήματος. Όταν γνωρίζουμε τον διαδότη γνωρίζουμε την εξέλιξη του συστήματος.

32 5. Αν ξέρουμε ότι ένα σύστημα είναι γραμμικό και ξέρουμε ότι η διάστασή του είναι N τότε
33 κάνοντας προωθήσεις N καταλλήλως επιλεγμένων αρχικών καταστάσεων κατά χρόνο
34 t και παρατηρώντας το αποτέλεσμα μπορούμε να υπολογίσουμε τον διαδότη και λαμβάνοντας τον
35 λογάριθμό του διαδότη να προσδιορίσουμε τον πίνακα \mathbf{A} , που ονομάζεται
36 γεννήτορας (generator) της δυναμικής.

37 6. Σημείο ισορροπίας του δυναμικού συστήματος $\dot{x} = v(x)$ είναι η κατάσταση x_e , όταν είναι
38 $v(x_e) = 0$. Και αυτό διότι αν $x(0) = x_e$ ή $x(t) = x_e$, για κάθε t , είναι λύση του δυναμικού
39 συστήματος. Βεβαίως, αυτό προϋποθέτει ότι η λύση του δυναμικού συστήματος $\dot{x} = v(x)$
40 με αρχική συνθήκη $x(0) = x_e$ είναι μοναδική, κάτι που είναι βέβαιο μεν σε συστήματα
41 που περιγράφουν ορθά φυσικά φαινόμενα, αλλά δεν είναι βέβαιο σε αφηρημένα μαθη-
42 ματικά δυναμικά συστήματα. Π.χ. το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, $x(0) = 0$ έχει
43 άπειρες άλλες λύσεις εκτός από την $x(t) = 0$.

44 7. Εν γένει οι λύσεις των δυναμικών συστημάτων ισχύουν μόνο για περιορισμένα χρονικά
45 διαστήματα. Π.χ. η λύση του δυναμικού συστήματος $\dot{x} = 1 + x^2$ με $x(0) = 0$, $x(t) = \tan(t)$
46 ισχύει μόνο στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$, ενώ η λύση του $\dot{x} = x^2$ με $x(0) = 1/a$ που είναι
47 $x = 1/(a - t)$ ισχύει μόνο στο διάστημα (a, ∞) , εφόσον $a < 0$. Γενικά τα μόνα δυναμικά
48 συστήματα των οποίων οι λύσεις ισχύουν για όλους του χρόνους είναι τα γραμμικά συ-
49 στήματα, όλα τα άλλα εν γένει έχουν λύσεις που δεν επεκτείνονται σε όλους τους χρό-
50 νους, εκτός αν περιγράφουν ορθά φυσικά φαινόμενα.

51 8. Εν γένει οι μόνες διαφορικές εξισώσεις που μπορούν να λυθούν είναι οι γραμμικές εξι-
52 σώσεις (και αυτές βέβαια που με αλλαγή μεταβλητής μετατρέπονται σε γραμμικές). Συ-
53 νεπώς αναγκαστικά οι λύσεις των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων προσδιορίζο-
54 νται με αριθμητικές ολοκληρώσεις. Αν έχω το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = v(x)$ με $x(0) = x_0$
55 τότε όλοι οι όροι του αναπτύγματος Taylor $x(t) = x(0) + t\dot{x}(0) + t^2\ddot{x}(0)/2! + \dots$ προσ-
56 διορίζονται και αν η σειρά συγκλίνει προσδιορίζεται και η λύση. Αριθμητικά επιτυγχά-
57 νεται προσέγγιση της λύσης κάνοντας καταλλήλως χρονικά μικρά βήματα και αντικα-
58 θιστώντας την εξέλιξη του δυναμικού συστήματος με την αναδρομική σχέση: $x_{n+1} =$
59 $x_n + v(x_n)$, $n = 1, 2, \dots$ με $x_1 = x_0$ και $x_n = x(t_n)$, $x_{n+1} = x(t_n + \delta)$, όπου δ το χρονικό
60 βήμα. Η μεθοδος αυτή ολοκλήρωσης ονομάζεται forward Euler.

- 61
- 62 1. Για να έχει το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = v(x)$, $x(0) = x_0$, μοναδική λύση για χρόνους $|t| < M$
 63 όταν το x_0 δεν είναι σημείο ισορροπίας απλώς απαιτείται η συνέχεια της ταχύτητας $v(x)$.
 64 Αν όμως το x_0 είναι σημείο ισορροπίας η μοναδικότητα εξασφαλίζεται αν ο χρόνος για
 65 να φτάσει στο σημείο ισορροπίας από κάποιο μη σημείο ισορροπίας (είτε ολοκληρώνο-
 66 ντας θετικά ή αρνητικά στον χρόνο) είναι άπειρος. Τότε η λύση με αρχική συνθήκη το
 67 σημείο ισορροπίας είναι μοναδική. Αυτό ικανοποιείται αν η $v(x)$ συνάρτηση είναι διαφο-
 68 ρίσιμη. Μια ασθενέστερη συνθήκη που βεβαιώνει ότι το σημείο ισορροπίας προσεγγίζε-
 69 ται σε άπειρο χρόνο είναι η $v(x)$ να είναι Lipschitz, δηλαδή να υπάρχει σταθερά k έτσι
 70 ώστε να ικανοποιείται η $|v(x) - v(y)| < k|x - y|$, για x και y σε μία περιοχή. Αν η $v(x)$
 71 είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο θα είναι και Lipschitz, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει,
 72 π.χ. η $v(x) = |x|$ είναι Lipschitz στο $x = 0$ αλλά δεν είναι διαφορίσιμη σε αυτό το ση-
 73 μείο (όμως η συνθήκη Lipschitz συνεπάγεται προφανώς τη συνέχεια). Είναι εύκολο να
 74 δει κανείς ότι η συνθήκη Lipschitz συνεπάγεται ότι ο χρόνος για να φτάσει στο σημείο
 75 ισορροπίας είναι άπειρος, διότι αν χ.ε.γ. το $x = 0$ είναι σημείο ισορροπίας και επειδή η
 76 $v(x)$ είναι Lipschitz θα είναι $|v(x)| < k|x|$, δηλαδή η ταχύτητα είναι μικρότερη από τη
 77 γραμμική και επειδή με γραμμικά μεταβαλλόμενη ταχύτητα απαιτείται άπειρος χρό-
 78 νος να φτάσει στο σημείο ισορροπίας συνεπάγεται ο χρόνος για να φτάσει κανείς στο
 79 σημείο ισορροπίας με ταχύτητα $v(x)$ είναι και αυτός άπειρος. Αν η συνάρτηση δεν είναι
 80 Lipschitz τότε η λύση μπορεί να μη είναι μοναδική π.χ. η $v(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι Lipschitz
 81 και η $\dot{x} = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, με $x(0) = 0$ δεν έχει μοναδική λύση. Αλλά όταν δεν είναι Lipschitz
 82 μπορεί η λύση να είναι μοναδική, π.χ. η $\dot{x} = v(x)$ ορισμένη στην ημιευθεία $x \geq 0$
 83 με $v(x) = x \log(K/x)$ όταν $x > 0$ και $v(x) = 0$ όταν είναι $x = 0$ δεν είναι Lipschitz αλλά
 84 έχει μοναδική λύση: μόνο την $x(t) = 0$ όταν $x(0) = 0$.
- 85 2. Το δυναμικό σύστημα που εξαρτάται και από την παράμετρο a : $\dot{x} = v(x, a)$ με $x(0) = x_0$
 86 θα έχει λύση τη συνάρτηση $x(t, x_0, a)$. Η λύση $x(t, x_0, a)$ θα είναι συνεχής συνάρτηση της
 87 x_0 αν η $v(x, a)$ είναι Lipschitz ως προς x και θα είναι συνεχής συνάρτηση της παραμέτρου
 88 αν η $v(x, a)$ είναι συνεχής συνάρτηση της παραμέτρου. Αυτή είναι ιδιαίτερος σημαντική
 89 ιδιότητα.
- 90 3. Η λύση του δυναμικού συστήματος $\dot{x} = v(x)$ με $x(0) = x_0$ είναι τυπικά η $x(t) = x_0 +$
 91 $\int_0^t ds v(x(s))$. Γράφω τις αναδρομικές σχέσεις $x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t ds v(x_n(s))$ για $n = 1, 2, \dots$
 92 με $x_1(t) = x_0$. Αν η ακολουθία συναρτήσεων $x_n(t)$ συγκλίνει, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$, τότε
 93 η $x(t)$ είναι η λύση του δυναμικού συστήματος. Η επαναληπτική αυτή κατασκευή της
 94 λύσης του δυναμικού συστήματος ονομάζεται Picard-Lindelöf. Αυτή είναι μιά διαταρα-
 95 κτική μέθοδος προσδιορισμού της λύσης που στη Φυσική είναι πολύ χρήσιμη παράγο-
 96 ντας τη σειρά Born-Oppenheimer.

- 97 4. Γραφική λύση της $\dot{x} = v(x)$ (βλ. Strogatz). Όταν το x λαμβάνει τιμές στην ευθεία το σύ-
 98 στημα θα καταλήξει αναγκαστικά σε κάποιο σημείο ισορροπίας (αν δεν απειριοστεί). Έτσι
 99 χαρακτηρίζονται πλήρως τα μονοδιάστατα συστήματα επί της ευθείας: καταλήγουν σε
 100 σημεία ισορροπίας.
- 101 5. Αν τα γράψουμε στη μορφή $dx/dt = -dV/dx$ όπου $V(x)$ ένα δυναμικό, βλέπουμε ότι
 102 οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν Αριστοτέλεια δυναμική. Μάλιστα επειδή η τιμή του δυ-
 103 ναμικού κατά την εξέλιξη του συστήματος είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου, διότι
 104 $dV/dt = (dV/dx)(dx/dt) = -(dx/dt)^2 \leq 0$, το σύστημα καταλήγει ασυμπτωτικά στα
 105 ευσταθή ελάχιστα του δυναμικού αν αρχικά δεν ήταν σε σημείο ισορροπίας (σε ολοκλη-
 106 ρώσεις πίσω στον χρόνο καταλήγει βέβαια σε ασταθές μέγιστο του δυναμικού).
- 107 6. Στην forward Euler ολοκλήρωση του δυναμικού συστήματος του αρμονικού ταλαντωτή
 108 $\dot{x} = \mathbf{A}x$ με $x(0) = x_0$ και γεννήτορα της δυναμικής

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

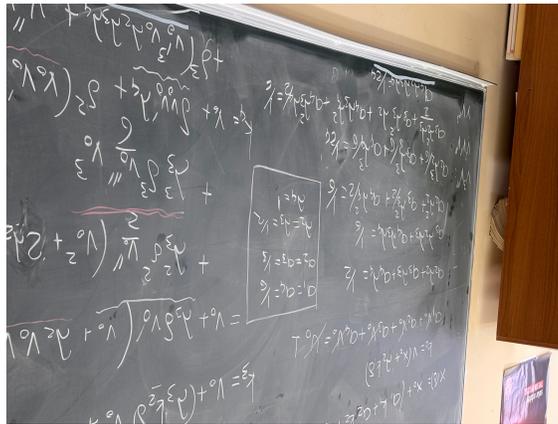
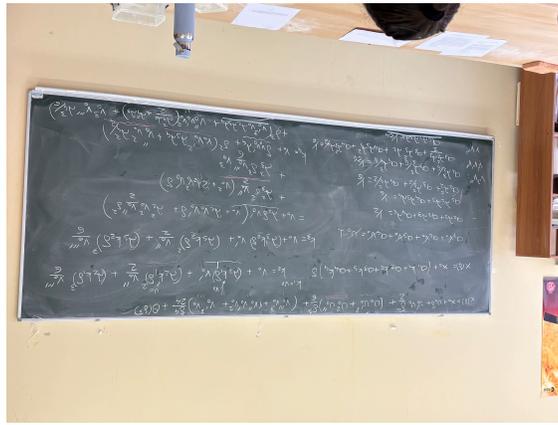
109 το συνεχές σύστημα μετατρέπεται στην αναδρομική σχέση $x_{n+1} = x_n + \delta \mathbf{A}x_n = (\mathbf{I} +$
 110 $\delta \mathbf{A})x_n$ $n = 1, 2, \dots$, $x_1 = x_0$, όπου \mathbf{I} ο μοναδιαίος πίνακας και δ το χρονικό βήμα. Η λύση
 111 είναι βεβιαία $x_{n+1} = (\mathbf{I} + \delta \mathbf{A})^n x_1$ (γεωμετρική σειρά) η οποία αναγκαστικά απειρίζεται
 112 για οποιοδήποτε χρονικό βήμα με ρυθμό $(\sqrt{1 + \delta^2})^n$, δεδομένου ότι η απόλυτη τιμή των
 113 ιδιοτιμών του πίνακα $\mathbf{I} + \delta \mathbf{A}$ είναι $\sqrt{1 + \delta^2} > 1$. Η αστάθεια αυτή μπορεί να αποτραπεί
 114 με backward Euler ολοκλήρωση $x_{n+1} = x_n + \mathbf{A}x_{n+1}$.

115 [Διάλεξη 3-4- Πέμπτη, 19/2. Παρασκευή, 20/2](#)

- 116 1. Διακλαδώσεις: Strogatz-1994: 3.4 (p. 55-61)
- 117 2. Απεικονίσεις: Strogatz-1994: 10.0,10.1 (p. 348-352)
- 118 3. Το παράδειγμα που έκανα της απεικόνισης Poincaré στην χρονοεξαρτώμενη αλίευση
 119 είναι από το βιβλίο των Hirsch-Smale-Devaney 1.3,1.4,1.5 (p. 7-15), που ανάρτησα στα βι-
 120 βλία.

121 [Διάλεξη 5- Τρίτη, 24/2](#)

- 122 1. Διακλάδωση θέσης ισορροπίας χάντρας σε περιστρεφόμενη στεφάνη. Μετάβαση από
 123 Νευτώνεια σε Αριστοτέλεια μηχανική: Strogatz-1994: 3.45 (p. 61-69)
- 124 2. Μονοδιάστατα δυναμικά συστήματα στον κύκλο. Το φαινόμενο του συγχρονισμού : Strogatz-
 125 1994: 4.0-4.5 (p. 93-106)



126 3. Παράδειγμα συγχρονισμού: <https://www.youtube.com/watch?v=Aaxw4zbULMs>

127 Διάλεξη 5- Παρασκευή, 27/2

128 1. Αναλυτική παρουσίαση κατασκευής αριθμητικών ολοκληρώσεων που μπορούν να πε-
129 τύχουν ακρίβεια $O(\delta^4)$. Μέθοδος Runge-Kutta 4 (Strogatz-1994 2.8 p. 32-36) και Feynman.

130 Διάλεξη 6- Παρασκευή, 6/3

131 Ανάλυση Φουριερ σε διακριτό πλέγμα και περιοδικό χωρίο. Εφαρμογή στη διαδοση κύμα-
132 τος σε μέσο με διασπορά. Διαβάστε για την ανάλυση Φουριερ από το βιβλίο Trefethen (το έχω
133 ανεβάσει στα βιβλία) Κεφ. 2 σ. 9-11, Κεφ. 3 σ. 17-19. Επίσης έχω αναρτήσει στις Σημειώσεις
134 ένα δικό μου κείμενο για την ανάλυση Φουριερ σε πλέγματα.

135 Διάλεξη 7- Παρασκευή, 13/3

136 Strogatz 1994 Κεφ. 5

137 Κανονική μορφή 2×2 πίνακα που έχει μία μόνο ιδιοτιμή λ . Θα δείξουμε ότι ο πίνακας είναι
138 όμοιος με έναν από τους πίνακες

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

139 Ο \mathbf{A}_1 αντιστοιχεί στη περίπτωση όπου υπάρχει πλήρης βάση ιδιοκαταστάσεων που καλύ-
 140 πτουν τον διδιάστατο χώρο. Τότε μάλιστα αν x και y είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες ιδιοκα-
 141 ταστάσεις με ιδιοτιμή λ τότε κάθε διάνυσμα του χώρου θα είναι και αυτό ιδιοκατάσταση με
 142 ιδιοτιμή λ . Αν δε λάβουμε τον πίνακα $\mathbf{U} = [x, y]$ με κολώνες τα δύο αυτά διανύσματα, τότε
 143 επειδή $\mathbf{A}[x, y] = [\mathbf{A}x, \mathbf{A}y] = [x, y]\mathbf{\Lambda}$, με $\mathbf{\Lambda} = \lambda\mathbf{I}$ (\mathbf{I} ο μοναδιαίος) τον διαγώνιο πίνακα των
 144 ιδιοτιμών, τότε θα είναι

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}_1 .$$

145 Ας έρθουμε τώρα στη δεύτερη πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση όταν δεν έχουμε πλήρη βάση
 146 ιδιοκαταστάσεων, δηλαδή υπάρχει μόνο ένα διάνυσμα x που να είναι ιδιοκατάσταση του
 147 \mathbf{A} , δηλαδή μόνο ένα διάνυσμα ικανοποιεί την $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})x = 0$, με ιδιοτιμή $\lambda = T/2$ όπου
 148 $T = \text{trace}(\mathbf{A})$. Πρώτα ας δείξουμε ότι υπάρχει αναγκαστικά μία ιδιοκατάσταση x . Αυτό βέ-
 149 βαια είναι προφανές διότι στην ιδιοτιμή $\lambda = T/2$ που προσδιορίστηκε ως λύση του χαρακτη-
 150 ριστικού πολυωνύμου αντιστοιχεί και ένα διάνυσμα x που θα είναι η αντιστοιχούσα ιδιοκατά-
 151 σταση. Ένας άλλος πιο ενδιαφέρον τρόπος να το δείτε αυτό είναι ο εξής: το χαρακτηριστικό
 152 πολυώνυμο στην περίπτωση αυτή είναι $(\lambda - T/2)^2 = 0$. Το θεώρημα Cayley-Hamilton απο-
 153 δεικνύει ότι και ο πίνακας \mathbf{A} ικανοποιεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, άρα ισχύει ότι
 154 $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2 = 0$ (το $\lambda = T/2$ τώρα είναι η τιμή της ιδιοτιμής και όχι η μεταβλητή του χαρα-
 155 κτηριστικού πολυωνύμου). Επιλέγουμε ένα τυχαίο διάνυσμα z . Αν είμαστε τυχεροί και είναι
 156 $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})z = 0$ τότε το z είναι η ιδιοκατάσταση x που ζητούσαμε. Αν δεν είμαστε τυχεροί και
 157 είναι $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})z \neq 0$ τότε το $x = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})z$ είναι αναγκαστικά ιδιοκατάσταση του \mathbf{A} διότι είναι
 158 $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})x = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2z = 0$. Επομένως υπάρχει διάνυσμα x που ικανοποιεί την

$$\mathbf{A}x = \lambda x , \tag{2}$$

159 αλλά δεν υπάρχει άλλο. Τώρα αν λάβω μία οποιαδήποτε άλλη γραμμικά ανεξάρτητη με το x
 160 κατάσταση z και δράσω πάνω στο z με τον \mathbf{A} , τότε υποστηρίζω ότι θα είναι αναγκαστικά

$$\mathbf{A}z = \mu x + \lambda z, \quad \mu \neq 0 . \tag{3}$$

161 Συνεπώς αν λάβω το διάνυσμα $y = z/\mu$ θα έχω

$$\mathbf{A}y = x + \lambda y . \tag{4}$$

162 Πράγματι, εφόσον το z είναι γραμμικά ανεξάρτητο από το x θα είναι $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})z \neq 0$, αλλά το
 163 $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})z$ όπως είδαμε είναι ιδιοκατάσταση του \mathbf{A} , και συνεπώς πρέπει να είναι πολλαπλάσιο
 164 του x , που είναι η μοναδική ιδιοκατάσταση, δηλαδή είναι $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})z = \mu x$, $\mu \neq 0$ και έτσι έχει

165 αποδειχθεί η (3). Τώρα οι (2), (4) ορίζοντας $\mathbf{U} = [x, y]$ μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Ay} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix},$$

166 και επομένως είναι

$$\mathbf{AU} = [\mathbf{Ax}, \mathbf{Ay}] = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

167 Καταλήγουμε έτσι ότι ο πίνακας \mathbf{A} είναι όμοιος με τον πίνακα Jordan \mathbf{A}_2 .

168 [Διάλεξη 8- Παρασκευή, 20/3](#)

169 Ευστάθεια ασυμπτωτική και ευστάθεια κατά Lyapunov. Χαρακτηριστικός εκθέτης Lyapunov:
170 οι πολυωνμικές αυξήσεις έχουν μηδενικό εκθέτη Lyapunov.

171 [Διάλεξη 9- Τρίτη, 24/3](#)

172 Νόμοι διατήρησης. Διατύπωση της ταχύτητας ομάδας των Landau, Whitham, Lighthill. KPP
173 - μοντέλο για διερεύνηση δυνατότητας ειρηνικής συνύπαρξης. Κεφάλαιο 6 Strogatz.

174 Παραθέτω μερικές σημειώσεις:

Νόμοι διατήρησης σε πεδία

175 Στη κλασσική μηχανική των σωματιδίων ορίσαμε διατηρήσιμες ποσότητες όπως την ενέρ-
176 γεια, ορμή, κ.λ.π. τις ποσότητες, $Q(t)$, που δεν μεταβάλλονται κατά τη χρονική εξέλιξη του
177 συστήματος, και που ικανοποιούν δηλαδή

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (5)$$

178 Στη μηχανική αυτές οι μεταβλητές του συστήματος, θέσεις και ορμές, καθώς και κάθε ποσό-
179 τητα που σχηματίζεται από αυτές είναι συναρτήσεις μόνο του χρόνου κατά τη χρονική εξέ-
180 λιξη του συστήματος.

181 Στη μηχανική των πεδίων οι μεταβλητές είναι συναρτήσεις και του χρόνου και των χω-
182 ρικών διαστάσεων. Ας θεωρήσουμε ότι το πεδίο εκτείνεται σε μία χωρική διάσταση, είναι δη-
183 λαδή ένα πεδίο 1-διάστασης, π.χ. το φυσικό σύστημα να είναι μία χορδή που εκτελεί εγκάρσιες
184 ταλαντώσεις πλάτους $\eta(x, t)$. Υπό αυτή την έννοια η μηχανική των σωματιδίων είναι μηχαν-
185 νική πεδίων 0-διάστασης.

186 Πως μπορούμε να περιγράψουμε το νόμο διατήρησης σε αυτό το πεδίο; Θα μπορούσαμε
187 να πούμε ότι κατά την κίνηση η ποσότητα $Q(t) = \int_{\mathcal{D}} dx q(x, t)$, όπου \mathcal{D} το χωρίο του καταλαμ-
188 βάνεται από το πεδίο, είναι χρονικά σταθερή. Η ποσότητα αυτή λέγεται το συνολικό "φορτίο"
189 (ή φορτίο Noether). Ένας όμως τέτοιος καθολικός (global) νόμος διατήρησης δεν είναι ικανο-
190 ποιητικός διότι τέτοιος νόμος διατήρησης δεν περιγράφει τη διατήρηση των ποσοτήτων όπως

191 εξελίσσονται χωροχρονικά. Π.χ. θεωρήστε το πεδίο φορτίου $q(x, t)$:

$$q(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{for } t \leq 0 \\ \alpha\delta(x - x_1) - \alpha\delta(x - x_2), & \text{for } t > 0. \end{cases}$$

192 Ενώ το Q του πεδίου αυτού διατηρείται είναι εμφανές ότι ο νόμος αυτός διατήρησης δεν συνε-
193 πάγεται τη διατήρηση της ποσότητας αυτής σε τοπικό επίπεδο, δεδομένου ότι στην περίπτωση
194 αυτή ξαφνικά δημιουργούνται φορτία στα σημεία x_1 και x_2 . Είναι εμφανές δηλαδή ότι ένας
195 καθολικός νόμος διατήρησης, όπως αυτός του συνολικού φορτίου Q δεν περιγράφει ικανοποι-
196 ητικά τη διατήρηση ποσοτήτων στα πεδία. Οι νόμοι διατήρησης στα πεδία πρέπει να έχουν
197 τοπική διατύπωση και απαιτούν για τη διατύπωσή τους δύο πεδία: την πυκνότητα της διατη-
198 ρήσιμης ποσότητας $q(x, t)$ και τη ροή της διατηρήσιμης ποσότητας $f(x, t)$, τα οποία πρέπει να
199 ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

200 Η εξίσωση συνέχειας είναι η διατύπωση του νόμου διατήρησης του πεδίου. Ο τοπικός αυτός
201 νόμος διατήρησης βεβαιώνει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ποσότητας $\int_a^b dx q(x, t)$ στο χωρίο
202 $[a, b]$, για κάθε $a < b$, είναι ίσος με τον ρυθμό f με τον οποίον το q εισέρχεται στο σύνορο a και
203 εξέρχεται στο σύνορο b , δηλαδή είναι:

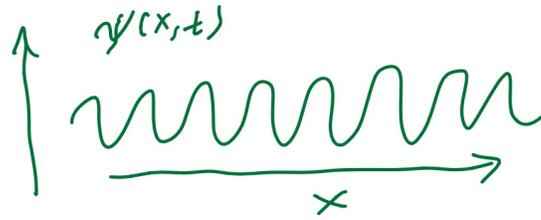
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b dx q(x, t) = f(a, t) - f(b, t). \quad (7)$$

204 Η διατύπωση του νόμου διατήρησης στην ολοκληρωτική μορφή είναι ισχυρότερος διότι απαι-
205 τεί μόνο την ολοκληρωσιμότητα των συναρτήσεων q και f , άλλως οι (6) και (7) είναι ισοδύνα-
206 μες διατυπώσεις. Βεβαίως, ο τοπικός νόμος διατήρησης (6) συνεπάγεται τον καθολικό (5) (με
207 κατάλληλες συνοριακές συνθήκες), ενώ όπως είδαμε δεν ισχύει το αντίστροφο.

208 Το συναφές πεδίο f προσδιορίζεται από το φυσικό πρόβλημα. Εάν το πεδίο είναι η πυ-
209 κνότητα ενός ρευστού που κινείται με ταχύτητα $v(x, t)$ τότε η διατήρηση της μάζας απαιτεί
210 το $f = \rho v$. Σε άλλες περιπτώσεις το f προσδιορίζεται από τις εξισώσεις του πεδίου και ένας
211 συστηματικός τρόπος προσδιορισμού της πυκνότητας q και f γίνεται μέσω του θεωρήματος
212 της Noether που έχετε δει για πεδία 0-διάστασης. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να προσδιορί-
213 σουμε το νόμο διατήρησης της ενέργειας, ορμής κλπ μίας χορδής ή του ηλεκτρομαγνητικού
214 πεδίου.

Ταχύτητα ομάδας

215 Θεωρήστε μονοδιάστατο πεδίο $\psi(x, t)$ που εμφανίζει κορυφώσεις, όπως στο Σχήμα 1, οι
216 οποίες έχουν δεδομένη κατεύθυνση κίνησης, έστω τη θετική. Θεωρούμε ότι ο κυματισμός του



Σχήμα 1

217 πεδίου είναι πολύ πυκνός ώστε να μπορούμε να ορίσουμε ως συνεχείς μεταβλητές τον αριθμό
 218 των κορυφών του πεδίου ανά cm , $k(x, t)$, και τον αριθμό των κορυφών ανά second, $\omega(x, t)$, που
 219 περνούν προς τη θετική κατεύθυνση από το σημείο x . Θεωρούμε επίσης ότι οι κορυφές πα-
 220 ραμένουν κορυφές, ούτε διασπώνται, ούτε δημιουργούνται, ούτε εξαφανίζονται, έτσι ώστε ο
 221 αριθμός των κορυφών του πεδίου να διατηρείται.

- 222 α) Γράψτε την εξίσωση συνέχειας που συνεπάγεται η διατήρηση του αριθμού των κορυφών.
 223 β) Το k είναι ο τοπικός κυματαριθμός, και το ω η τοπική συχνότητα του κυματισμού. Αν γνω-
 224 ρίζουμε ότι για το πεδίο αυτό υπάρχει σχέση $\omega(k)$ γράψτε την εξίσωση που διέπει το k .
 225 γ) Σύμφωνα με το β) που θα βρίσκεται στον χρόνο t ένας δεδομένος κυματαριθμός k_0 ;

Απάντηση

226 Στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} k dx \quad (8)$$

227 κορυφές, δεδομένου ότι $k(x, t)$ είναι η πυκνότητα των κορυφών. Ο ρυθμός μεταβολής του αριθ-
 228 μού των κορυφών σε αυτό το διάστημα ισούται με τη διαφορά του ρυθμού κορυφών που εισέρ-
 229 χονται και εξέρχονται από αυτό το διάστημα, που είναι

$$\omega(\alpha, t) - \omega(\beta, t) = - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial \omega}{\partial x} dx \quad (9)$$

230 Άρα από τις υποθέσεις η τοπική διατήρηση του αριθμού των κορυφών απαιτεί την εξής ισό-
 231 τητα:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha}^{\beta} k dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial k}{\partial t} dx = - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial \omega}{\partial x} dx \quad (10)$$

232 Εξ' αυτού συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dx = 0, \quad (11)$$

233 για κάθε $\alpha < \beta$. Συνεπώς πρέπει η ολοκληρωτέα ποσότητα να μηδενίζεται (χρειάζεται μόνο
 234 συνέχεια εδώ των παραγώγων) και έτσι αποδεικνύεται ότι το k και ω ικανοποιούν τη γνωστή
 235 σχέση συνέχειας:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (12)$$

236 Αν δε η $\omega(k)$ είναι συνάρτηση του k τότε το k εξελίσσεται χωροχρονικά σύμφωνα με την

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \omega'(k) \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

237 όπου $\omega'(k) = d\omega/dk$. Η εξίσωση αυτή εκφράζει ότι επί των σημείων του χωρόχρονου (x, t) που
 238 ικανοποιούν τη σχέση

$$x = \omega'(k)t + x_0, \quad (14)$$

239 ο κυματάρηθος έχει τη σταθερή τιμή k και το σημείο x_0 είναι το σημείο στο χώρο που στον
 240 χρόνο $t = 0$ η πυκνότητα κορυφών (ο κυματάρηθος) είναι k .

241 Συνεπώς σταθερές τιμές του k διαδίδονται με την ταχύτητα ομάδας $\omega'(k)$.

242 Από τη (12) προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{(x_0, t_0)}^{(x, t)} k dx - \omega dt \quad (15)$$

243 είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που ενώνει το σημείο του χωρόχρονου (x_0, t_0) με το (x, t)
 244 και επομένως ορίζει μία συνάρτηση $\varphi(x, t)$ η οποία έχει ως παραγώγους τον κυματάρηθο και
 245 τη συχνότητα:

$$k = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (16)$$

246 Το $\varphi(x, t)$ είναι η τοπική φάση των κυμάτων. Πχ. αν $\varphi(x, t) = kx - \omega t$ έχουμε την κλασσική
 247 φάση ενός μονοχρωματικού κύματος. Επειδή τώρα

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt \quad (17)$$

248 η σταθερή φάση $d\varphi = 0$ διαδίδεται με ταχύτητα

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\varphi} = -\frac{\partial \varphi / \partial t}{\partial \varphi / \partial x} = \frac{\omega}{k}, \quad (18)$$

249 που είναι η γνώριμη φασική ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η φάση ενός κύματος (πχ. μία
 250 κορυφή).

251 Συνεπώς οι κορυφές του κυματισμού διαδίδονται με τη φασική ταχύτητα ω/k .

252 Διάλεξη 10- Παρασκευή, 27/3

253 ΦΧ θέτει δύο ερωτήματα: προσδιορίστε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\ddot{x} + \gamma\dot{x} = 1/x$,
254 $\gamma \geq 0$, με $x(0) = 0$ $\dot{x}(0) = 0$, επίσης διατυπώστε την ηλεκτροδυναμική σε ένα κόσμο που
255 περιορίζεται στην επιφάνεια μίας σφαίρας.

256 Κατά τα άλλα: συνέχεια με το κεφάλαιο 6 του Strogatz, παραδείγματα ζωγραφικής στις
257 2-διαστάσεις, συντηρητικά δυναμικά συστήματα και το θεώρημα **Hartman-Grobman**.

258 Εάν με $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^\dagger \mathbf{x}}$ συμβολίσουμε το μέτρο διανυσμάτων (γενικότερα καταστάσεων),
259 που αναφέρεται επίσης ως ευκλείδειο ή L_2 μέτρο, τότε μπορούμε να ορίσουμε το αντίστοιχο
260 μέτρο ενός πίνακα Φ (ή γενικότερα ενός τελεστή) ως τη μέγιστη τιμή του $\|\Phi \mathbf{x}\|_2$ όταν το \mathbf{x}
261 κείται επί της μοναδιαίας σφαίρας $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$. Αυτό σημαίνει ότι το $\|\Phi\|_2$ είναι η τετραγωνική
262 ρίζα της μέγιστης ιδιοτιμής του θετικού πίνακα $\Phi^\dagger \Phi$.