

Λύσεις — Εξέταση Μη Γραμμικής Δυναμικής

Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών • 25/6/2026

Θέμα 1. $\dot{r} = \mu r - ar^3$, $\dot{\theta} = 1$

Η γωνιακή εξίσωση $\dot{\theta} = 1$ απλώς περιστρέφει· όλη η δυναμική κρύβεται στην ακτινική. Σημεία ισορροπίας της ακτινικής: $r(\mu - ar^2) = 0$, δηλαδή $r = 0$ πάντα, και

$$r_* = \sqrt{\mu/a} \quad \text{όταν} \quad \mu/a > 0.$$

Γραμμική ευστάθεια από $f(r) = \mu r - ar^3$, $f'(r) = \mu - 3ar^2$:

$$f'(0) = \mu, \quad f'(r_*) = \mu - 3a\frac{\mu}{a} = -2\mu.$$

Άρα η αρχή είναι ευσταθής για $\mu < 0$ και ασταθής για $\mu > 0$ · ο οριακός κύκλος (όταν υπάρχει) είναι ευσταθής για $\mu > 0$ και ασταθής για $\mu < 0$. Για $a < 0$ ο όρος $-ar^3 > 0$ κυριαρχεί σε μεγάλα r , οπότε οι τροχιές απομακρύνονται στο άπειρο (δεν υπάρχει κορεσμός).

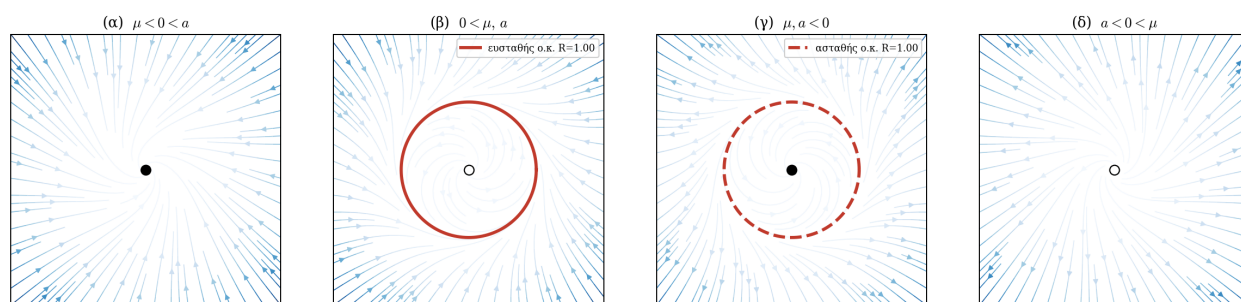
(α) $\mu < 0 < a$: χωρίς οριακό κύκλο ($\mu/a < 0$). Ευσταθής εστία στην αρχή — όλες οι τροχιές σπειροειδώς στο 0 (δεξιόστροφα, $\dot{\theta} > 0$).

(β) $0 < \mu, a$ (**υπερκρίσιμη**): ευσταθής οριακός κύκλος $R = \sqrt{\mu/a}$, ασταθής αρχή· τροχιές από μέσα και απ' έξω τείνουν στον κύκλο.

(γ) $\mu, a < 0$ (**υποκρίσιμη**): ασταθής οριακός κύκλος $R = \sqrt{\mu/a}$, ευσταθής αρχή. Μέσα από τον κύκλο $\rightarrow$ αρχή· έξω $\rightarrow \infty$.

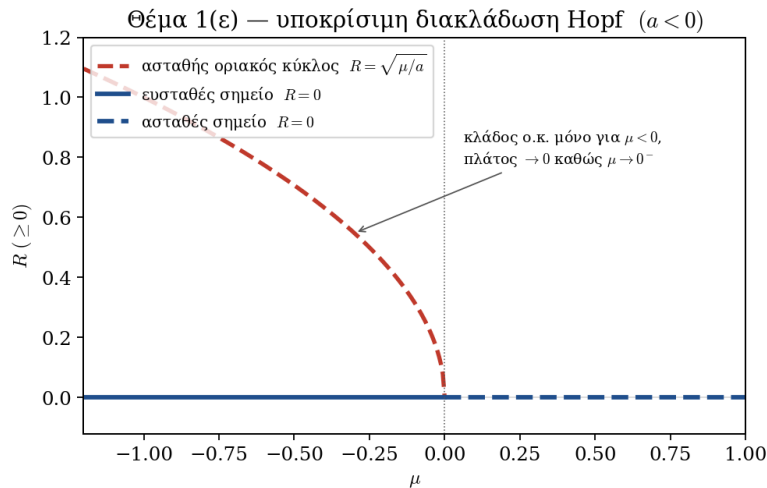
(δ) $a < 0 < \mu$: χωρίς οριακό κύκλο. Ασταθής αρχή, όλες οι τροχιές διαφεύγουν στο άπειρο.

Θέμα 1 — ροή στο επίπεδο ($\dot{r} = \mu r - ar^3$, $\dot{\theta} = 1$)



Γεμάτο σημείο = ευσταθής αρχή, κενό = ασταθής. Συνεχής κύκλος = ευσταθής, διακεκομμένος = ασταθής.

(ε) Υποκρίσιμη Hopf. Συμβαίνει για $a < 0$. Ο κλάδος των (ασταθών) οριακών κύκλων είναι $R(\mu) = \sqrt{\mu/a}$, ο οποίος για $a < 0$ υπάρχει μόνο για $\mu < 0$ και «γεννιέται» από την αρχή καθώς $\mu \rightarrow 0^-$ ($R \rightarrow 0$), εκτεινόμενος προς τα αρνητικά μ . Σχεδιάζεται διακεκομμένος (ασταθής). Η αρχή $R = 0$ είναι ευσταθής για $\mu < 0$ (συνεχής) και ασταθής για $\mu > 0$ (διακεκομμένη).



Σημείωση: το καθαρά κυβικό μοντέλο δεν κορέννεται, οπότε ο ασταθής κλάδος δεν «γυρίζει». Αν προστεθεί όρος κορεσμού $-br^5$ ($b > 0$) εμφανίζεται διακλάδωση σάγματος-κόμβου κύκλων σε κάποιο $\mu_s < 0$ και η κλασική υστέρηση: ευσταθής κλάδος μεγάλου πλάτους + απότομα άλματα.

Θέμα 2. $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x(1-x) - \mu y, \quad 2 > \mu \geq 0$

(α) Τι περιγράφει. Παραγωγίζοντας, $\ddot{x} = \dot{y} = -x + x^2 - \mu\dot{x}$, δηλαδή

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + \underbrace{(x - x^2)}_{V'(x)} = 0, \quad V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

Είναι ένας **αποσβενύμενος μη γραμμικός ταλαντωτής** μοναδιαίας μάζας σε κυβικό δυναμικό $V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ με ιξώδη απόσβεση μ . Το V έχει τοπικό ελάχιστο (πηγάδι) στο $x = 0$ και τοπικό μέγιστο (φράγμα) στο $x = 1$: περιγράφει π.χ. τη **διαφυγή σωματιδίου από μετασταθές πηγάδι** πάνω από ενεργειακό φράγμα.

(β) Σημεία ισορροπίας & ευστάθεια. $y = 0$ και $x(1-x) = 0 \Rightarrow$ τα σημεία $(0, 0)$ και $(1, 0)$. Ιακωβιανή

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1-2x) & -\mu \end{pmatrix}.$$

Στο $(0, 0)$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix}$, $\text{tr} = -\mu$, $\det = 1 > 0$, ιδιοτιμές $\lambda = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$. Αφού $\mu^2 < 4$, είναι μιγαδικές με $\text{Re} = -\mu/2 \leq 0$: **ευσταθής εστία** για $0 < \mu < 2$ (και κέντρο γραμμικά για $\mu = 0$).

Στο $(1, 0)$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix}$, $\det = -1 < 0 \Rightarrow$ **σάγμα** (ιδιοτιμές $\lambda = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4}}{2}$, αντίθετα πρόσημα).

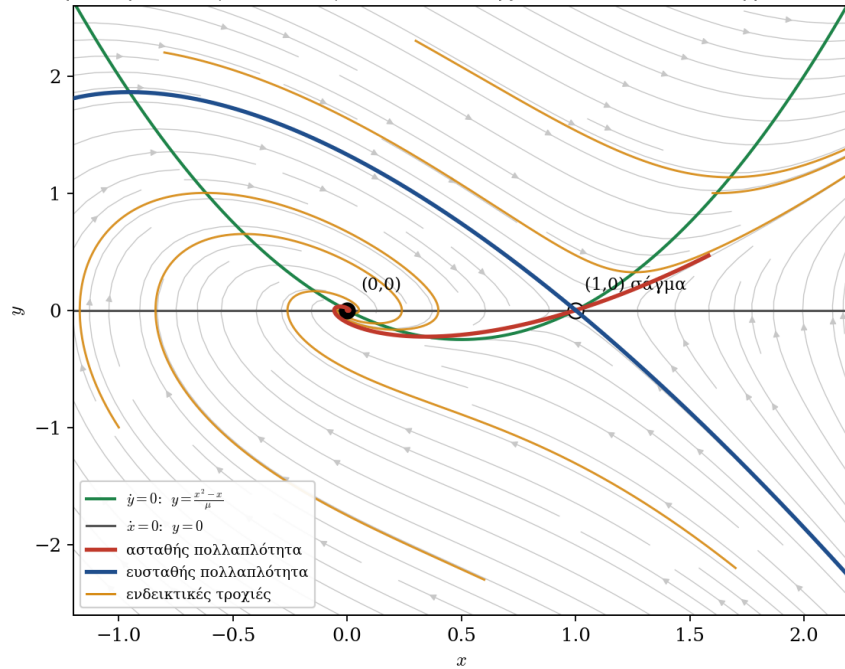
Το σημείο που έχει και ευσταθή και ασταθή πολλαπλότητα είναι το σάγμα $(1, 0)$.

(γ) $0 < \mu < 2$. Καμπύλες μηδενικής κλίσης:

$$\dot{x} = 0 : y = 0 \text{ (ο άξονας } x), \quad \dot{y} = 0 : y = \frac{x^2 - x}{\mu} \text{ (παραβολή με ρίζες } x = 0, 1, \text{ min στο } x = \frac{1}{2}).$$

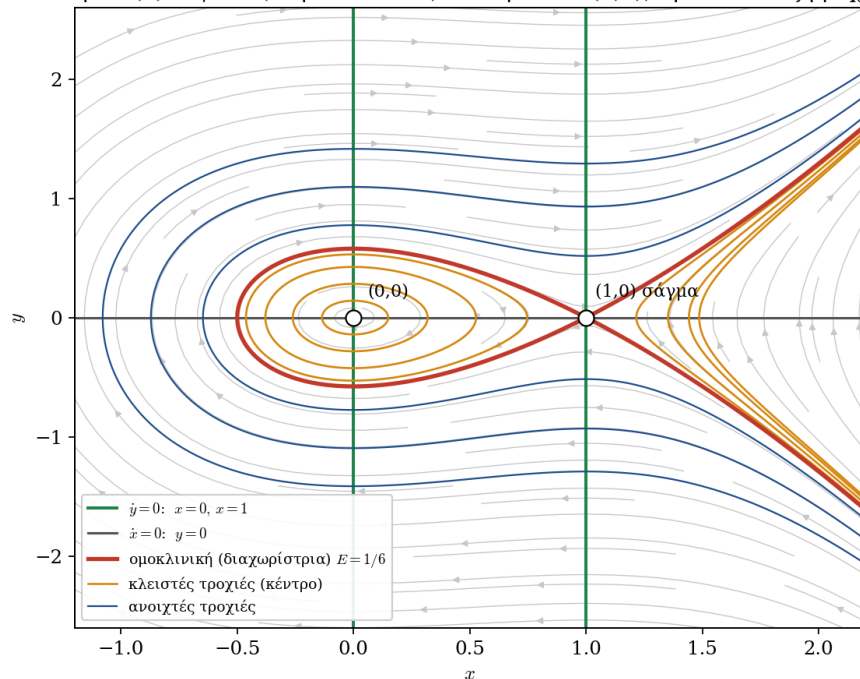
Στο σάγμα οι ιδιοδιευθύνσεις είναι $(1, \lambda_{\pm})$ με $\lambda_{\pm} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4}}{2}$ (λύσεις της $\lambda^2 + \mu\lambda - 1 = 0$): ασταθής πολλαπλότητα με θετική κλίση $\lambda_+ > 0$, ευσταθής με $\lambda_- < 0$. Μη γραμμική εξέλιξη: ο ένας κλάδος της ασταθούς πολλαπλότητας «πέφτει» στο πηγάδι και σπειροειδώς καταλήγει στην εστία $(0, 0)$ (δεξιόστροφα)· ο άλλος διαφεύγει ($x \rightarrow \infty$). Η **ευσταθής πολλαπλότητα είναι η διαχωρίστρια**: ορίζει τη λεκάνη έλξης της αρχής. Τροχιές μέσα στη λεκάνη $\rightarrow (0, 0)$ · έξω διαφεύγουν.

Θέμα 2(γ) — $0 < \mu < 2$ (εδώ $\mu = 1$): ευσταθής εστία στο $(0,0)$, σάγμα στο $(1,0)$



(δ) $\mu = 0$. Τώρα το σύστημα είναι **Χαμιλτονιανό** (διατηρητικό): $E = \frac{1}{2}y^2 + V(x) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ διατηρείται ($\dot{E} = 0$). Η αρχή γίνεται **κέντρο** (ιδιοτιμές $\pm i$)· το $(1,0)$ παραμένει σάγμα. Η $\dot{y} = 0$ καμπύλη εκφυλίζεται στις κατακόρυφες $x = 0$, $x = 1$. Οι τροχιές είναι οι ισοϋψείς $E = \text{σταθ}$. Γύρω από το κέντρο υπάρχουν *εμφωλευμένες κλειστές τροχιές*, οριζόμενες από τον **ομοκλινικό βρόχο** (διαχωρίστρια) $E = V(1) = \frac{1}{6}$ που ξεκινά και καταλήγει στο σάγμα. Έξω από τον βρόχο οι τροχιές είναι ανοιχτές. Σε σχέση με το (γ): η απόσβεση εξαφανίστηκε, η εστία έγινε κέντρο και η διαχωρίστρια έγινε γνήσια ομοκλινική τροχιά.

Θέμα 2(δ) — $\mu = 0$ (Χαμιλτονιανό): κέντρο στο $(0,0)$, ομοκλινικός βρόχος



Θέμα 3. Χαμιλτονιανό σύστημα $\dot{x} = H_y$, $\dot{y} = -H_x$

(α) Οι τροχιές είναι ισοϋψείς της H .

$$\frac{dH}{dt} = H_x \dot{x} + H_y \dot{y} = H_x H_y + H_y (-H_x) = 0 \Rightarrow H(x, t) = H(x_0, y_0) = \text{σταθ.}$$

(β) Εξέλιξη εμβαδού (Liouville). Το πεδίο ταχυτήτων είναι αναλλοίωτης απόκλισης:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_x H_y + \partial_y (-H_x) = H_{yx} - H_{xy} = 0.$$

Από το θεώρημα μεταφοράς $\frac{dA}{dt} = \iint_{D(t)} \nabla \cdot \mathbf{v} dx dy = 0$, άρα

$$\frac{dA}{dt} = 0 \Rightarrow A(t) = A_0 \text{ (το εμβαδόν διατηρείται).}$$

(γ) Γιατί δεν διασπάται ούτε σχηματίζει «8». Η εξέλιξη είναι συνεχής ως προς τις αρχικές συνθήκες και αντιστρέψιμη (η αντίστροφη είναι η εξέλιξη προς τα πίσω στον χρόνο).

Δεν διασπάται: πάρτε δύο οποιαδήποτε σημεία του χωρίου σε μια μεταγενέστερη στιγμή και κοίταξε από πού ξεκίνησαν. Αφού το αρχικό χωρίο ήταν συνεκτικό, μπορώ να ενώσω τις δύο αρχικές θέσεις με μια καμπύλη που μένει μέσα στο χωρίο. Καθώς περνά ο χρόνος, η καμπύλη παραμορφώνεται συνεχώς αλλά μένει ολόκληρη μέσα στο χωρίο και εξακολουθεί να ενώνει τα δύο σημεία. Άρα όποια δύο σημεία κι αν διαλέξω συνδέονται μέσα στο χωρίο — επομένως δεν μπορεί να έχει σπάσει σε δύο κομμάτια.

Όχι «8»: ένα «8» έχει ένα σημείο όπου το σύνορο τέμνει τον εαυτό του· εκεί θα συναντιόνταν δύο διαφορετικές τροχιές. Αυτό απαγορεύεται από τη μοναδικότητα: από κάθε σημείο περνά μία μόνο τροχιά, οπότε οι τροχιές δεν τέμνονται και το σύνορο παραμένει απλό.

(δ) Γραμμικοποίηση στο (x_e, y_e) . Με $\delta = (\delta x, \delta y)$,

$$A = \begin{pmatrix} \partial_x H_y & \partial_y H_y \\ -\partial_x H_x & -\partial_y H_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{xy} & H_{yy} \\ -H_{xx} & -H_{xy} \end{pmatrix}_{(x_e, y_e)}.$$

$$\text{tr } A = H_{xy} - H_{xy} = 0, \quad \det A = -H_{xy}^2 + H_{xx}H_{yy} = H_{xx}H_{yy} - H_{xy}^2 = \det(\text{Hess } H).$$

Οι ιδιοτιμές: $\lambda^2 + \det A = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{-\det A}$. Άρα

$\det A > 0$ (ορισμένη Εσσιανή $\rightarrow$ ακρότατο της H): $\lambda = \pm i\sqrt{\det A}$, **κέντρο**.
 $\det A < 0$ (αόριστη Εσσιανή $\rightarrow$ σάγμα της H): $\lambda = \pm \sqrt{|\det A|}$ πραγματικές αντίθετες, **σάγμα**.

(Εφόσον οι δεύτερες παράγωγοι δεν μηδενίζονται, $\det A \neq 0$, άρα μόνο κέντρο ή σάγμα — όχι εκφυλισμός.)

(ε) Εκθέτες Lyapunov των περιοδικών τροχιών γύρω από κέντρο. Για κάθε περιοδική τροχιά περιόδου T , οι πολλαπλασιαστές Floquet $\rho_{1,2}$ ικανοποιούν

$$\rho_1 \rho_2 = \exp\left(\int_0^T \text{tr } J(t) dt\right) = \exp\left(\int_0^T 0 dt\right) = 1,$$

αφού $\text{tr } J = \partial_x \dot{x} + \partial_y \dot{y} = 0$ παντού (Χαμιλτονιανό). Ένας πολλαπλασιαστής είναι πάντοτε $\rho_1 = 1$ (διαταραχή κατά μήκος της ροής / εφαπτομενική στην τροχιά). Άρα και $\rho_2 = 1$, οπότε και οι δύο εκθέτες Lyapunov μηδενίζονται:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Συμπέρασμα για τη μη γραμμική ευστάθεια: οι διαταραχές ούτε αυξάνονται ούτε φθίνουν εκθετικά — μια γειτονική αρχική συνθήκη βρίσκεται σε γειτονική κλειστή ισοϋψή της H και παραμένει για πάντα κοντά (φραγμένη). Οι τροχιές είναι **ουδέτερα / κατά Lyapunov (τροχιακά) ευσταθείς αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθείς**: επειδή οι γειτονικές τροχιές έχουν εν γένει διαφορετική περίοδο, εμφανίζεται αποσυγχρονισμός φάσης και αλγεβρική (γραμμική στον χρόνο), όχι εκθετική, απομάκρυνση.

Θέμα 4. $\rho_t + c(\rho)\rho_x = \nu\rho_{xx}$, $\nu > 0$, $F' = c$

(α) Αναγωγή σε 1Δ σύστημα. Με $\rho = \rho(\xi)$, $\xi = x - vt$: $\rho_t = -v\rho'$, $\rho_x = \rho'$, $\rho_{xx} = \rho''$ και $c(\rho)\rho' = \frac{d}{d\xi}F(\rho)$. Η (1) γίνεται $-v\rho' + (F(\rho))' = \nu\rho''$. Ολοκληρώνοντας μία φορά ως προς ξ :

$$\nu\rho' = F(\rho) - v\rho + C, \quad C = \text{σταθ.} \quad (2)$$

(β) Προσδιορισμός v και C . Καθώς $\xi \rightarrow \pm\infty$, $\rho \rightarrow \rho_{L,R}$ και $\rho' \rightarrow 0$, άρα και τα δύο άκρα είναι σημεία ισοροπίας της (2):

$$F(\rho_L) - v\rho_L + C = 0, \quad F(\rho_R) - v\rho_R + C = 0.$$

Αφαιρώντας:

$$v = \frac{F(\rho_L) - F(\rho_R)}{\rho_L - \rho_R}, \quad C = v\rho_L - F(\rho_L) = v\rho_R - F(\rho_R).$$

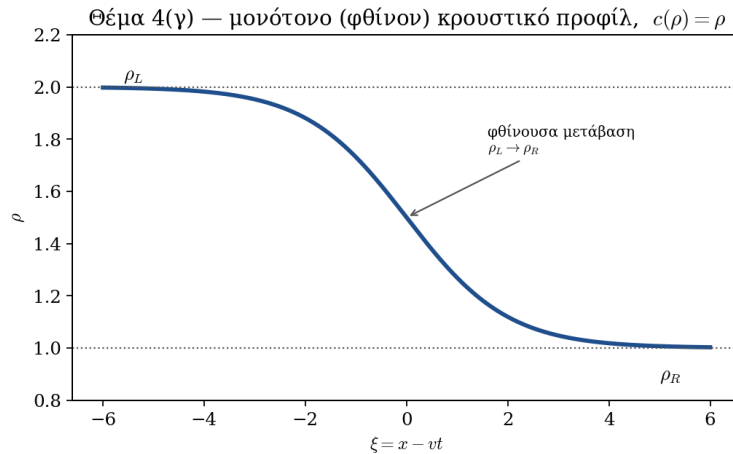
Επειδή ο νόμος διατήρησης είναι $\rho_t + (F(\rho))_x = \nu\rho_{xx}$ με ροή F , η v είναι ακριβώς ο λόγος του άλματος ροής προς το άλμα του ρ , δηλαδή η **συνθήκη άλματος Rankine-Hugoniot** $v = \frac{[F]}{[\rho]}$.

(γ) $c(\rho) = \rho \Rightarrow F = \rho^2/2$. Η (2) γράφεται $\nu\rho' = \frac{1}{2}\rho^2 - v\rho + C = \frac{1}{2}(\rho - \rho_L)(\rho - \rho_R)$, με $v = \frac{\rho_L + \rho_R}{2}$, $C = \frac{\rho_L\rho_R}{2}$. Για $\rho_R < \rho < \rho_L$ είναι $(\rho - \rho_L) < 0$, $(\rho - \rho_R) > 0$, άρα $\rho' < 0$: η λύση είναι **μονότονη φθίνουσα** (συμβατό με $\rho(-\infty) = \rho_L > \rho_R = \rho(+\infty)$). Χωρίζοντας μεταβλητές παίρνουμε τη μορφή ολοκληρώματος

$$x - vt - \xi_0 = \int_{\rho_m}^{\rho(x,t)} \frac{2\nu d\rho'}{(\rho' - \rho_L)(\rho' - \rho_R)}, \quad v = \frac{\rho_L + \rho_R}{2}.$$

Το ολοκλήρωμα δίνει κλειστή μορφή $\tanh$:

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_L + \rho_R}{2} - \frac{\rho_L - \rho_R}{2} \tanh\left[\frac{(\rho_L - \rho_R)}{4\nu}(x - vt - \xi_0)\right].$$



(δ) Μονοτονία για οποιοδήποτε συνεχές $c(\rho)$. Ναι. Η (2) είναι **μονοδιάστατο αυτόνομο** σύστημα $v\rho' = g(\rho)$, $g(\rho) = F(\rho) - v\rho + C$. Σε 1Δ αυτόνομα συστήματα η ροή πάνω στην ευθεία φάσης είναι μονότονη: το ρ' δεν αλλάζει πρόσημο χωρίς να μηδενιστεί το g , δηλαδή χωρίς να φτάσει σε σημείο ισορροπίας (πράγμα που απαιτεί άπειρο ξ). Το ζητούμενο προφίλ είναι η ετεροκλινική τροχιά που συνδέει τα ρ_L ($\xi \rightarrow -\infty$) και ρ_R ($\xi \rightarrow +\infty$). για να υπάρχει η σύνδεση πρέπει η g να μη μηδενίζεται για $\rho \in (\rho_R, \rho_L)$, άρα g σταθερού προσήμου εκεί $\Rightarrow \rho'$ σταθερού προσήμου $\Rightarrow \rho$ **μονότονη**. Δεν υπάρχουν ταλαντώσεις/υπερακοντίσεις (αυτές απαιτούν ≥ 2 διαστάσεις φάσης). Συνεπώς το ιξώδες κρουστικό κύμα είναι πάντα μονότονο.

Θέμα 5. NLS: $iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u = 0$, $u \rightarrow 0$

(α) «Αναλλοιότητα Γαλιλαίου»; Με $\Phi = u(\xi, t)e^{i\theta}$, $\xi = x - vt$, $\theta = kx - \omega t$:

$$\Phi_t = (u_t - vu_\xi - i\omega u)e^{i\theta}, \quad \Phi_{xx} = (u_{\xi\xi} + 2iku_\xi - k^2u)e^{i\theta}, \quad |\Phi|^2\Phi = |u|^2ue^{i\theta}.$$

Αντικαθιστώντας στην NLS για Φ :

$$e^{i\theta} \left[\underbrace{(iu_t + \frac{1}{2}u_{\xi\xi} + |u|^2u)}_{=0 \text{ (η } u \text{ λύνει NLS)}} + i(k-v)u_\xi + (\omega - \frac{k^2}{2})u \right] = 0.$$

Προσοχή στο φυσικό συμπέρασμα. Αν κάναμε μόνο γαλιλαϊκή αλλαγή συντεταγμένων, θεωρώντας την u ως βαθμωτό ($k = \omega = 0$, δηλαδή $\Phi = u(x - vt, t)$), θα έμενε ο όρος $-iv u_\xi \neq 0$: δεν λύνει την NLS. Επομένως

Όχι — η NLS δεν έχει γαλιλαϊκή συμμετρία με τη στενή έννοια (το βαθμωτό πεδίο δεν είναι αναλλοίωτο). Η εξίσωση είναι αναλλοίωτη μόνο στον **συνδυασμό** ώθησης $x \mapsto x - vt$ και του παράγοντα φάσης (βαθμίδας) $e^{i(vx - v^2t/2)}$, που εμφανίζεται όταν $k = v$ (μηδενίζει τον u_ξ) και $\omega = v^2/2$ (μηδενίζει τον u).

Δομικά, αυτή η φάση είναι ο **κύκλος του Bargmann**: η u μετασχηματίζεται σε **προβολική** αναπαράσταση της ομάδας Γαλιλαίου — ισοδύναμα, σε γνήσια αναπαράσταση της κεντρικής της επέκτασης (ομάδα Bargmann), με κεντρικό φορτίο τη «μάζα» $m = 1$ (τον συντελεστή της $\frac{1}{2}u_{xx}$). Είναι ο ίδιος λόγος που η κυματοσυνάρτηση Schrödinger αποκτά τη φάση $e^{i(mvx - mv^2t/2)}$ σε ώθηση.

Δύο διευκρινίσεις. (i) Η συμμετρία boost + φάση ισχύει για **κάθε** $v \in \mathbb{R}$: είναι μια **συνεχής μονοπαραμετρική** ομάδα, όχι μια προνομιακή τιμή του v . (ii) Η τροχιά αυτής της ομάδας πάνω στη στάσιμη λύση του (β), $u = f(x)e^{-i\mu t}$, είναι ακριβώς η μονοπαραμετρική

οικογένεια κινούμενων σολιτονίων $\Phi = f(x - vt) e^{i(vx - v^2 t/2 - \mu t)}$ — η ίδια η ύπαρξή τους είναι η φυσική εκδήλωση ότι η συμμετρία είναι γνήσια και συνεχής, απλώς προβολική (όχι γαλιλαϊκή-βαθμωτή).

(β) Στάσιμη λύση $u = f(x)e^{-i\mu t}$, $f \in \mathbb{R}$. Αντικατάσταση:

$$\mu f + \frac{1}{2}f'' + f^3 = 0 \Rightarrow f'' = -2\mu f - 2f^3.$$

Είναι «σωματίδιο» θέσης f με «χρόνο» x σε δυναμικό $W(f) = \mu f^2 + \frac{1}{2}f^4$ ($f'' = -W'(f)$). Για $\mu < 0$ το W είναι διπλό πηγάδι, με το $f = 0$ τοπικό μέγιστο. Για ομοκλινική τροχιά (σολιτόνιο) με $f, f' \rightarrow 0$ στο $\pm\infty$ το $f = 0$ πρέπει να είναι σάγμα: η γραμμικοποίηση $f'' = -2\mu f$ δίνει εκθετικά (υπερβολικά), όχι ταλαντωτικά, f ακριβώς όταν $-2\mu > 0$.

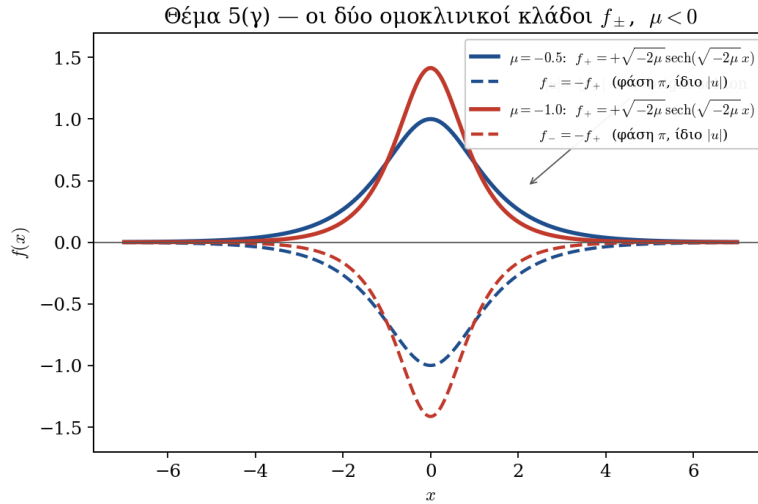
$\mu < 0$ (κάθε αρνητικό μ). Τότε υπάρχει σολιτόνιο φωτεινού (bright) τύπου, το οποίο μέσω της (3) γεννά κινούμενα σολιτόνια.

Πρώτο ολοκλήρωμα ($\times f'$, ολοκλήρωση, $E = 0$ από τις σ.σ.): $(f')^2 = -2\mu f^2 - f^4$, με μέγιστο πλάτος $|f|_{\max} = \sqrt{-2\mu}$. Επειδή η εξίσωση είναι **περιττή** ως προς f (αναλλοίωτη στο $f \mapsto -f$), υπάρχουν δύο ομοκλινικοί βρόχοι στην ενέργεια $E = 0$, ένας προς $f > 0$ κι ένας προς $f < 0$:

$$f_{\pm}(x) = \pm \sqrt{-2\mu} \operatorname{sech}(\sqrt{-2\mu}(x - x_0)).$$

(Για $\mu \geq 0$ το $f = 0$ γίνεται κέντρο: μόνο περιοδικές λύσεις, καμία ομοκλινική προς το 0.)

(γ) Μορφή της $f(x)$. Δύο κάτοπτρες καμπύλες τύπου sech : ο θετικός κλάδος f_+ είναι άρτιο «καμπούρι» με κορυφή $\sqrt{-2\mu}$ στο $x = x_0$ και εκθετικά φθίνουσες ουρές· ο αρνητικός κλάδος $f_- = -f_+$ είναι το κατοπτρικό του (μεγαλύτερο $|\mu| \Rightarrow$ ψηλότερο και στενότερο).



Ο αρνητικός κλάδος δεν είναι «dark». Το αρνητικό πρόσημο δεν φτιάχνει σκοτεινό σολιτόνιο: ο χαρακτηρισμός bright/dark κρίνεται από το μέτρο $|u|$ και το υπόβαθρο, όχι από το πρόσημο του πραγματικού f . Εδώ $|u| = |f_{\pm}| = \sqrt{-2\mu} \operatorname{sech}(\dots) \rightarrow 0$: ίδιο μέτρο, ίδιο μηδενικό υπόβαθρο, ίδιο $|u|^2$ — εντοπισμένο καμπούρι έντασης, άρα **bright**. Μάλιστα $f_- = -f_+ = e^{i\pi} f_+$, δηλαδή απλώς σταθερή φάση π , ειδική περίπτωση της συμμετρίας βαθμίδας $u \mapsto e^{i\alpha} u$: δεν αλλάζει τίποτα φυσικό (ούτε καν κόμβο έχει — είναι παντού αρνητικό, όχι sign-changing). Γνήσιο dark σολιτόνιο θα απαιτούσε και αρνητικό πρόσημο μη γραμμικότητας (απο-εστιάζουσα NLS, $-|u|^2 u$) και μη μηδενικό υπόβαθρο $|u| \rightarrow \rho_0 > 0$, π.χ. $u = \rho_0 \tanh(\rho_0 x) e^{-i\rho_0^2 t}$ — εδώ αποκλείονται και τα δύο (το πρόσημο είναι + και οι σ.σ. είναι $u \rightarrow 0$).