Διάφορα

7 Μαρτίου 2026

1 Ο τελεστής μεταθέσεων σε ένα πλέγμα και οι ιδιοκαταστάσεις του

Λαμβάνουμε τα διακριτά σημεία επί της ευθείας $x = na$ με $n \in \mathbb{Z}$ που έχουν απόσταση μεταξύ τους ίση με a και συντεταγμένες που είναι ακέραια πολλαπλάσια του a και συναρτήσεις που είναι ορισμένες πάνω σε αυτό το πλέγμα. Το σύνολο των σημείων του πλέγματος αναφέρεται ως $a\mathbb{Z}$. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό μετάθεσης

$$T_a : \psi(x) \to \psi(x+a) \ \ , \ \ x \in a\mathbb{Z} \ , \tag{1}$$

όπου οι διακριτές τιμές της συνάρτησης μετατίθενται κατά a. Θα δείξουμε ότι ο τελεστής T_a είναι μοναδιακός (unitary) ως προς το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle \psi(x) | \varphi(x) \rangle = a \sum_{x \in a\mathbb{Z}} \psi^*(x) \varphi(x) \ . \tag{2}$$

Το άθροισμα έχει πολλαπλασιαστεί με το a ώστε όταν $a \to 0$ η (**??**) να τείνει στο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\varphi(x)$. Το εσωτερικό γινόμενο αυτό είναι το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο των συναρτήσεων.

Ο αντίστροφος του T_a είναι:

$$T_a^{-1} = T_{-a} \ , \tag{3}$$

Ο συζυγής τελεστής ορίζεται ως ο τελεστής $T_a^\dagger$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T_a^\dagger \psi(x) | \varphi(x) \rangle = \langle \psi(x) | T_a \varphi(x) \rangle \ . \tag{4}$$

Συνεπώς είναι $T_a^\dagger = T_{-a}$ διότι

$$
\begin{aligned}
\langle \psi(x) | T_a \varphi(x) \rangle &= a \sum_{x \in a\mathbb{Z}} \psi^*(x) \varphi(x+a) \\
&= a \sum_{x \in a\mathbb{Z}} \psi^*(x-a) \varphi(x) \\
&= a \sum_{x \in a\mathbb{Z}} T_{-a} \psi^*(x) \varphi(x) \\
&= a \sum_{x \in a\mathbb{Z}} (T_{-a} \psi(x))^* \varphi(x) \\
&= \langle T_{-a} \psi(x) | \varphi(x) \rangle \,,
\end{aligned}
$$

και ο T_a είναι μοναδιακός, διότι ικανοποιεί τη σχέση:

$$
T_a T_a^\dagger = T_a^\dagger T_a = \mathbb{1} \,, \tag{5}
$$

και οι ιδιοκαταστάσεις του σχηματίζουν πλήρη ορθογώνια βάση.

Οι μοναδιακοί τελεστές ή πίνακες είναι ειδική περίπτωση κανονικών τελεστών ή πινάκων (normal operators or matrices) Οι *κανονικοί τελεστές ορίζονται ως αυτοί που αντιμετατίθενται με τον συζυγή τους. Δηλαδή οι κανονικοί τελεστές ή πίνακες* *ικανοποιούν τη σχέση:*

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger \,.$$

Οι Ερμιτιανοί τελεστές ή πίνακες καθώς και οι συμμετρικοί και οι ορθογώνιοι πραγματικοί πίνακες όριζουν άλλους κανονικούς μετασχηματισμούς.

Θα αποδείξουμε ότι όλοι οι κανονικοί πίνακες έχουν πλήρες φάσμα ιδιοτιμών και ορθογωνίων ιδιοκαταστάσεων. Το ίδιο ισχύει και για του συμπαγείς συνεχείς τελεστές πάνω σε χώρους Hilbert, οι οποίοι μπορούν να θεωρηθούν ως το συνεχές όριο αντιστοίχων πεπερασμένων πινάκων.

Οι μη κανονικοί πίνακες, οι οποίοι εμφανίζονται συνηθέστατα στη Μηχανική, δεν έχουν αναγκαστικά πλήρη βάση ιδιοκαταστάσεων, και όταν έχουν οι ιδιοκαταστάσεις δεν είναι αναγκαστικά ορθογώνιες, και αυτό μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα συμπεράσματα για την εξέλιξη του συστήματος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μη κανονικού πίνακα είναι ο πίνακας τύπου Jordan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ο οποίος έχει μόνο μία ιδιοκατάσταση την $[1,0]^T$ με ιδιοτιμή $\lambda = 0$ η οποία δεν καλύπτει όλο τον δισδιάστατο χώρο.

Θα αποδείξουμε ότι όλοι κανονικοί πίνακες σε πεπερασμένες διαστάσεις έχουν πλήρες φάσμα ιδιοτιμών και ορθογωνίων ιδιοκαταστάσεων. Παρατηρούμε τα εξής:

α) Κάθε πίνακας έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή και μία ιδιοκατάσταση. Διότι αν δεν υπήρχε κανένα λ και x ώστε να είναι $\mathbf{A}x = \lambda x$ τότε ο πίνακας $\mathbf{A} - \lambda\mathbb{1}$ θα ήταν αντιστρέψιμος για κάθε λ και η ορίζουσα $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{1})$ δεν θα μηδενιζόταν $\forall\lambda$. Αλλά αυτό είναι άτοπο, διότι η ορίζουσα $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{1})$ ορίζει ένα πολυώνυμο ως προς λ το οποίο από το θεμελιώδεςς θεώρημα της άλγεβρας του Gauss θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα και συνεπώς δεν είναι δυνατόν $\forall\lambda$ να είναι $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{1}) \neq 0$.

β) Εστω τώρα x μία ιδιοκατάσταση με ιδιοτιμή λ ενός κανονικού τώρα πίνακα $\mathbf{A}$. Τότε ο συζυγής $\mathbf{A}^\dagger$ έχει την ίδια ιδιοκατάσταση x με ιδιοτιμή την λ^*. Αυτό προκύπτει διότι αν $\mathbf{A}x = \lambda x$ τότε θα είναι $\langle(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{1})x|(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{1})x\rangle = 0$ και λόγω της κανονικότητας του $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$, θα είναι επίσης $\langle(\mathbf{A}^\dagger - \lambda^*\mathbb{1})x|(\mathbf{A}^\dagger - \lambda^*\mathbb{1})x\rangle = 0$ και συνεπώς θα ισχύει ότι $\mathbf{A}^\dagger x = \lambda^* x$.

Πράγματι:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{1})x|(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{1})x\rangle \\ &= \langle(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{1})^\dagger(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{1})x|x\rangle \\ &= \langle(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{1})(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{1})^\dagger x|x\rangle \\ &= \langle(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{1})^\dagger x|(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{1})^\dagger x\rangle \\ &= \langle(\mathbf{A}^\dagger - \lambda^*\mathbb{1})x|(\mathbf{A}^\dagger - \lambda^*\mathbb{1})x\rangle \,. \end{aligned}$$

γ) Λαμβάνω τον υποχώρο V_2 του αρχικού χώρου V_1 στον οποίον δρα ο πίνακας $\mathbf{A}$ που αποτελείται από τα διανύσματα που είναι κάθετα στην ιδιοκατάσταση x_1 του $\mathbf{A}$ με ιδιοτιμή λ_1. Ο χώρος αυτός έχει μια διάσταση λιγότερη από τον αρχικό, έστω $n-1$ αν ο αρχικός χώρος που δρούσε ο $\mathbf{A}$ είχε διάσταση n. Θα δείξουμε ότι οι καταστάσεις $y \in V_2$ παραμένουν στον V_2 όταν μετασχηματίζονται από τον $\mathbf{A}$. Δηλαδή αν $\langle y|x_1\rangle = 0$ τότε επίσης $\langle\mathbf{A}y|x_1\rangle = 0$ και συνεπώς ο $\mathbf{A}V_2$ είναι υποχώρος του V_2.

Πράγματι:

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{A}y|x_1\rangle &= \langle y|\mathbf{A}^\dagger x_1\rangle \\ &= \langle y|\lambda_1^* x_1\rangle \\ &= \lambda_1^*\langle y|x_1\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς αν περιορίσουμε τον $\mathbf{A}$ να δρα στον υποχώρο V_2, ο $\mathbf{A}$ είναι καλώς ορισμένος και είναι ένας κανονικός μετασχηματισμός σε ένα χώρο διάστασης $n-1$. Τότε και πάλι ο κανονικός μετασχηματισμός αυτός δρώντας στον χώρο V_2 θα έχει μία ιδιοκατάσταση x_2 η οποία θα ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{A}x_2 = \lambda_2 x_2$ και η ιδιοκατάσταση αυτή θα είναι βεβαίως ορθογώνια στην x_1. Ορίζουμε τώρα τον χώρο V_3 που είναι κάθετος στις ιδιοκαταστάσεις x_1 και x_2, στον οποίο όταν δρα ο $\mathbf{A}$ θα έχει πάλι κάποια ιδιοκατάσταση x_3. Έτσι κατασκευάζουμε διαδοχικά κάθετες ιδιοκαταστάσεις περιορίζοντας τη δράση του $\mathbf{A}$ σε χώρους χαμηλότερης διάστασης μέχρις ότου εξαντληθούν οι διαστάσεις και δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε άλλο κάθετο υποχώρο. Αποδείξαμε έτσι ότι κάθε κανονικός πίνακας έχει μία πλήρη βάση ορθογωνίων ιδιοκαταστάσεων.

Προσδιορίζουμε τώρα τις ιδιοτιμές και τις ιδιοκαταστάσεις του T_a. Επειδή ο T_a είναι μοναδιαίος θα έχει ιδιοτιμές μοναδιαίου μέτρου, τις $e^{i\vartheta}$ με ϑ στο διάστημα $-\pi < \vartheta \leq \pi$, με αντιστοιχούσες ιδιοκαταστάσεις τις $\psi_\vartheta(x) = e^{i\vartheta x/a}$, $x \in a\mathbb{Z}$, διότι πράγματι

$$\begin{aligned} T_a \psi_\vartheta(x) &= \psi_\vartheta(x+a) \\ &= e^{i\vartheta(x+a)/a} \\ &= e^{i\vartheta} e^{i\vartheta x/a} \\ &= e^{i\vartheta} \psi_\theta(x) \ . \end{aligned}$$

Το φάσμα του T_a στο άπειρο πλέγμα, στο οποίο δεν έχουμε επιβάλλει συνοριακές συνθήκες, είναι συνεχές και είθισται να χαρακτηρίζεται από τον κυματάριθμο k γράφοντας το θ ως $\theta = ka$ έτσι ώστε στην ιδιοτιμή

$$\lambda_k = e^{ika} \ , \ -\frac{\pi}{a} < k \leq \frac{\pi}{a} \ , \tag{6}$$

να αντιστοιχεί η κανονικοποιημένη, όπως θα δείξουμε, $|k\rangle$ ιδιοκατάσταση:

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \ \ x \in a\mathbb{Z} \ . \tag{7}$$

Το διάστημα στο οποίο το k λαμβάνει τιμές αναφέρεται ως πρώτη ζώνη Brillouin. Αν το πλέγμα ήταν πεπερασμένο με περιοδικές συνοριακές συνθήκες τότε ο αριθμός των ιδιοκαταστάσεων θα ήταν πεπερασμένος.

Η βάση (**??**) είναι πράγματι ορθοκανονική δηλαδή είναι

$$\begin{aligned} \langle k | k' \rangle &= a \sum_{x \in a\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} e^{-ikx} e^{ik'x} \\ &= \frac{a}{2\pi} \sum_{x \in a\mathbb{Z}} e^{-i(k-k')x} \\ &= \delta(k-k') \ , \end{aligned}$$

διότι θα δείξουμε ότι

$$\frac{a}{2\pi} \sum_{x \in a\mathbb{Z}} e^{-ikx} = \delta(k) \ .$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk \left(\frac{a}{2\pi} \sum_{x \in a\mathbb{Z}} e^{-ikx} \right) &= \sum_{x \in a\mathbb{Z}} \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk e^{-ikx} \\ &= \sum_{x \in a\mathbb{Z}} \frac{\sin(\pi x/a)}{\pi x/a} \\ &= 1 \ . \end{aligned}$$

Επίσης και
$$\frac{a}{2\pi}\sum_{x\in a\mathbb{Z}} e^{ikx} = \delta(k) \; .$$

2 Μετασχηματισμός Fourier συνάρτησης ορισμένης σε πλέγμα

Η πληρότης του φάσματος των ιδιοσυναρτήσεων του T_a δίνει τη δυνατότητα αναπτύγματος κάθε συνάρτησης $\psi(x)$ ορισμένης στο πλέγμα $x \in a\mathbb{Z}$ στη βάση των ιδιοσυναρτήσεων ως

$$\psi(x) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \hat{\psi}(k)\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}dk \; , x \in a\mathbb{Z}, \tag{8}$$

Αυτό το ανάπτυγμα ονομάζεται και ανάπτυγμα Fourier των διακριτών τιμών της συνάρτησης. Στο όριο $a \to 0$ ανακτούμε το ανάπτυγμα κατά Fourier μίας συνάρτησης ορισμένης στην πραγματική ευθεία.

Η παραπάνω σχέση μπορεί να αντιστραφεί. Είναι:

$$\hat{\psi}(k) = a\sum_{x\in a\mathbb{Z}} \psi(x)\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \; . \tag{9}$$

Επειδή $\hat{\psi}(k) = \hat{\psi}(k + 2\pi/a)$, η συνάρτηση $\hat{\psi}(k)$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi/a$ και συνεπώς η συνάρτηση ορίζεται πλήρως από τις τιμές της στο διάστημα $[-\pi/a, \pi/a]$ που επιλέχτηκε.

Θα δείξουμε ότι οι συντελεστές (**??**) *αποτελούν τους συντελεστές της ανάλυσης Fourier της $\psi(x)$, δηλαδή είναι:*

$$\psi(x) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \hat{\psi}(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} dk \, , x \in a\mathbb{Z} \, . \tag{10}$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/a}^{\pi/a} \hat{\psi}(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} dk &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{a}{2\pi} \sum_{x' \in a\mathbb{Z}} \psi(x') e^{-ik(x'-x)} \, dk \\
&= \sum_{x' \in a\mathbb{Z}} \psi(x') \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{a}{2\pi} e^{-ik(x'-x)} \, dk \\
&= \sum_{x' \in a\mathbb{Z}} \psi(x') \frac{\sin(\pi(x'-x)/a))}{\pi(x'-x)/a} \\
&= \sum_{x' \in a\mathbb{Z}} \psi(x') \delta_{xx'} \\
&= \psi(x) \, .
\end{aligned}$$

Η $\delta_{x'x}$ είναι η διακριτή δέλτα του Kronecker η οποία είναι ίση με 1 όταν τα σημεία x και x' είναι τα ίδια στο πλέγμα και είναι μηδέν αλλιώς. Επειδή όταν $a \to 0$ είναι

$$a \sum_{x' \in a\mathbb{Z}} \delta_{xx'} \to \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \, dx \, ,$$

μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στο όριο $a \to 0$ έχουμε

$$\frac{\delta_{xx'}}{a} \to \delta(x) \tag{11}$$

και ανακτούμε την ανάλυση μίας συνάρτησης της πραγματικής ευθείας κατά Fourier, με τον αντίστροφο μετασχηματισμό:

$$\hat{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx \quad , \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(k) e^{ikx} dk \, , x \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

με το k να λαμβάνει τιμές σε όλη την πραγματική ευθεία $(-\infty, \infty)$ και το $x \in \mathbb{R}$. Οι γνωστές σχέσεις που ισχύουν στους συνεχείς μετασχηματισμούς μετατρέπονται στις ανάλογες διακριτές σχέσεις, όπως π.χ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{2\pi} dx = \delta(k) \to a \sum_{x \in a\mathbb{Z}} \frac{e^{-ikx}}{2\pi} = \delta(k). \tag{13}$$

3 Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης μιας άπειρης γραμμικής αλυσίδας ταλαντωτών

Έστω μία άπειρη σειρά σωματιδίων μάζας M που βρίσκονται στην ευθεία και συνδέονται μεταξύ τους με γραμμικά ελατήρια σταθεράς K και φυσικού μήκους a. Στη κατάσταση ισορροπίας τα σωματίδια βρίσκονται στα σημεία $x \in a\mathbb{Z}$, που είναι ακέραια πολλαπλάσια του a. Έστω τώρα $\psi(x,t)$ η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας του σωματιδίου που βρισκόταν στο σημείο του πλέγματος $x \in a\mathbb{Z}$ μίας, η οποία στο $n \in \mathbb{Z}$ σημείο του πλέγματος θα σημειώνεται και ως ψ_n, δηλαδή $\psi_n = \psi(na,t)$. Η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$\begin{aligned}
L &= a \sum_{n \in \mathbb{Z}} M\dot{\psi}_n^2 - K(\psi_n - \psi_{n+1})^2 \\
&= a \sum_{x \in a\mathbb{Z}} M \left(\frac{d\psi(x,t)}{dt} \right)^2 - K(2\psi(x,t)^2 - \psi(x-a)\psi(x,t) - \psi(x,t)\psi(x+a,t)) \, .
\end{aligned} \tag{14}$$

Η Λαγκρανζιανή των ταλαντωτών είναι αναλλοίωτη στις μεταθέσεις

$$T_a : \psi(x,t) \to \psi(x+a,t) \ \ , \ \ x \in a\mathbb{Z} \, .$$

Θα δείξουμε ότι αυτή η διακριτή συμμετρία επιβάλλει οι χαρακτηριστικοί τρόποι ταλάντωσης της αλυσίδας να είναι ακριβώς οι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή T_a. Δηλαδή οι χαρακτηριστικοί τρόποι ταλάντωσης είναι της μορφής $e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$, $x \in a\mathbb{Z}$ και με το k να λαμβάνει συνεχείς τιμές στο διάστημα $-\pi/a \le k \le \pi/a$.

Θα δείξουμε ότι αν εκφράσουμε την (**??**) ως προς τις $\hat{\psi}(k,t)$ μέσω της

$$\psi(x,t) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk \; \hat{\psi}(k,t) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \; ,$$

τότε η Λαγκρανζιανή στην οποία υπάρχει σύζευξη μεταξύ των μετατοπίσεων των σωματιδίων "διαγωνοποιείται", δηλαδή χωρίζει σε ανεξάρτητους ταλαντωτές. Θα κάνουμε χρήση των εξής σχέσεων τύπου Parceval:

$$\begin{aligned}
a \sum_{x \in a\mathbb{Z}} \psi(x,t)^2 &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk \; \hat{\psi}(k,t)\hat{\psi}(k)^* \; , \\
a \sum_{x \in a\mathbb{Z}} \psi(x-a,t)\psi(x,t) &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk \; e^{-ika} \; \hat{\psi}(k,t)\hat{\psi}(k,t)^* \; , \\
a \sum_{x \in a\mathbb{Z}} \psi(x,t)\psi(x+a,t) &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk \; e^{ika} \; \hat{\psi}(k,t)\hat{\psi}(k,t)^* \; .
\end{aligned}$$

Διότι αφενός έχουμε:

$$\begin{aligned}
a\sum_{x\in a\mathbb{Z}}\psi(x,t)^2 &= \sum_{x\in a\mathbb{Z}}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk\,\hat{\psi}(k,t)\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk'\,\hat{\psi}(k',t)\frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2\pi}}\\
&= \int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk\,\hat{\psi}(k,t)\int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk'\,\hat{\psi}(k',t)\left(\frac{a}{2\pi}\sum_{x\in a\mathbb{Z}}e^{i(k+k')x}\right)\\
&= \int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk\,\hat{\psi}(k,t)\int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk'\,\hat{\psi}(k',t)\delta(k+k')\\
&= \int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk\,\hat{\psi}(k,t)\hat{\psi}(-k,t)\\
&= \int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk\,\hat{\psi}(k,t)\hat{\psi}(k,t)^*\,.
\end{aligned}$$

Στο τελευταίο βήμα θέσαμε $\hat{\psi}(-k,t)=\hat{\psi}(k,t)$ που απαιτείται για να είναι οι μετατοπίσεις $\psi(x,t)$ πραγματικοι αριθμοί. Και αφετέρου:

$$\begin{aligned}
a\sum_{x\in a\mathbb{Z}}\psi(x\pm a,t)\psi(x,t) &= \sum_{x\in a\mathbb{Z}}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk\,\hat{\psi}(k,t)\frac{e^{ik(x\pm a)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk'\,\hat{\psi}(k',t)\frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2\pi}}\\
&= \int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk\,\hat{\psi}(k,t)\,e^{\pm ika}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk'\,\hat{\psi}(k',t)\left(\frac{a}{2\pi}\sum_{x\in a\mathbb{Z}}e^{i(k+k')x}\right)\\
&= \int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk\,\hat{\psi}(k,t)\,e^{\pm ika}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk'\,\hat{\psi}(k',t)\delta(k+k')\\
&= \int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk\,e^{\pm ika}\,\hat{\psi}(k,t)\hat{\psi}(-k,t)\\
&= \int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk\,e^{\pm ika}\,\hat{\psi}(k,t)\hat{\psi}(k,t)^*\,.
\end{aligned}$$

Συνεπώς η Λαγκρανζιανή στις μεταβλητές $\hat{\psi}_k \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\psi}(k,t)$ έχει διαγωνοποιηθεί:

$$L \;=\; \int_{-\pi/a}^{\pi/a}dk\left(M\frac{d\hat{\psi}_k}{dt}\frac{d\hat{\psi}_k^*}{dt}-K(2-e^{ika}-e^{-ika})\hat{\psi}_k\hat{\psi}_k^*\right)\;,$$

και έχει γίνει ένα σύστημα άπειρων ταλαντωτών χωρίς σύζευξη μεταξύ τους και οι εξισώσεις Euler-Lagrange της Λακρανζιανής πυκνότητας $\mathcal{L}=M\dot{\psi}_k\dot{\psi}_k^*-K(2-e^{ika}-e^{-ika})\hat{\psi}_k\hat{\psi}_k^*=0$ οδηγούν στις συζυγείς εξισώσεις κίνησης:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_k^*}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_k^*}=0\,,\;\;\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_k}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_k}=0$$

και κάθε ταλαντωτής k εκτελεί ταλάντωση:

$$\frac{d^2\hat{\psi}_k}{dt^2}+\omega_k^2\hat{\psi}_k=0\;\;, \tag{15}$$

με χαρακτηριστική συχνότητα:

$$\omega_k^2=\frac{2K}{M}(1-\cos(ka))\;\;,\;\;k\in\left(\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a}\right]\;. \tag{16}$$

Οι μετατοπίσεις που αντιστοιχούν σε αυτό τον k τρόπο ταλάντωσης είναι:

$$\psi(x,t) = \Re(A\, e^{i(kx+\omega_k t)})\,.$$

Ομοίως βρίσκουμε τις χαρακτηριστικές συχνότητες ταλάντωσης όταν οι αλληλεπιδράσεις δεν περιορίζονται μόνο σε γειτονικά άτομα με Λαγκρανζιανή:

$$L \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} M\dot{\psi}_n^2 - \sum_{m=1}^{\infty} K_m(\psi_n - \psi_{n+m})^2\,.$$