

Σημειώσεις για τη συμπεριφορά της δυναμικής Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov (KPP)

24 Μαρτίου 2026

1 Γενικά χαρακτηριστικά της δυναμικής KPP

Η ελεύθερη KPP¹ δυναμική πεδίου $u(x, t)$ σε μία χωρική διάσταση, δηλαδή με το x να λαμβάνει τιμές σε όλη την πραγματική ευθεία χωρίς περιορισμό, διέπεται από την

$$u_t = v u_{xx} + r u(1 - u) .$$

Επιζητούμε τον προσδιορισμό της χρονικής εξέλιξης αρχικού πεδίου $u(x, 0)$. Ορίζοντας τις νέες μεταβλητές $t' = rt$, $x' = x\sqrt{r/v}$ η KPP μπορεί να τεθεί στην κανονική μορφή:

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u) , \tag{1}$$

έχοντας αφαιρέσει τους τόνους από τις νέες μεταβλητές για απλοποίηση της γραφής. Την δυναμική αυτή εξέτασε συγχρόνως με τους KPP και ο Fisher² (όλοι το 1937) και πολλές φορές αναφέρεται ως εξίσωση Fisher (ιδιαίτερα στους χώρους της οικολογίας) ή εξίσωση FKPP.

Τι περιγράφει αυτή εξίσωση; Θα μπορούσε να περιγράψει τη διάχυση κάποιας φυσικής ποσότητας, u , σε ένα περιβάλλον το οποίο εμφανίζει εισροή ή εκροή της ποσότητας αυτής, με την εισροή/εκροή να εξαρτάται από το u . Θα μπορούσε η εισροή/εκροή αυτή να περιγράφει τη λογιστική αύξηση/μείωση ενός πληθυσμού, ο οποίος όμως διαχέεται στις γειτονικές περιοχές, ή την χωροχρονική εξέλιξη μίας επιδημίας. Η εξίσωση αυτή περιγράφει επίσης τη διάδοση φλόγας, και εκρήξεων. Γενικότερα, η χωρική διάσταση μπορεί να είναι οποιαδήποτε, οπότε η δράση της διάχυσης (που περιγράφει αδρομερώς κίνηση τυχαίου περιπάτου) επιτελείται με την Λαπλασιανή στην αντίστοιχη διάσταση. Σε παραπάνω από μία διαστάσεις παρουσιάζονται ενδιαφέρουσες χωρικές διαμορφώσεις (patterns) του πεδίου με διαφορετικές συμμετρίες.

Τι συμπεριφορά αναμένουμε; Αν $|u| \ll 1$ αναμένουμε το $|u|$ να αυξηθεί, λόγω της λογιστικής, και συγχρόνως εξάπλωση του πεδίου σε περιοχές χαμηλότερης τιμής του u λόγω της διάχυσης. Υπάρχουν δύο προφανείς ομογενείς καταστάσεις ισορροπίας: η $u = 0$, που αντιπροσωπεύει το κενό, και η $u = 1$.

Η αστάθεια του κενού $u(x, t) = 0$ φαίνεται αμέσως από τον έλεγχο της σταθερότητας της λύσης

¹A. Kolmogorov, I. Petrovsky & N. Piscounoff, 1937: Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de la quantité de matière et son application a un probleme biologique. *Bull. Univ. Moscou*, Set. Inter., Sec. A., pp. 1-25.

²R. A. Fisher, 1937: The advance of advantageous genes; *Ann. of Eugenics*, 7, pp. 355-369.

22 αυτής. Μικρές διαταραχές $u(x, t)$ του κενού διέπονται από την γραμμικοποιημένη (1) εξίσωση:

$$u_t = u_{xx} + u. \quad (2)$$

23 Η (2) μπορεί να αναλυθεί κατά Fourier και επειδή είναι ομογενής στον χώρο και γραμμική να εξετασθεί
24 η εξέλιξη κάθε αρμονικής ξεχωριστά διότι υπό αυτές τις προϋποθέσεις δεν υπάρχει αλληλεπίδραση
25 μεταξύ κυματαριθμών. Επιπλέον, επειδή είναι ομογενής στον χρόνο η διαταραχή κυματαριθμού k εξε-
26 λίσσεται ως:

$$u = \hat{u}_k e^{ikx + \lambda t},$$

27 όπου \hat{u}_k το πλάτος της διαταραχής αυτής και

$$\lambda = 1 - k^2.$$

28 Αυτό συνιστά πλήρη περιγραφή της γραμμικής δυναμικής διότι κάθε λογική αρχική συνθήκη (π.χ.
29 φραγμένη και μη μηδενική σε πεπερασμένο εύρος της ευθείας) μπορεί να αναλυθεί κατά Fourier. Οι
30 διαταραχές με $k < 1$ έχουν $\lambda > 0$ και συνεπώς αυξάνονται εκθετικά με τον χρόνο και είναι ασταθείς.
31 Αντιθέτως διαταραχές με $k > 1$ είναι εκθετικά φθίνουσες και συνεπώς ευσταθείς. Η κατάσταση του
32 κενού συνεπώς είναι ασταθής σε διαταραχές με $k < 1$. Γιατί το $k = 1$ είναι ο κρίσιμος κυματαριθμός
33 που διαχωρίζει τις ευσταθείς από τις ασταθείς διαταραχές; Ο ρυθμός αύξησης από την εισροή είναι
34 ανάλογος του u και αυτό συνεπάγεται εκθετική αύξηση με εκθέτη 1, ενώ ο όρος της διάχυσης κύματος
35 με κυματαριθμό k συνεπάγεται εκθετική μείωση με ρυθμό k^2 και τελικά η διαταραχή εξελίσσεται με
36 ρυθμό $1 - k^2$. Αν δεν είχαμε προχωρήσει στην αδιαστατοποιημένη KPP θα προέκυπτε ότι $\lambda = r - vk^2$,
37 όπου φαίνεται αμέσως η προέλευση κάθε όρου.

38 Ασκήσεις:

39 α) Η κατάσταση $u(x, t) = 1$ είναι και αυτή λύση της KPP. Προσδιορίστε την ευστάθειά της.

40 β) Προσδιορίστε τη λύση $u(x, t)$ της KPP αν αρχικά $u(x, 0) = 1/3$.

41 Θα περιοριστούμε σε πεδία που λαμβάνουν θετικές τιμές ≥ 0 , κάτι που έτσι και αλλιώς απαιτείται
42 αν το u περιγράφει πληθυσμό ή κάποια πυκνότητα. Αυτός ο περιορισμός είναι λογικός διότι αν σε
43 κάποια περιοχή είναι $u < 0$ και η αρχική συνθήκη έχει προβολή σε διαταραχές με $k < 1$ τότε επειδή
44 δεν υπάρχουν όροι που μπορούν να ανασχέσουν την εκθετική αστάθεια το πεδίο θα απειριοσθεί.

45 **Ερώτηση:** Πως μπορείτε να τροποποιήσετε την KPP ώστε να έχει πεπερασμένες λύσεις και
46 για θετικές και αρνητικές τιμές του πεδίου;

47 Επιπλέον, εάν αρχικά $u(x, 0) \geq 0$ τότε $u(x, t) \geq 0, \forall t$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο από
48 φυσικής πλευράς διότι η δράση της διάχυσης είναι να επαναφέρει ένα πεδίο στη μέση τιμή του. Αν το
49 πεδίο κάποια χρονική στιγμή έχει στο x την τιμή $u(x)$ ενώ η μέση τιμή $\bar{u}(x) = (u_+ + u_-)/2$ των αμέσα
50 γειτονικών τιμών της συνάρτησης $u_+ = u(x + h)$ και $u_- = u(x - h)$ είναι μεγαλύτερη από την τιμή στο
51 $u(x)$ τότε θα είναι

$$\frac{d^2 u}{dx^2} > 0,$$

52 και η διάχυση θα προσπαθήσει να επαναφέρει την $u(x)$ προς τη μέση τιμή της. Εξ'άλλου αυτό φαίνεται
 53 και από την διακριτή έκφραση της δευτέρας παραγώγου που είναι

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + o(h^2), \\ &= \frac{\bar{u}(x) - u(x)}{h^2/2} + o(h^2). \end{aligned}$$

54 **Άσκηση:**

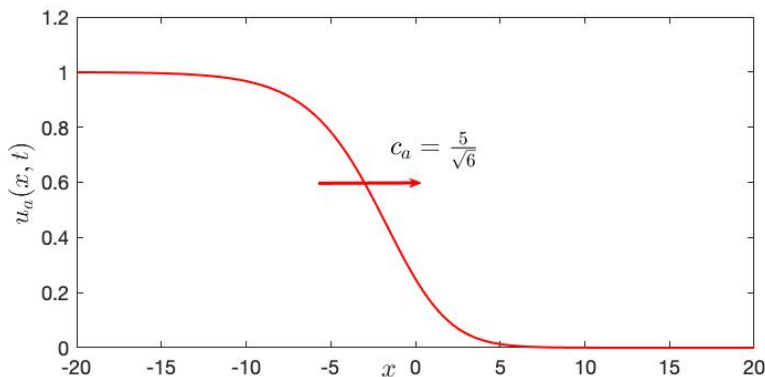
55 α) Μέσω του αναπτύγματος Taylor αποδείξτε την παραπάνω προσεγγιστική έκφραση της
 56 δευτέρας παραγώγου.

57 β) Δείξτε ομοίως ότι αν ορίσετε τη μέση τιμή ως $\bar{u}(x) = \int_{x-h/2}^{x+h/2} u(x') dx' / h$ τότε και πάλι όταν
 58 $\bar{u}(x) > u(x)$ θα είναι $d^2u/dx^2 > 0$.

59 Συνεπώς είναι φυσικά αναμενόμενο αν αρχικά $1 \geq u(x,0) \geq 0$ τότε να είναι πάντοτε $1 \geq u(x,t) \geq 0$.
 60 Η αυστηρή μαθηματική απόδειξη αυτής της πρότασης είναι κάπως τεχνική και παραπέμπουμε στη
 61 δημοσίευση των KPP που την αποδεικνύουν με λεπτομέρεια. Δεν την παραθέτουμε διότι η απόδειξη η
 62 ίδια δεν έχει πιστεύουμε πραγματικό ενδιαφέρον. Όμως η πρόταση αυτή αποτελεί θεμελιακή ιδιότητα
 63 που διέπει τις λύσεις της KPP.

64 **Θεώρημα:**

65 Αν αρχικά $1 \geq u(x,0) \geq 0$ τότε $\forall t: 1 \geq u(x,t) \geq 0$.



Σχήμα 1: Η αναλυτική λύση της KPP μετατοπίζεται προς τα δεξιά με ταχύτητα $c_a = 5/\sqrt{6}$.

66 Υπάρχει μία αναλυτική λύση της KPP την οποία αξίζει να αναφέρουμε εξ'αρχής. Είναι η

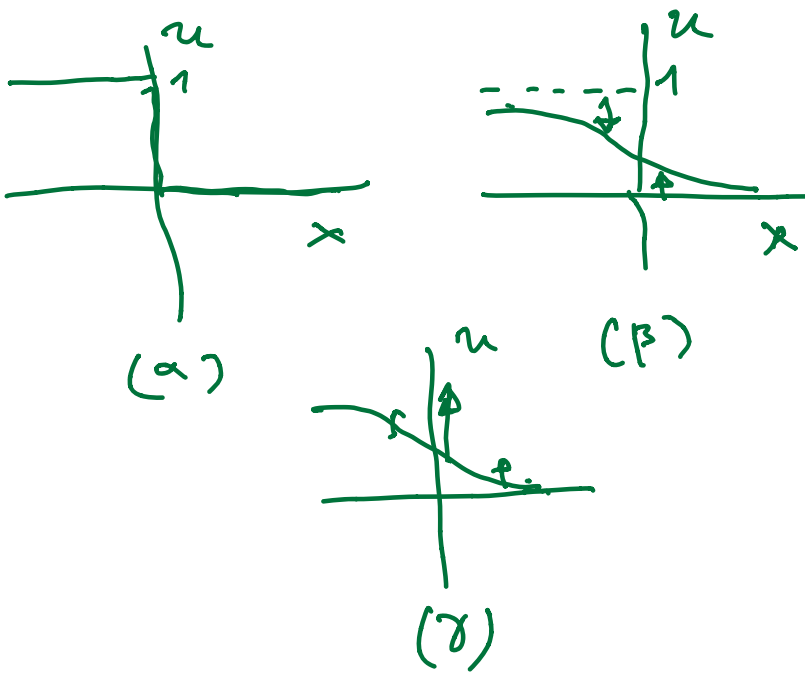
$$u_a(x,t) = \frac{1}{\left[1 + \exp((x - c_a t)/\sqrt{6})\right]^2}, \quad c_a = 5/\sqrt{6}. \quad (3)$$

67 Η αναλυτική αυτή λύση αντιστοιχεί σε ένα σταθερής μορφής μέτωπο το οποίο μετατοπίζεται με τον
 68 χρόνο προς τα δεξιά (βλ. Σχ. 1). Θα δούμε ότι αυτή η συμπεριφορά κυματικής μετάδοσης και όχι εξά-
 69 πλωσης χαρακτηρίζει γενικά τη δυναμική της KPP. Παρατηρήστε επίσης ότι λόγω της κατοπτρικής
 70 συμμετρίας της KPP $x \rightarrow -x$ αν η $u(x,t)$ ικανοποιεί την KPP τότε και η $u(-x,t)$ θα την ικανοποιεί.

$$u_a(-x, t) = \frac{1}{\left[1 + \exp(-(x + c_a t)/\sqrt{6})\right]^2}, \quad c_a = 5/\sqrt{6}. \quad (4)$$

72 που αντιστοιχεί σε αυξανόμενο μέτωπο κινείται προς τα αριστερά.

73 Η ανακάλυψη των KPP συνίσταται στο ότι αντιλήφθηκαν ότι η δυναμική τους επιδέχεται μετατο-
74 πιζόμενες λύσεις όπως αυτής της αναλυτικής λύσης. Το ερώτημα είναι ποιά είναι η φυσική διαδικασία
75 που επιτρέπει αυτή τη μετάδοση. Αν ο όρος εισροής ήταν ανεξάρτητος από την κατάσταση δεν θα
76 είχαμε μετάδοση, απλά η εισρέουσα ποσότητα θα εξαπλωνόταν (διαχεόταν). Προφανώς λοιπόν η με-
77 τάδοση οφείλεται στο ότι η εισροή εξαρτάται από την κατάσταση. Μπορούμε να αποδώσουμε όμως το
78 φαινόμενο αυτό στη μη γραμμικότητα της δυναμικής; Είναι δελεαστικό να υποστηρίξει κανείς, όπως
79 συνήθως υποστηρίζεται, το εξής σενάριο: έστω ότι αρχικά είχαμε ένα απότομο μέτωπο (βλ. Σχ. 2α) με
80 το πεδίο να μεταβαίνει απότομα από το 1 στο 0. Η διάχυση θα εξομαλύνει συμμετρικά το μέτωπο (βλ.
81 Σχ. 2β). Όμως η εισροή είναι μη γραμμική συνάρτηση και η εισροή μεγιστοποιείται στην περιοχή που
82 το πεδίο είναι $q = 0.5$ ενώ εισρέει πολύ λιγότερο όταν το q είναι κοντά στο 1 και στο 0. Αυτό σημαίνει
ότι η καμπύλη σηκώνεται στην περιοχή του $q = 0.5$ προκαλώντας διάδοση (βλ. Σχ. 2γ). Πειστήκατε;



Σχήμα 2

83 Θα υποστηρίξουμε ότι η διαδικασία μετάδοσης εξαρτάται από την πρόσθια περιοχή του μετώπου,
84 από την περιοχή που το πεδίο τείνει να μηδενισθεί. Ας ελέγξουμε αυτήν την πρόταση. Αν είναι έτσι
85 τότε επειδή $|u| \ll 1$ το πεδίο στη περιοχή αυτή διέπεται από την (2) που είναι η γραμμική εκδοχή της
86 KPP. Αν δε ορμώμενοι από την μορφή της αναλυτικής λύσης για $x \gg 1$ διερευνήσουμε αν υπάρχουν
87

88 λύσεις της μορφής

$$u = Ae^{-\alpha(x-ct)}, \quad \alpha > 0. \quad (5)$$

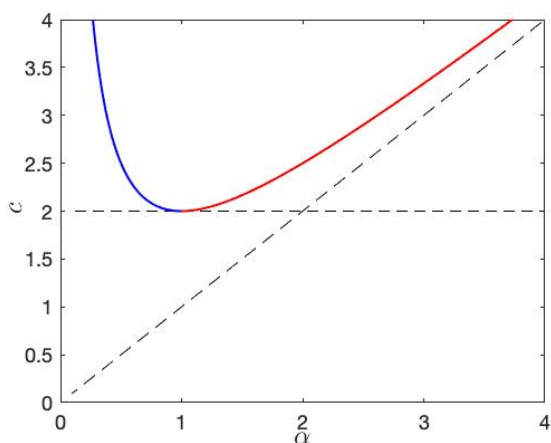
89 Δεν μας απασχολεί προς το παρόν ότι η λύση αυτή δεν είναι φραγμένη για $x \rightarrow -\infty$ και ότι δεν μπορεί
90 να ισχύει για όλα τα x , την θεωρούμε τοπική προσέγγιση της δυναμικής στην εμπροσθοφυλακή του
91 μετώπου. Αντικαθιστώντας την (5) στην (2) βρίσκουμε ότι

$$ac = \alpha^2 + 1,$$

92 και συνεπώς η ταχύτητα του μετώπου

$$c = \alpha + \frac{1}{\alpha}, \quad (6)$$

93 προσδιορίζεται αποκλειστικά από το α . Η συνάρτηση αυτή έχει για θετικά α ελάχιστο στο $\alpha = 1$ και
94 συνεπώς σύμφωνα με αυτή την πρόβλεψη η ταχύτητα διάδοσης c δεν μπορεί να είναι μικρότερη του
95 2 (βλ. Σχ. 3). Δεδομένης δε μιας τιμής του c υπάρχουν δύο τιμές που οδηγούν σε αυτήν την ταχύτητα,
με $\alpha < 1$ και $\alpha > 1$.



Σχήμα 3

96 Ας εξετάσουμε την ακρίβεια αυτής της πρόβλεψης. Στην αναλυτική λύση (4) γνωρίζουμε και το α
97 και το c . Από την (4) για $x \gg 1$ με t σταθερό έχουμε

$$u(x, t) \sim e^{-2x/\sqrt{6}},$$

98 άρα $\alpha = 2/\sqrt{6}$. Η δε προβλεπόμενη από τη γραμμική εξίσωση ταχύτητα

$$c = \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{5}{\sqrt{6}},$$

100 είναι πράγματι η ταχύτητα διάδοσης. Υπό αυτή την οπτική θα υποστηρίξαμε ότι η ταχύτητα διάδο-
101 σης εξαρτάται από γραμμικές διαδικασίες στο πρόσθιο μέρος του μετώπου και η μη γραμμικότητα

102 εγγυάται λύσεις φραγμένες σε όλο το χώρο, δηλαδή μετατρέπει τη μη φραγμένη γραμμική λύση $u =$
103 $Ae^{-\alpha(x-ct)}$, που ισχύει στο πρόσθιο μέτωπο και δεν είναι φραγμένη για $x \rightarrow -\infty$, σε φραγμένη συνάρ-
104 τηση σε όλη την πραγματική ευθεία.

105 Τελικά αποδεικνύεται³ ότι αν $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\alpha x} u(x, 0) = K > 0$, με $\alpha < 1$ τότε ασυμπτωτικά προκύπτει
106 μέτωπο που κινείται με ταχύτητα που δίνεται από την (6) και αντιστοιχεί στον αριστερό κλάδο της
107 $c(\alpha)$ στο Σχ. 3. Θα εξηγήσουμε σε λίγο ότι τιμές με $\alpha > 1$ δεν είναι συμβατές με την ύπαρξη κυματικών
108 λύσεων τέτοιας μορφής. Σημειώνουμε επίσης ότι παρότι οι KPP υποστηρίζουν ρητά ότι κάθε αρχική
109 συνθήκη που είναι φθίνουσα και είναι $u(x, 0) = 1$ όταν $x < x_1$ και $u(x, 0) = 0$ όταν $x > x_2$ με $x_1 < x_2$
110 καταλήγει σε λύση σταθερής κυματομορφής με $c = 2$ (και με $c = -2$ για την $u(-x, 0)$), αυτό φυσικά
111 πρέπει να εκληφθεί ότι έχει ασυμπτωτική ισχύ δηλαδή η διαταραχή τείνει για $t \rightarrow \infty$ προς την κυματική
112 μορφή. Μάλιστα ο Larson υπολογίζει ακριβώς τον τρόπο που προσεγγίζουν οι αρχικές συνθήκες των
113 KPP τη μεταφερόμενη λύση σταθερής κυματομορφής.

³H. P. McKean, 1975: Application of Brownian Motion to the Equation of Kolomogorov-Petrovskii-Piskunov, *Comm. Pure Appl. Math.*, 28, pp. 323-331 και D.A. Larson, 1978: Transient bounds and time-asymptotic behavior of nonlinear equations of Fisher type, *SIAM J. Appl. Math.*, 34, pp. 93-103.

2 Αριθμητική επίλυση της KPP

Παραθέτουμε ένα πρόγραμμα με το οποίο μπορείτε να διερευνήσετε τη συμπεριφορά των λύσεων

```
114
115
116 clear all
117 %KPP  $u_t = \nu * u_{xx} + r * u * (1-u)$ 
118
119
120 nu=1;r=1;
121 L=40;
122 N=1001;
123 x=linspace(-L,L,N);x=x';
124 dx=x(2)-x(1);
125
126 %no boundary conditions are imposed at L,-L
127 D2=zeros(N);
128 D2=diag(-2*ones(N,1))+diag(ones(N-1,1),1)+diag(ones(N-1,1),-1);
129 D2(1,1)=1;D2(1,2)=-2;D2(1,3)=1;
130 D2(N,N)=1;D2(N,N-1)=-2;D2(N,N-2)=1;
131 D2=(1/dx^2)*D2;
132
133 t=0;
134 xi=sqrt(1/6)*x-5/6*t;
135 va=1./(1+exp(xi)).^2;
136 v=0.4*exp(-(x/2).^2);
137 v0=va;
138 v=v0;
139 figure(2);
140 plot(x,v0,'r','Linewidth',2)
141 axis([-L L -1.5 1.5])
142 pause;
143
144
145 dt=0.001;
146 Tp=19;
147 Nt=floor(Tp/dt);
148 t=zeros(Nt,1);
149
150 v=v0;
151
152 for it=2:Nt;
153     t(it)=(it-1)*dt;
154     tn=t(it);
155     xi=sqrt(1/6)*x-5/6*tn;
```

```

156 va=1./(1+exp(xi)).^2;
157 v=v+dt*(nu*D2*v+r*v.*(1-v));
158
159 if min(v)<-20005;break;end;
160 if rem(it,10)==0;
161     figure(2);
162     plot(x,v,'r',x,va,'--b','Linewidth',2)
163     xlabel('$x$', 'Interpreter','latex','FontSize',24)
164     title(['$t = $',num2str(tn)], 'Interpreter','latex','FontSize',24)
165     axis([-L L -1.5 1.5])
166     drawnow
167 end;
168
169 end;
170

```

171 Άσκηση:

172 Τροποποιήστε τον τελεστή $D2$ στο παραπάνω πρόγραμμα ώστε το πεδίο να ικανοποιεί πε-
173 ριδικές συνοριακές συνθήκες στα $\pm L$ δηλαδή να είναι $u(L) = u(-L)$ (ο χώρος δηλαδή να
174 είναι κυκλικός) και λάβετε $L = 40$. Αφού το επιτύχετε αυτό

175 α) προσδιορίστε τον μικρότερο κυματαριθμό k σε αυτό το χωρίο ώστε η διαταραχή $u(x, 0) =$
176 $0.1 \cos(kx)$ που ικανοποιεί τις περιοδικές συνθήκες να τείνει ασυμπτωτικά προς το κενό. Σχε-
177 διάστε το πλάτος της διαταραχής συναρτήσει του χρόνου και επιβεβαιώστε ότι το πλάτος
178 μειώνεται με τον αναλυτικά προβλεπόμενο εκθέτη.

179 β) Για την αρχική κατάσταση $u(x, 0) = 1/2$, προσδιορίστε το $u(x, t)$. Τώρα θεωρήστε διατα-
180 ραχές της προηγούμενης αρχικής κατάστασης της μορφής $u(x, 0) = 1/2 + \alpha \cos(2\pi x/L)$ με
181 $\alpha < 1/2$. Τι συμβαίνει; Το παράδειγμα αυτό τι αποδεικνύει ως προς τον ελκυστή των κυμα-
182 τικών λύσεων τύπου KPP;

183 γ) Πως εξελίσσεται η αρχική κατάσταση που είναι $u(x, 0) = 3/2$ για $|x| < 2$ και $u(x, 0) = 0$
184 για $|x| > 2$;

185 3 Προσδιορισμός κυματικών λύσεων σταθερής κυματομορφής

186 Εξετάζουμε την υπέρξη λύσεων της μορφής $u(z)$ όπου $z = x - ct$. Οι ειδικές λύσεις αυτές αντι-
187 στοιχούν σε σταθερές κυματομορφές οι οποίες μετατοπίζονται με τον χρόνο, προς τα δεξιά αν $c > 0$
188 και προς τα αριστερά αν $c < 0$. Προφανώς, λόγω της σταθερής μορφής των λύσεων αυτών η αρχική
189 κατάσταση που αντιστοιχεί σε αυτές τις λύσεις είναι η $u(x)$. Κεντρικό ερώτημα είναι κατά πόσον λύ-
190 σεις τέτοιας μορφής με αυτές τις ιδιότητες προκύπτουν από άλλες αρχικές συνθήκες. Αυτό απαιτεί
191 κατ'ελάχιστον ότι οι λύσεις αυτές είναι ευσταθείς σε διαταραχές. Αν αποδειχθεί η ευστάθεια των λύ-
192 σεων αυτών τότε οι λύσεις αυτές είναι πραγματοποιήσιμες όταν οι αρχικές συνθήκες κείνται εντός του
193 πεδίου έλξεως των ειδικών λύσεων αυτών. Πληρέστερη μελέτη απαιτεί τον προσδιορισμό ή τον γενικό
194 χαρακτηρισμό του πεδίου έλξεως αυτών των ειδικών λύσεων.

195 Η KPP απαιτεί οι ειδικές κυματικές λύσεις σταθερής κυματομορφής $u(z)$ να ικανοποιούν την

$$-c \frac{du}{dz} = \frac{d^2u}{dz^2} - u(1-u), \quad (7)$$

196 για κατάλληλο c . Η συνάρτηση u προσδιορίζει την σταθερή κυματομορφή. Θα δείξουμε ότι οι μόνες
197 κυματομορφές που έχουν αυτές τις ιδιότητες είναι ή φθίνουσες συναρτήσεις με $\lim_{z \rightarrow -\infty} u(z) = 1$ και
198 $\lim_{z \rightarrow \infty} u(z) = 0$ που μεταδίδονται με θετική ταχύτητα $c \geq 2$ ή αύξουσες συναρτήσεις με $\lim_{z \rightarrow -\infty} u(z) =$
199 0 και $\lim_{z \rightarrow \infty} u(z) = 1$ που μεταδίδονται με αρνητική ταχύτητα $|c| \geq 2$.

200 Η δευτεροτάξια δυναμική είναι ισοδύναμη με την αυτόνομη πρωτοτάξια δυναμική στο επίπεδο
201 (u, v) :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= -u(1-u) - cv. \end{aligned}$$

202 Η τελεία εδώ συμβολίζει παραγωγή ως προς τη μεταβλητή z .

203 Έχουμε δύο σημεία ισορροπίας (u_e, v_e) τα: $(0, 0)$ και $(1, 0)$. Ο Ιακωβιανός πίνακας που ελέγχει την
204 γραμμική ευστάθεια στο $(1, 0)$ είναι

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix},$$

205 και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που προσδιορίζει τις ιδιοτιμές του:

$$\lambda^2 + c\lambda - 1 = 0.$$

206 Οι ιδιοτιμές είναι οι

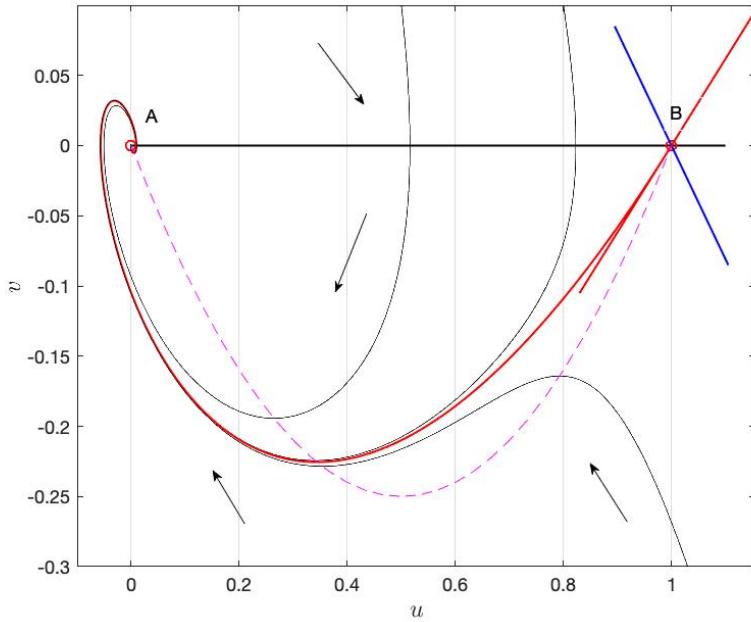
$$\lambda_{u,s} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + 1}, \quad (8)$$

207 και συνεπώς το $(1, 0)$ είναι σαγματικό σημείο δεδομένου ότι $\lambda_u > 0$ και $\lambda_s < 0$. Οι διευθύνσεις των
208 αναλλοίωτων κατευθύνσεων στην προσέγγιση της γραμμικής δυναμικής είναι οι

$$\mathbf{e}_u = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_s = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_s \end{pmatrix},$$

209 και έχουν σχεδιασθεί στο Σχ. 4. Επειδή το σημείο αυτό είναι υπερβολικό η τοπολογία της ροής που προ-
210 κύπτει από τη γραμμική δυναμική δεν μεταβάλλεται από τους μη γραμμικούς όρους. Επί της ασταθούς
211 πολλαπλότητας η λύση που αρχικά ήταν κοντά στο 1 εξελίσσεται ως

$$u(z) \approx 1 + Ae^{\lambda_u z}. \quad (9)$$



Σχήμα 4: Τυπικές τροχιές όταν $c = 1$. Παρόμοια εικόνα προκύπτει για κάθε τιμή του c στο διάστημα $0 < c < 2$. Για όλες αυτές τις τιμές το $A = (0, 0)$ είναι ευσταθής σπείρα και η ροή στην περιοχή του σταθερού σημείου είναι όπως στο σχήμα. Για κάθε τιμή του c , το $B = (1, 0)$ είναι πάντοτε σάγμα, όπου με μπλε σημειώνουμε τις ευσταθείς πολλαπλότητες του, ενώ με κόκκινο τις ασταθείς. Η γραμμή $v = 0$ είναι καμπύλη μηδενικής κλίσης (nullcline) στην οποία είναι $\dot{u} = 0$ και συνεπώς οι τροχιές τέμνουν τον άξονα $v = 0$ κάθετως και μάλιστα όταν $0 < u < 1$ με αρνητική κλίση (δηλαδή $\dot{v} < 0$), όπως φαίνεται στο σχήμα. Συνεπώς όλες οι αρχικές συνθήκες που έχουν $0 < u < 1$ και $0 < v \ll 1$ θα εισχωρήσουν στην περιοχή $v < 0$, όπως φαίνεται πάλι στο σχήμα. Ομοίως η τροχιά που συνεχίζει την ασταθή πολλαπλότητα του σάγματος προς τον κόμβο (σημειωμένη με κόκκινο) καταλήγει με σπειροειδή τρόπο στο A , αναγκαστικά λαμβάνοντας αρνητικές τιμές. Η διάστικτη καμπύλη είναι τμήμα της καμπύλης μηδενικής κλίσης $\dot{v} = 0$ όπου το διανυσματικό πεδίο του δυναμικού συστήματος είναι οριζόντιο και είναι $\dot{v} < 0$ στα σημεία που βρίσκονται εντός αυτής και $\dot{v} > 0$ εκτός αυτής. Η ροή της δυναμικής στις διάφορες περιοχές σημειώνεται με βέλη. Τέτοιες τιμές του c που διαμορφώνουν τέτοια εικόνα ροής δεν ανταποκρίνονται σε πραγματοποιήσιμες λύσεις της KPP επειδή δεν επιτρέπεται η u να γίνει αρνητική αν αρχικά $u(x, 0) > 0$. Συνεπώς, το ansatz λύσεων της μορφής $u(z)$ δεν είναι συμβατό με την KPP αν $|c| < 2$.

212 Ο Ιακωβιανός πίνακας που ελέγχει την γραμμική ευστάθεια στο $(0, 0)$ είναι

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix},$$

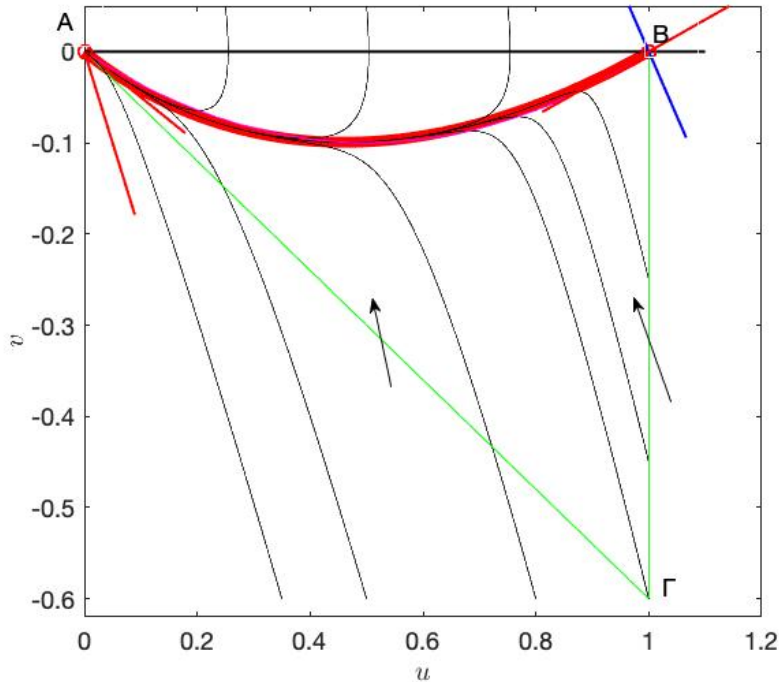
213 και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\lambda^2 + c\lambda + 1 = 0,$$

214 προσδιορίζει τις ιδιοτιμές

$$\lambda_{\pm} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - 1}, \quad (10)$$

215 και συνεπώς το $(0, 0)$ είναι ευσταθής σπείρα όταν $|c| < 2$ και δεν υπάρχουν αναλλοίωτες πραγματικές
 216 διευθύνσεις, όλο το επίπεδο είναι αναλλοίωτο, ενώ είναι ευσταθής κόμβος όταν $|c| > 2$ με τις αναλλοί-
 217 ωτες ευσταθείς πολλαπλότητες στις διευθύνσεις:



Σχήμα 5: Τυπικές τροχιές όταν $c = 2.5$. Παρόμοια εικόνα προκύπτει για $c \geq 2$. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις το $A = (0,0)$ είναι ευσταθής κόμβος και υπάρχει ετεροκλινική τροχιά η οποία αρχίζει κοντά από το B όπου $u(B) = 1$ και καταλήγει στο A όπου $u(A) = 0$ (χοντρή κόκκινη γραμμή). Η μετάβαση από το B στο A απαιτεί άπειρο διάστημα του z το οποίο, λόγω της χρονικής ομογενείας, μπορεί να ληφθεί και ως το διάστημα $(-\infty, \infty)$ που αναποκρίνεται στη φυσική ερμηνεία του z που λαμβάνει τιμές κάθε χρονική στιγμή σε όλη την πραγματική ευθεία. Στην ετεροκλινική τροχιά από το B στο A το πεδίο φθίνει μονότονα (είναι $du/dz = v < 0$ σε όλη την τροχιά) από το $u(-\infty) = 1$ στο $u(\infty) = 0$. Για να αντιληφθείτε τη λύση κρατήστε τον χρόνο t σταθερό στο $z = x - ct$, οπότε η κυματομορφή κάθε χρονική στιγμή μεταβαίνει από το $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 1$ στο $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$ και μετατοπίζεται με σταθερή ταχύτητα c .

$$\mathbf{e}_1 = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix}.$$

218 Στην περίπτωση αυτή όλες οι τροχιές που έλκονται στο σταθερό σημείο $(0,0)$ για $t \rightarrow \infty$ καταλήγουν
 219 εφαιπτόμενες στη διεύθυνση \mathbf{e}_1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή με τη μικρότερη απόλυτη τιμή, όπως φαί-
 220 νεται στο Σχ. 5. Δηλαδή όλες οι τροχιές που τείνουν στο 0 με $c \geq 2$ τείνουν με ρυθμό

$$u(z) \approx e^{\lambda_+ z} = e^{-\alpha z}, \quad (11)$$

221 με το

$$\alpha = \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} - 1}, \quad (12)$$

222 που είναι $\alpha \leq 1$ δεδομένου ότι είναι $c \geq 2$ και αντιστοιχεί στον αριστερό κλάδο της $c = \alpha + 1/\alpha$ (βλ.
 223 Σχ. 5). Όλες οι λύσεις δηλαδή που καταλήγουν στο μηδέν όταν το $(0,0)$ είναι ευσταθής κόμβος θα

224 πλησιάζουν το μηδέν με αυτόν τον εκθετικό τρόπο. Αυτό θα δούμε σε λίγο είναι το πρόσθιο μέρος
 225 της κυματομορφής και συνεπώς έτσι προσδιορίσαμε τον εκθέτη με τον οποίον μηδενίζεται το πεδίο
 226 στο πρόσθιο τμήμα του μετώπου αυτών των ειδικών λύσεων, και αποδείξαμε ότι δεν μπορεί οι ειδικές
 227 αυτές λύσεις να μηδενίζονται με εκθέτη $\alpha > 1$.

228 Η περίπτωση ειδικών λύσεων με $c < 2$ στις οποίες το A είναι ευσταθής σπείρα πρέπει αμέσως
 229 να αποκλειστεί. Διότι όλες οι τροχιές που είχαν αρχικά $u(x,0) > 0$ και τείνουν να μηδενιστούν θα
 230 αποκτήσουν αρνητικές τιμές λόγω της σπειροειδούς προσέγγισης στο 0. Αλλά αυτό είναι αδύνατον,
 231 όπως αναλύθηκε στο πρώτο εδάφιο. Συνεπώς ειδικές λύσεις σταθερής κυματομορφής υπάρχουν μόνον
 232 εφόσον $c \geq 2$.

233 Ας εξετάσουμε την περίπτωση αυτή πιο διεξοδικά. Θεωρούμε την περιοχή με σύνορο το τρίγωνο
 234 ABΓ στο Σχ. 5. Οι δύο κορυφές του A και B είναι σημεία ισορροπίας, και η κορυφή Γ έχει επιλεγεί
 235 κατάλληλα ώστε σε όλα τα σημεία των πλευρών του τριγώνου το εσωτερικό γινόμενο της προς τα έξω
 236 καθέτου σε κάθε πλευρά $\mathbf{n} = (n_u, n_v)$ με το διάνυσμα της ροής του δυναμικού συστήματος (\dot{u}, \dot{v}) να
 237 είναι αρνητικό, δηλαδή να ισχύει:

$$n_u \dot{u} + n_v \dot{v} < 0,$$

238 και στα μόνα σημεία που το εσωτερικό γινόμενο μηδενίζεται είναι τα A και B. Αυτό σημαίνει ότι δεδο-
 239 μένου η ταχύτητα δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο (εκτός από τα A και B) αν το δυναμικό σύστημα
 240 βρίσκεται αρχικά στις πλευρές του τριγώνου το δυναμικό σύστημα θα κινηθεί εντός του τριγώνου. Επί-
 241 σης αυτό σημαίνει ότι είναι αδύνατον τροχιά η οποία αρχικά βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου
 242 να εξέλθει από αυτό.

243 Ας θεωρήσουμε πρώτα σημεία της πλευράς AB. Η γραμμή αυτή είναι η καμπύλη μηδενικής κλίσης
 244 $\dot{u} = 0$ (nullcline) και συνεπώς η ροή στο τμήμα αυτό στο οποίο $v = 0$ είναι $(\dot{u}, \dot{v})_{AB} = (0, -u(1-u))$ ενώ
 245 η κάθετος στην πλευρά είναι η $(n_u, n_v)_{AB} = (0, 1)$ και

$$n_u \dot{u} + n_v \dot{v}|_{AB} = -u(1-u) < 0,$$

246 εφόσον $0 < u < 1$. Οπότε η ροή εισέρχεται στο τρίγωνο ABΓ όπως φαίνεται και στο Σχ. 5.

247 Επί της ΒΓ είναι $(\dot{u}, \dot{v})_{BG} = (v, -cv)$ και $(n_u, n_v)_{BG} = (1, 0)$. Συνεπώς

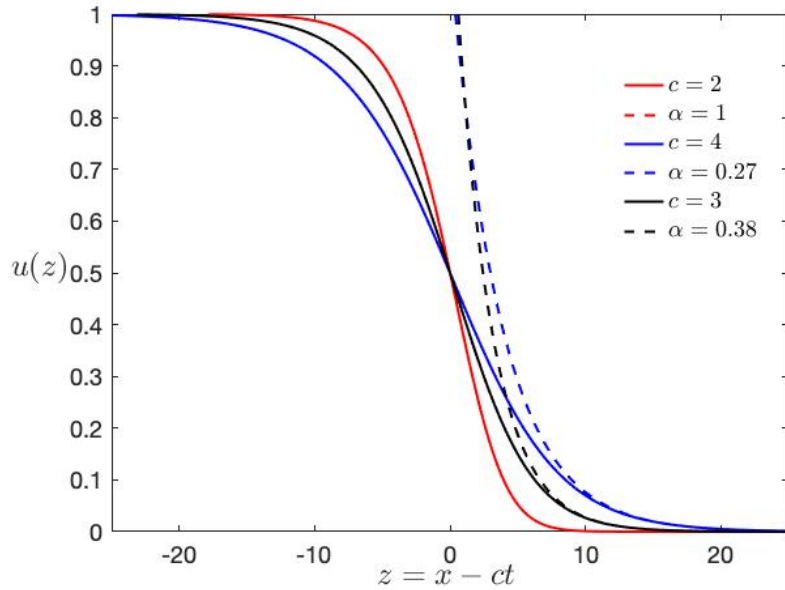
$$n_u \dot{u} + n_v \dot{v}|_{BG} = v < 0,$$

248 και η ροή εισέρχεται στο ABΓ και από αυτήν την πλευρά.

249 Τέλος, αν το Γ είναι το σημείο $(1, -m)$ ($m > 0$), η κάθετος στην ΑΓ είναι η $(n_u, n_v)_{AG} = -(m, 1)$ και
 250 επειδή $v = -mu$ επί της ΑΓ θα είναι $(\dot{u}, \dot{v})_{AG} = (-mu, cmu - u(1-u)) = u(-m, mc - (1-u))$. Άρα,

$$n_u \dot{u} + n_v \dot{v}|_{AG} = u(m^2 - cm + (1-u)) < u(m^2 - cm + 1) = u(m - m_+)(m - m_-).$$

251 όπου $m_{\pm} = c/2 \pm \sqrt{c^2/4 - 1}$, που είναι και οι δύο θετικές εφόσον $c > 2$ και ακριβώς αντίθετες με τις
 252 ιδιοτιμές λ_{\mp} του κόμβου (βλ. (10)). Άρα, αν επιλέξω τιμή m που είναι $m_+ > m > m_-$, τότε εξασφαλίζεται
 253 ότι η ροή εισέρχεται στο ABΓ και από την πλευρά ΑΓ. Αυτό σημαίνει ότι η πλευρά ΑΓ πρέπει να είναι
 254 εντός της γωνίας που σχηματίζεται από τις δύο ευσταθείς πολλαπλοότητες (όπως φαίνεται στο Σχ. 5).



Σχήμα 6: Το προφίλ της κυματομορφής $u(z)$ που προκύπτει για $c = 2, 3, 4$. Προσέξτε ότι όλες οι καμπύλες ασυμπτωτικά για $z \gg 1$ τείνουν στον ευσταθή κόμβο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή με την μικρότερη απόσβεση ως $e^{\lambda+z}$ δηλαδή με $\alpha = -\lambda_+$ και ο εκθέτης αυτός είναι ακριβώς η ρίζα του $c = \alpha + 1/\alpha$ που ανήκει στον αριστερό κλάδο του Σχ. 3. Το άλλο όριο, το 1, από την άλλη πλευρά προσεγγίζεται όταν $z \rightarrow -\infty$ πάλι εκθετικά, $e^{\beta z}$, αλλά με εκθέτη $\beta \neq \alpha$ και ίσο με την ιδιοτιμή της ασταθούς πολλαπλότητας του σάγματος $\lambda_u = -c/2 + \sqrt{c^2/4 + 1}$. (Επιβεβαιώστε αυτές τις επισημάνσεις στην αναλυτική λύση (4)).

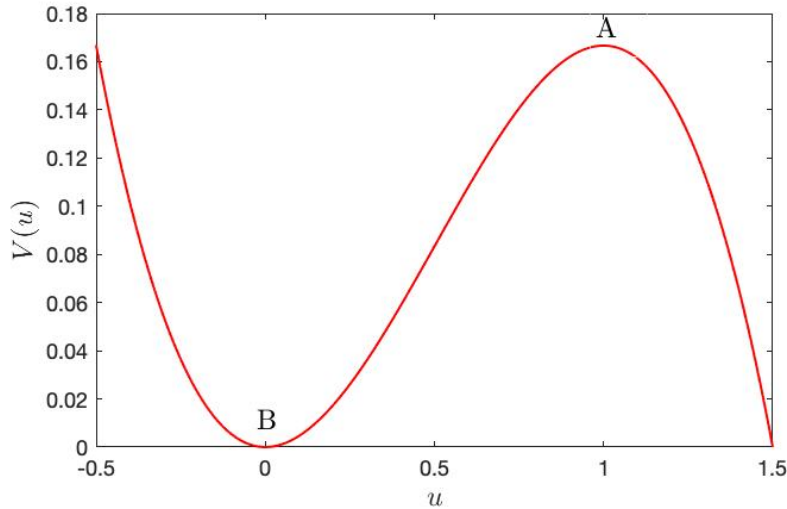
255 Κατασκευάσαμε έτσι το χωρίο ABΓ στο οποίο η ροή εισέρχεται στο σύνορό του. Ο Poincaré έδειξε
 256 ότι σε αυτήν την περίπτωση η ροή θα συγκλίνει σε ευσταθή σημεία και σε οριακούς κύκλους εντός του
 257 χωρίου. Δηλαδή ασυμπτωτικά μία αρχική συνθήκη εισερχόμενη στο χωρίο ή θα καταλήξει σε κάποιο
 258 σημείο ισορροπίας, ή θα εκτελεί περιοδική κίνηση. Αλλά ευσταθή σημεία είναι μόνο το A που είναι στο
 259 σύνορο και η ύπαρξη οριακού κύκλου μπορεί να αποκλειστεί αμέσως με πολλούς τρόπους. Το πλέον
 260 διαισθητικό επιχείρημα είναι το εξής: η ροή σε όλο το εσωτερικό του χωρίου έχει $\dot{u} = v < 0$, έτσι δεν
 261 μπορεί να υπάρχει κύκλος διότι αν υπήρχε θα υπήρχαν τμήματα του κύκλου στα οποία η ροή πρέπει
 262 να επιστρέψει σε μεγαλύτερες τιμές του u και σε αυτά τα τμήματα θα είναι $\dot{u} > 0$, όπερ άτοπο. Άλλο
 263 επιχείρημα βασίζεται στον υπολογισμό της απόκλισης του πεδίου ταχυτήτων του δυναμικού συστήμα-
 264 τος. Η απόκλιση είναι σταθερή και ίση με $-c$. Συνεπώς όχι μόνο δεν μπορεί να υπάρξει οριακός κύκλος
 265 εντός του ABΓ, δεν μπορεί να υπάρξει οριακός κύκλος σε οποιαδήποτε άλλη περιοχή αυτού του δυνα-
 266 μικού συστήματος. Τέλος, μπορεί να επικαλεστούμε ένα άλλο θεώρημα του Poincaré που απαιτεί στο
 267 εσωτερικό του οριακού κύκλου να υπάρχει ένα ή περισσότερα σημεία ισορροπίας. Αλλά εδώ τα μόνα
 268 σημεία ισορροπίας είναι στο σύνορο του χωρίου και έτσι δεν μπορεί να υπάρξει και για αυτόν τον λόγο
 269 οριακός κύκλος εντός του ABΓ.

270 Συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα του Poincaré όλες οι τροχιές που εισέρχονται στο ABΓ καταλή-
 271 γουν ασυμπτωτικά στο A. Συνεπώς και η τροχιά που αρχίζει από την ασταθή πολλαπλότητα του B θα
 272 καταλήξει στο A (η χοντρή κόκκινη τροχιά στο Σχ. 5). Σε όλη αυτή την τροχιά είναι $v < 0$, οπότε η u
 273 μονότονα φθίνει από την τιμή 1 στην τιμή 0, και έχει την μορφή μετώπου που σχεδιάζεται στο Σχ. 6.
 274 Αυτές είναι και οι μόνες κυματομορφές που μπορούν να εμφανιστούν σε αυτή τη δυναμική. Και αυτό
 275 διότι οποιαδήποτε άλλη τροχιά που καταλήγει στο 0 όταν $z \rightarrow \infty$, έρχεται από το άπειρο και δεν είναι

276 φραγμένη καθώς $z \rightarrow -\infty$.

277 3.1 Ένας Νευτώνειος τρόπος σκέψης

278 Η αναλύση που παρατέθηκε για την εύρεση των κυματικών λύσεων της (7) είναι αυτή που ακολού-
279 θησαν οι KPP η οποία είναι στο πνεύμα των μεθόδων γεωμετρικής ανάλυσης δυναμικών συστημάτων
280 που εισήγαγε ο Poincaré. Άμεση διαίσθηση για τον χαρακτήρα των λύσεων της (7) μπορούμε όμως να
281 αποκτήσουμε αμέσως σκεπτόμενοι "Νευτώνεια", δηλαδή με τον τρόπο που εντοπίζουμε στο μάθημα
282 ειδικές λύσεις όπως αυτές των σολιτονίων.



Σχήμα 7: Το δυναμικό $V(u) = u^2/3 - u^3/3$ της δυναμικής KPP. Τα σημεία A και B είναι σημεία ισορροπίας, το B ευσταθές, και το A ασταθές.

283 Η (7) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -u(1-u) - c \frac{du}{dz},$$

284 ή

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{dV}{du} - c \frac{du}{dz}, \quad (13)$$

285 με το δυναμικό

$$V = \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3},$$

286 και να θεωρηθεί η δυναμική ως αυτή της κίνησης σωματιδίου ως προς τη μεταβλητή z του οποίου η
287 "θέση" είναι η u , και η "ταχύτητά" του είναι du/dz , στο δυναμικό $V(u)$ με ενέργεια

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + V(u),$$

288 Το άγνωστο c εισάγει μία δύναμη τριβής ανάλογης της ταχύτητας όταν είναι $c > 0$, και αντιτριβής
289 όταν $c < 0$, όπως φαίνεται από τον "ρυθμό" μεταβολής της ενέργειας:

$$\frac{dE}{dz} = -c \left(\frac{du}{dz} \right)^2 .$$

290 Το δυναμικό $V(u)$ έχει ελάχιστο στο $u = 0$ (σημείο Β του Σχ. 7) και αυτό αντιστοιχεί στη θέση ευσταθούς
291 ισορροπίας και το μέγιστο στο $u = 1$ αντιστοιχεί στη θέση ασταθούς ισορροπίας (σημείο Α).

292 Η κύρια πληροφορία που μας χρειάζεται για την εξεύρεση ειδικών λύσεων είναι ότι πρέπει να πα-
293 ραμεινουμε στην περιοχή $u \geq 0$ αν αρχικά $u \geq 0$. Λύσεις που παραβιάζουν αυτή την ιδιότητα δεν
294 ανταποκρίνονται σε λύσεις της KPP και το ansatz (7) είναι κενού περιεχομένου. Το ερώτημα λοιπόν
295 είναι: μπορεί να βρεθεί κατάλληλο c ώστε κατάλληλη αρχική κατάσταση να οδηγήσει σε λύση φραγ-
296 μένη (επιζητούμε φραγμένα πεδία) και η λύση να παραμένει πάντα στην περιοχή $u \geq 0$;

297 Αν το c λάμβανε την τιμή $c = 0$ το u θα εκτελούσε ταλαντώσεις για χαμηλές τιμές της ενέργειας
298 του "σωματιδίου" λαμβάνοντας και αρνητικές τιμές ή το u θα έτεινε στο άπειρο. Επειδή και τα δύο δεν
299 είναι αποδεκτά, δεν είναι δυνατόν να βρούμε ειδικές λύσεις της (7) που να ανταποκρίνονται σε λύσεις
300 της KPP με $c = 0$. Ομοίως αν το $c > 0$ είναι μικρό και το "σωματίδιο" βρεθεί στο πηγάδι του Β τότε
301 θα εκτελέσει τελικά φθίνουσες ταλαντώσεις περί το σημείο Β (το σημείο Β είναι ευσταθής σπείρα) και
302 συνεπώς και πάλι θα αποκτήσει το u αρνητικές τιμές. Αν όμως $c \geq 2$ η ταλάντωση περί το Β γίνεται
303 υπερκρίσιμη και τότε το "σωματίδιο" θα τείνει όταν $z \rightarrow \infty$ στο $u = 0$ χωρίς καμμία ταλάντωση (έχει
304 μετατραπεί η ευσταθής σπείρα στο Β σε ευσταθή κόμβο). Συνεπώς λύσεις με $c \geq 2$ θα μπορούσαν να
305 ανταποκρίνονται σε πραγματοποιήσιμες λύσεις της KPP αν ήταν φραγμένες για όλους του χρόνου,
306 που σημαίνει ότι η μόνη τροχιά που είναι επιτρεπτή είναι αυτή για την οποία το "σωματίδιο" αρχίζει
307 ασυμπτωτικά από το Α όταν $z \rightarrow -\infty$, από τη θέση $u = 1$ και μονότονα φθίνει για να καταλήξει στο
308 Β για $z \rightarrow \infty$, στη θέση $u = 0$. Για να μπορεί να γίνει αυτό πρέπει το c να έχει την κατάλληλη τιμή
309 έτσι ώστε η ενέργεια που αναλώνεται (ή εκλύεται αν $c < 0$ και η κίνηση είναι από το Α στο Β) να είναι
310 ακριβώς ίση με τη διαφορά ενέργειας $E(A) - E(B) = 1/6$ σωματιδίων που βρίσκονται ακριβώς στα
311 σημεία ισορροπίας, δηλαδή να είναι

$$\frac{1}{6} = c \int_{-\infty}^{\infty} dz \left(\frac{du}{dz} \right)^2 .$$

312 Αυτή η συνθήκη είναι αυτή που χαρακτηρίζει την ετεροκλινική τροχιά στο προηγούμενο εδάφιο και
313 αποτελεί την ειδική λύση της KPP για $c \geq 0$.

314 Βλέπουμε δηλαδή αμέσως με την ανάλυση αυτή ότι η μονότονη μετάβαση από το Α, όπου $u = 1$,
315 στο Β, όπου $u = 0$, με κατάλληλο $c > 2$ ή από το Β στο Α με κατάλληλο $c < -2$ είναι οι μόνες επιτρεπτές
316 λύσεις της KPP μορφής $u(x - ct)$.

317 4 Μελέτη της ευστάθειας κυματικών λύσεων σταθερής κυματο- 318 μορφής

319 Οι KPP, McKean και Larson έδειξαν ότι γενικές αρχικές συνθήκες μπορούν να διεγείρουν λύσεις
320 σταθερής κυματομορφής. Αυτό αποδεικνύει ότι οι ειδικές λύσεις του προηγούμενου εδαφίου δεν είναι

321 απομονωμένες λύσεις, αλλά είναι ελκυστές όλων αυτών των αρχικών συνθηκών. Επίσης η πρόταση
322 αυτή είναι σχεδόν απόδειξη ότι οι λύσεις αυτές είναι ευσταθείς.

323 **Ερώτηση:** Γιατί οι ασυμπτωτικές προτάσεις που απέδειξαν οι KPP, McKean και Larson δεν
324 αποτελούν πλήρη απόδειξη της ευστάθειας των ειδικών λύσεων της KPP;

325 Θα μελετήσουμε στο εδάφιο αυτό κατευθείαν την ευστάθεια κυματικών λύσεων σταθερής κυμα-
326 τομορφής, θεωρώντας ότι η $u_0(z)$ ικανοποιεί την (7) με $z = x - ct$ και το κατάλληλο c . Θεωρούμε τώρα
327 λύσεις που αποτελούν διαταραχές της κυματικής λύσης της μορφής

$$u(x, t) = u_0(z) + u_1(z, t),$$

328 και υποθέτουμε ότι η διαταραχή $u_1(z, t)$ είναι μη μηδενική σε πεπερασμένο εύρος τιμών του z , δηλαδή
329 θεωρούμε διαταραχές που ενώ δεν έχουν σταθερή μορφή συνοδεύουν τη κυματική λύση. Θα εξετά-
330 σουμε την ευστάθεια αυτού του πιο περιορισμένου προβλήματος. Η ευστάθεια σε κάθε είδους αρχικές
331 συνθήκες, ακολουθεί τα ίδια βήματα και είναι παρόμοια, και επειδή είναι πιο περίπλοκη χωρίς ουσιώ-
332 δεις διαφορές δεν την παρουσιάζουμε.

333 Εισάγοντας τη διαταραγμένη λύση στην (1) έχουμε

$$-c\dot{u}_0 - c\dot{u}_1 + \partial_t u_1 = \ddot{u}_0 + \ddot{u}_1 - u_0 - u_1 + (u_0 + u_1)^2 ,$$

334 όπου και πάλι η τελεία συμβολίζει παραγώγιση ως προς τη μεταβλητή z . Επειδή η u_0 ικανοποιεί την
335 (7), δηλαδή είναι

$$\ddot{u}_0 + c\dot{u}_0 - u_0 + u_0^2 = 0 , \tag{14}$$

336 η u_1 ικανοποιεί την

$$\partial_t u_1 = \ddot{u}_1 + c\dot{u}_1 - u_1 + 2u_0 u_1 + u_1^2 ,$$

337 και η ευστάθεια της u_1 κρίνεται από τη γραμμικοποίηση της παραπάνω εξίσωσης:

$$\partial_t u_1 = \ddot{u}_1 + c\dot{u}_1 - u_1 + 2u_0 u_1 . \tag{15}$$

338 Δεδομένου ότι το δεξί μέλος της (15) είναι ομογενές ως προς το t θα έχω λύσεις της μορφής

$$u_1(z, t) = \hat{u}_1(z)e^{-\lambda t} ,$$

339 και επειδή έχω υποθέσει διαταραχές πεπερασμένου εύρους, θεωρώ ότι υπάρχει κάποιο L τέτοιο ώστε
340 $\hat{u}_1(\pm L) = 0$. Το L μπορώ να το λάβω οσοδήποτε μεγάλο. Συνεπώς η \hat{u}_1 πρέπει να ικανοποιεί την

$$\frac{d^2 \hat{u}_1}{dz^2} + c \frac{d\hat{u}_1}{dz} + (\lambda - 1 + 2u_0)\hat{u}_1 = 0 , \quad \hat{u}_1(\pm L) = 0 . \tag{16}$$

341 Θετοντας $\hat{u}_1 = \phi(z)e^{-cz/2}$ καταληγουμε στην

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} + \left(\lambda - \left(\frac{c^2}{4} - 1 + 2u_0(z) \right) \right) \phi = 0 \quad , \quad \phi(\pm L) = 0$$

342 που ορίζει ένα προβλημα ιδιοτιμών για την ιδιοτιμή λ τύπου Sturm-Liouville. Ορίζοντας την

$$g(z) = \frac{c^2}{4} - 1 + 2u_0(z) \quad ,$$

343 θα είναι

$$g(z) \geq 2u_0(z) \geq 0 \quad ,$$

344 επειδή η $u_0(z)$ υπάρχει μόνον αν $|c| \geq 2$. Το Sturm-Liouville πρόβλημα μπορεί έτσι να γραφεί για τον
345 προσδιορισμό των ιδιοτιμών λ που κρίνουν την ευστάθεια της $u_0(z)$ και των ιδιοσυναρτήσεων ϕ στη
346 μορφή

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} - g(z)\phi = -\lambda\phi \quad , \quad \phi(\pm L) = 0 \quad . \quad (17)$$

347 Κλασική θεωρία αποδεικνύει ότι επειδή ο τελεστής

$$L = \frac{d^2}{dz^2} - g(z) \quad ,$$

348 είναι ερμιτιανός στην κλάση συναρτήσεων ϕ που μηδενίζονται στα άκρα του διαστήματος, $\phi(\pm L) = 0$
349 με εσωτερικό γινόμενο

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{-L}^L \phi_1^*(z)\phi_2(z)dz \quad ,$$

350 θα υπάρχει πλήρες φάσμα ορθογωνίων ως προς το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο ιδιοσυναρτήσεων
351 με θετικές ιδιοτιμές (εδώ έχουμε απλά τη γενίκευση της γνώριμης πληρότητας του φάσματος ερμιτιανών
352 τελεστών σε πεπερασμένες διαστάσεις που ανιπαρίστανται με πίνακες). Όλες οι ιδιοτιμές είναι
353 πραγματικοί αριθμοί μεγαλύτεροι του μηδενός. Αυτό προκύπτει ως εξής: πολλαπλασιάζουμε την (17)
354 με την ϕ^* και ολοκληρώνουμε, οπότε:

$$\int_{-L}^L \phi^* \frac{d^2\phi}{dz^2} dz - \int_{-L}^L g(z)|\phi|^2 dz = -\lambda \int_{-L}^L |\phi|^2 dz \quad , \quad \phi(\pm L) = 0 \quad .$$

355 Κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών μετά από παραγωγτική ολοκλήρωση έχουμε:

$$\int_{-L}^L \phi^* \frac{d^2\phi}{dz^2} dz = - \int_{-L}^L \left| \frac{d\phi}{dz} \right|^2 dz \quad ,$$

356 οπότε

$$\lambda = \frac{\int_{-L}^L (|d\phi/dz|^2 + g(z)|\phi|^2) dz}{\int_{-L}^L |\phi|^2 dz} > 0. \quad (18)$$

357 Έτσι αποδεικνύεται ότι οι ιδιοτιμές λ είναι θετικές αλλά και πραγματικές και συνεπώς και οι ιδιοσυν-
358 ναρτήσεις ϕ μπορούν να ληφθούν πραγματικές. Επιπλέον θα είναι $\lambda > 0$ και συνεπώς αποδείξαμε
359 την ευστάθεια της $u_0(z)$ ως προς την κλάση διαταραχών της μορφής $u_1(z, t)$ που μηδενίζονται στα
360 $z = \pm L$.

361 Μάλιστα, είναι

$$\lambda \geq \frac{\pi^2}{4L^2}. \quad (19)$$

362 Αυτή η ανισότητα προκύπτει από μία όμορφη και χρήσιμη ανισότητα στη Φυσική που απέδειξε πάλι
363 ο Poincaré. Κάθε συνάρτηση ϕ που μηδενίζεται στα $\phi(\pm L) = 0$ μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi z}{2L}\right) + \beta_n \sin\left(\frac{2n\pi z}{2L}\right), \quad (20)$$

364 τότε επειδή οι συναρτήσεις είναι ορθογώνιες έχουμε προφανώς:

$$\begin{aligned} \frac{\int_{-L}^L |d\phi/dz|^2 dz}{\int_{-L}^L |\phi|^2 dz} &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 + |\beta_n|^2 \left(\frac{2n\pi}{2L}\right)^2}{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2} \\ &\geq \frac{\pi^2}{4L^2}. \end{aligned}$$

365 Αυτή είναι η ανισότητα Poincaré που προσδιορίζει πόσο μεγαλύτερο μπορεί να είναι το ολοκλήρωμα
366 του τετράγωνου της παραγώγου μίας συνάρτησης που μηδενίζεται στα άκρα από το ολοκλήρωμα του
367 τετράγωνου της συνάρτησης. Εξ' αυτού προκύπτει δεδομένου ότι $g(z) \geq 0$ η εκτίμηση για τον αργότερο
368 εκθέτη (19) ο οποίος σε μεγάλους χρόνους χαρακτηρίζει την εκθετική απόσβεση της διαταραχής και
369 τη χρονική κλίμακα απόσβεσής της.

370 Τώρα υπάρχει μία ιδιαίτερη ιδιοσυνάρτηση, οποία είναι πιο εύκολο να συζητηθεί στα πλαίσια της
371 (16). Είναι η

$$\hat{u}_1 = \frac{du_0}{dz}, \quad (21)$$

372 με προφανή ιδιοτιμή $\lambda = 0$! Τι διαταραχή όμως είναι η (21) και γιατί είναι προφανές, αν πράγματι
373 ικανοποιεί την (16), ότι πρέπει να έχει ιδιοτιμή $\lambda = 0$; Λόγω της ομογένειας της (1) ως προς x , αν η $u(x, t)$
374 ικανοποιεί την (1) θα την ικανοποιεί και η $u(x + \varepsilon, t)$, $\forall \varepsilon$. Ομοίως αν η $u_0(z)$ ικανοποιεί την (14) τότε
375 θα την ικανοποιεί και η μετατοπισμένη $u_0(z + \varepsilon)$. Υποθέστε τώρα ότι η διαταραχή που επιβάλλω είναι
376 μία μικρή κατά ε μετατόπιση της κυματικής λύσης, $u_0(z + \varepsilon)$. Στην γραμμική προσέγγιση η διαταραχή

377 που επιβάλλω είναι η

$$u_1(z, t) = u_0(z + \varepsilon) - u_0(z) = \varepsilon \frac{du_0}{dz} ,$$

378 η οποία προφανώς δεν θα μεταβληθεί διότι ικανοποιεί ακριβώς την εξίσωση και συνεπώς δεν έχει εξάρ-
379 τηση από τον χρόνο και έχει $\lambda = 0$. Ότι η (21) είναι ιδιοτιμή της (16) με ιδιοτιμή $\lambda = 0$ έχει κατ'ουσίαν
380 ήδη αποδειχθεί. Αλλά ας το δούμε πάλι. Αν λάβουμε την παράγωγο της (14) ως προς z έχουμε

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{du_0}{dz} \right) + c \frac{d}{dz} \left(\frac{du_0}{dz} \right) + (-1 + 2u_0) \left(\frac{du_0}{dz} \right) = 0 , \quad (22)$$

381 η οποία δίνει ότι η du_0/dz ικανοποιεί την (16) και τις συνοριακές συνθήκες με $\lambda = 0$ (είναι σίγουρα
382 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} du_0/dz = 0$).

383 **Άσκηση:** Από την (19) δημιουργείται η υποψία ότι ο ρυθμός απόσβεσης των διαταραχών
384 μικραίνει όσο μεγαλώνει το εύρος των διαταραχών. Εξετάστε αυτή την πρόταση με αριθμη-
385 τικά πειράματα.