



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Τελικό τεστ Μη Γραμμικής Δυναμικής

14/6/2021

Λύστε τα 3 από τα πρώτα 5 προβλήματα (1-5) και ένα από τα ακόλουθα 2 (6 έως 7).

1. Δυναμικό σύστημα στο επίπεδο εξελίσσεται σύμφωνα με την:

$$\dot{r} = r(r^2 - 1) \quad , \quad \dot{\theta} = 1 \quad ,$$

όπου (r, θ) οι πολικές συντεταγμένες των σημείων του επιπέδου. Σχεδιάστε τις τροχιές του συστήματος, σημειώνοντας τα σημεία ισορροπίας και τις υπάρχουσες περιοδικές τροχιές.

2. Σύστημα στο επίπεδο εξελίσσεται σύμφωνα με τη δυναμική

$$\dot{x} = -2x - 3y \quad , \quad \dot{y} = 8x + 8y \quad .$$

Σχεδιάστε τις αναλλοίωτες πολλαπλότητες και τις τροχιές που παράγονται από το δυναμικό σύστημα.

3. Περιοδικό πραγματικό γραμμικό δυναμικό σύστημα στο επίπεδο έχει διαδότη μίας περιόδου τον πίνακα:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \quad .$$

(α) Προσδιορίστε το εμβαδόν χωρίου που είχε αρχικά μοναδιαίο εμβαδόν μετά από 10 περιόδους.

(β) Προσδιορίστε την ευστάθεια ή αστάθεια του δυναμικού συστήματος και υπολογίστε και την τιμή του ρυθμού εκθετικής αστάθειας του συστήματος εάν η περίοδος είναι μια μονάδα του χρόνου.

(γ) Υπάρχουν σε αυτό το δυναμικό σύστημα πραγματικές αναλλοίωτες καταστάσεις;

4. Δίνεται ο ασθενώς μη γραμμικός ταλαντωτής

$$\ddot{x} + x - \varepsilon(x + 3)(x - 1)\dot{x} = 0$$

όπου $0 < \varepsilon \ll 1$.

(α) Γράψτε το αντιστοιχούν πρωτοβάθμιο δυναμικό σύστημα στο επίπεδο (x, y) όπου $y = \dot{x}$.

(β) Οι τροχιές του δυναμικού συστήματος σε αυτό το επίπεδο μπορούν να τμηθούν; Εξηγήστε την απάντησή σας.

(γ) Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας.

(δ) Γραμμικοποιήστε το σύστημα περί τα σημεία ισορροπίας, προσδιορίστε την ευστάθεια των σημείων και σχεδιάστε τις τροχιές πλησίον των σημείων στη γραμμική προσέγγιση.

(ε) Εξηγήστε αν τα συμπεράσματά σας από τη γραμμική ανάλυση για την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας ισχύουν για το μη γραμμικό σύστημα.

(στ) Γνωρίζουμε ότι ο ταλαντωτής αυτός έχει περιοδική τροχιά. Τι σχήμα αναμένεται να έχει αυτή η τροχιά και τι περίοδο αναμένεται να έχει. Μονολεκτικά εξηγήστε την απάντησή σας.

(ζ) Προσδιορίστε κάνοντας χρήση του ισοζυγίου ενέργειας την περιοδική αυτή τροχιά.

5. Στα διαγράμματα που ακολουθούν έχουν σχεδιαστεί οι χαρακτηριστικές των πεδίων $u(x, t)$ όταν $u(x, 0) = 1/(1 + x^2)$ και η εξέλιξη γίνεται με τις εξής δυναμικές:

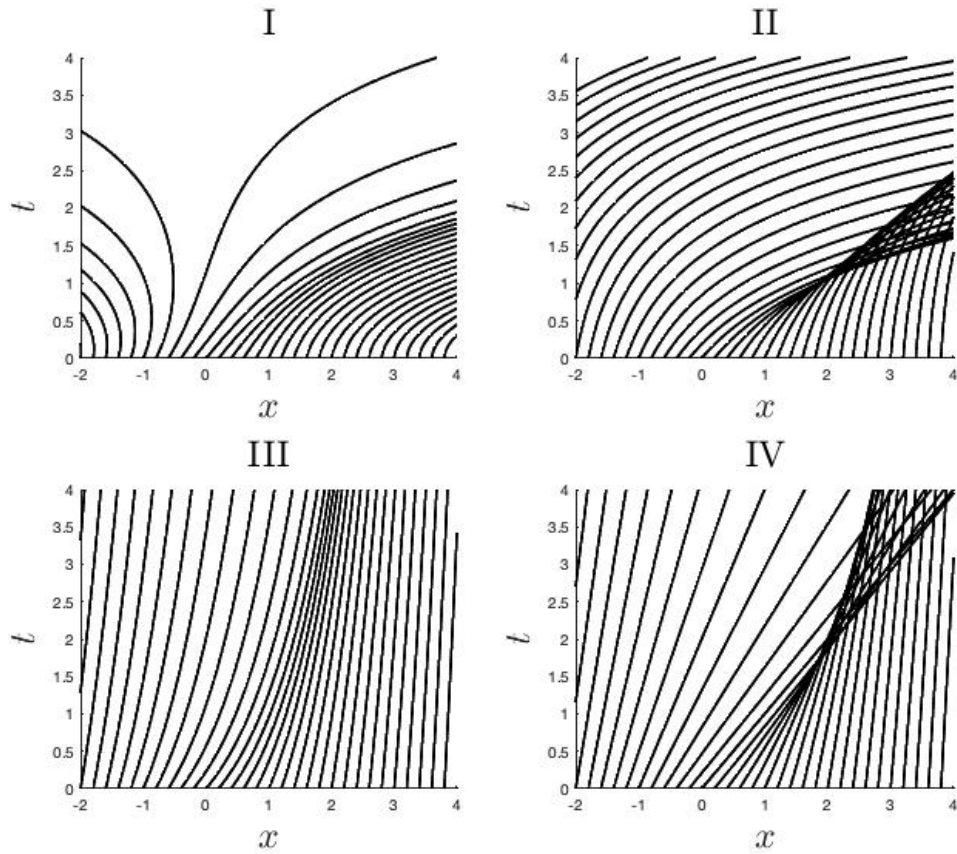
(α) $u_t + uu_x = 0$

(β) $u_t + uu_x = u$

(γ) $u_t + uu_x = x$

(δ) $u_t + uu_x = -u^2$.

Σημειώστε ποιο διάγραμμα αντιστοιχεί σε ποιά εξίσωση εξηγώντας με λίγες γραμμές την επιλογή σας.



Σχήμα 1

6. Το πάχος της μπογιάς $\eta(x, t)$ που εναποτίθεται σε μία κατακόρυφη επιφάνεια ρέει υπό την επίδραση της βαρύτητας και εξελίσσεται σύμφωνα με την κατάλληλα αδιαστατικοποιημένη εξίσωση συνέχειας:

$$\eta_t + \left(\frac{\eta^3}{3} \right)_x = 0 \quad . \quad (1)$$

(ο κύβος προέρχεται διότι η ταχύτητα της μπογιάς είναι παραβολική συνάρτηση της απόστασης από τον τοίχο και η παροχή κυβική συνάρτηση του πάχους του ρευστού). Αρχικά η μπογιά περιορίζεται στη λωρίδα $0 < x < 1$ έτσι ώστε

$$\eta(x, 0) = \begin{cases} 0 & , \quad x > 1, \\ 1 & , \quad x \leq 1. \end{cases}$$

Κατά την εξέλιξη σχηματίζεται κρουστικό κύμα που αποτρέπει να γίνει η $\eta(x, t)$ πλειότιμη συνάρτηση του x .

(α) Προσδιορίστε μια διατηρήσιμη ποσότητα αυτής της δυναμικής.

(β) Σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές καμπύλες της δυναμικής σε χωροχρονικό διάγραμμα (x, t) και σημειώστε στο διάγραμμα αυτό τη χωροχρονική εξέλιξη του κρουστικού κύματος.

(γ) Σχεδιάστε την η συναρτήσει του x την χρονική στιγμή $t = 1$ και $t = 2$.

(δ) (Bonus ερώτημα) Ένας μαθηματικός υποστηρίζει ότι η παραπάνω δυναμική είναι ισοδύναμη με αυτήν της εξίσωσης Hopf, διότι πολλαπλασιάζοντας την (??) με την 2η έχουμε $2\eta\eta_t + \eta^2 2\eta_x = 0$ ή

$$u_t + uu_x = 0 \quad , \quad (2)$$

αν θέσουμε $u = \eta^2$. Προσδιορίστε τώρα την ταχύτητα του κρουστικού κύματος στην αναπαράσταση (??) της αρχικής δυναμικής και εξηγήστε γιατί η αναπαράσταση (??) ενώ φαίνεται ισοδύναμη με την (??), τελικά δεν είναι.

7. Έστω η εξίσωση Boussinesq:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \frac{1}{2} u_{xxxx} - \frac{3}{2} (u^2)_{xx} = 0 \quad ,$$

όπου η συνάρτηση $u(x, t)$ και οι παράγωγοί της κάθε τάξης μηδενίζονται για $x \rightarrow \pm\infty$. Θεωρείστε λύσεις οδοντών κυμάτων της μορφής

$$u = \varphi(\xi) \quad , \quad \xi = x - vt \quad .$$

(α) Χρησιμοποιώντας το μη-γραμμικό σύστημα για τη συνάρτηση $\varphi(\xi)$ διερευνήστε αν υπάρχουν λύσεις που είναι συμβατές με τις συνοριακές συνθήκες όταν είναι $v > c$ και όταν είναι $v < c$.

(β) Προσδιορίστε τη λύση σολιτονίου της εξίσωσης Boussinesq γράφοντας την εξίσωση που ικανοποιεί και τις αρχικές τιμές που θα χρησιμοποιούσατε για να την ολοκληρώσετε. Χωρίς να ολοκληρώσετε την εξίσωση προσδιορίστε το μέγιστο πλάτος του σολιτονίου και σχεδιάστε το σχήμα του κάποια χρονική στιγμή.