



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Τελικό τεστ Μη Γραμμικής Δυναμικής

17/6/2022

Σύνολο μορίων 135

1. Θεωρήστε τον αρμονικό ταλαντωτή

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -4x,$$

με Ευκλείδεια μετρική, έτσι ώστε το εσωτερικό γινόμενο δύο καταστάσεων $[x_1, y_1]^T, [x_2, y_2]^T$ να είναι $x_1x_2 + y_1y_2$.

α) Σχεδιάστε μία τροχιά του συστήματος στο επίπεδο (x, y) και από το σχήμα, χωρίς πράξεις, προσδιορίστε τις ιδιάζουσες τιμές του διαδότη ταλαντωτή, $\Phi(\pi/4)$, που εξελίσσει το σύστημα για χρόνο $\pi/4$. [10]

β) Προσδιορίστε την ιδιάζουσα ανάλυση του διαδότη $\Phi(\pi/4) = U\Sigma V^\dagger$, προσδιορίζοντας τις ιδιάζουσες τιμές καθώς και τα αντίστοιχα ιδιάζοντα διανύσματα v_1, v_2 του πίνακα V , και u_1, u_2 του πίνακα U . [5]

γ) Σχηματίζουμε τώρα το περιοδικό σύστημα το οποίο για χρονικό διάστημα $\pi/4$ διέπεται από τις $\dot{x} = y, \dot{y} = -4x$, και αμέσως μετά και επί χρονικό διάστημα π από τις $\dot{x} = y, \dot{y} = -x/4$, και ξανά πάλι. Προσδιορίστε τον χαρακτηριστικό εκθέτη Lyapunov του συστήματος. [15]

δ) Το αποτέλεσμα της γ) εξαρτάται από την επιλογή της μετρικής; [10]

2. Η συνάρτηση $V(t) = x^2 + y^2$ επί των τροχιών δυναμικού συστήματος στο επίπεδο (x, y) μειώνεται μονότονα με τον χρόνο, είναι $\dot{V} < 0$, όταν $x^2 + y^2 \geq 1$. Δείξτε ότι οι τροχιές του δυναμικού συστήματος δεν μπορούν να εξέλθουν εκτός του κύκλου $x^2 + y^2 < 1$ και συνεπώς η κίνηση είναι φραγμένη. Ισχύει η πρόταση αυτή αν το σύστημα δεν είναι αυτόνομο; [10]

3. Δυναμικό σύστημα στο επίπεδο (x, y) εξελίσσεται σύμφωνα με την:

$$\dot{x} = x^2 + y, \quad \dot{y} = x - y.$$

α) Σχεδιάστε τις καμπύλες μηδενικής κλίσης και τη διεύθυνση της ροής του διανυσματικού πεδίου της ροής του δυναμικού συστήματος σε όλες τις περιοχές του επιπέδου. [5]

β) Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας και σχεδιάστε τοπικά τις αναλλοίωτες διευθύνσεις του γραμμικοποιημένου συστήματος, αν αυτές υπάρχουν, καθώς και τη ροή της γραμμικοποιημένης δυναμικής στην περιοχή των σημείων ισορροπίας, εξηγώντας αν αυτή η εικόνα έχει και μη γραμμική ισχύ. [5]

γ) Σχεδιάστε τη μη γραμμική εξέλιξη των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων των σημείων ισορροπίας. [10]

δ) Σχεδιάστε τώρα τη ροή του δυναμικού συστήματος και σημειώστε την περιοχή του επιπέδου που οδηγεί σε φραγμένες λύσεις. [10]

4. (α) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών για την οιονεί-γραμμική εξίσωση:

$$u_t + cu_x + u^2 = 0, \quad c = \text{const.}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

[10]

- (β) Αν $f(x) = \cos x$, να βρεθεί ο χρόνος θραύσης t_B στον οποίο η λύση θα ‘εκραγεί’, και να βρεθούν τα σημεία x στα οποία θα λάβει χώρα η έκρηξη. Στην περίπτωση αυτή, με $f(x) = \cos x$, να σχεδιασθεί πρόχειρα η χρονική εξέλιξη της λύσης $u(x, t)$, για $c = 2\pi$.

[15]

5. Έστω η λεγόμενη ‘βελτιωμένη’ εξίσωση Boussinesq (improved Boussinesq equation (IBE)):

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \mu u_{xxtt} - \nu (u^2)_{xx} = 0,$$

όπου η συνάρτηση $u(x, t)$ και οι παράγωγοί της ικανοποιούν ομογενείς συνοριακές συνθήκες για $x \rightarrow \pm\infty$, και $\{c, \mu, \nu\} \in \mathbb{R}_+$. Ζητούνται:

- (α) Να προσδιοριστεί η σχέση διασποράς της IBE. Να βρεθούν οι συνθήκες υπό τις οποίες η σχέση διασποράς της IBE ταυτίζεται με τη σχέση διασποράς της εξίσωσης KdV:

$$u_t + cu_x - \gamma u_{xxx} + \delta uu_x = 0.$$

[10]

- (β) Να αναζητηθούν λύσεις της IBE της μορφής οδευόντων κυμάτων,

$$u = \Phi(\xi), \quad \xi = x - vt, \quad v = \text{const.},$$

- και να διερευνηθεί εάν —και υπό ποιές συνθήκες— η IBE επιδέχεται λύση σολιτονίου.

[20]