ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση Μη Γραμμικής Δυναμικής

30/5/2025

Σύνολο μορίων 130

- (ΦΧ) Το δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = x(1-x) - (5/8)xy(x+y),$$
$$\dot{y} = y(1-y) - (5/8)xy(x+y)\ ,$$

περιγράφει τον ανταγωνισμό δύο πληθυσμών. Υπάρχουν μόνο τέσσερα σημεία ισορροπίας: δύο συμμετρικά, το Α $(0,0)$ και το Β $((-2+2\sqrt{6})/5, (-2+2\sqrt{6})/5) \approx (0.6, 0.6)$ και δύο ασύμμετρα το Γ $(0,1)$ και το Δ $(1,0)$. Δεν υπάρχουν άλλα σημεία ισορροπίας.

1. Περιγράψτε τι παριστάνουν οι όροι του δυναμικού συστήματος και τι υποθέσεις έχουν γίνει στον όρο της αλληλεπίδρασης. **[5]**

2. Υποστηρίζει κάποιος ότι υπάρχει ένας οριακός κύκλος ακτίνας < 0.5 γύρω από την αρχή. Εξηγήστε γιατί αυτό είναι αδύνατο (δεν απαιτείται τα x και y να είναι θετικά). **[5]**

3. Σχεδιάστε τη ροή στην περιοχή όλων των σημείων ισορροπίας. (Ο Ιακωβιανός πίνακας του σημείου Β είναι $\approx [-0.8, -0.6; -0.6, -0.8]$). **[5]**

4. Σχεδιάστε τη μη γραμμική εξέλιξη όλων των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων των σημείων ισορροπίας. **[5]**

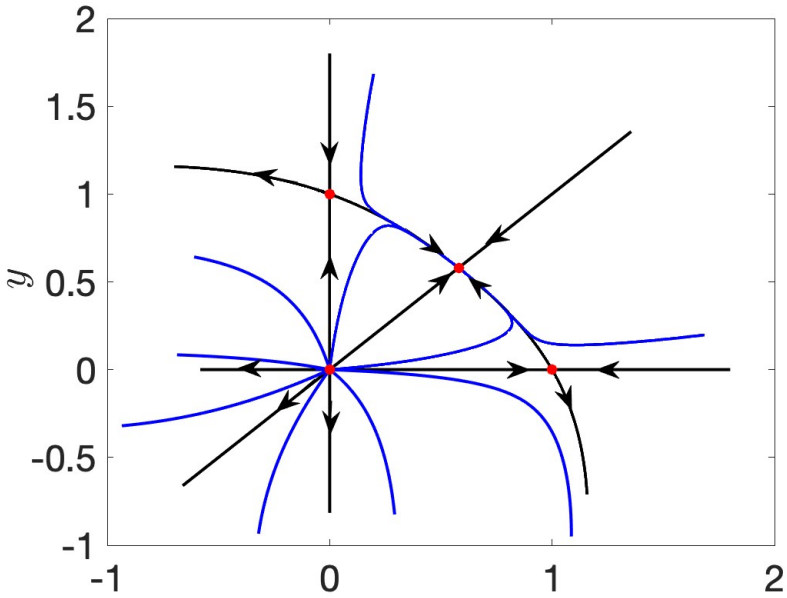
5. Σχεδιάστε τη ροή σε όλο το επίπεδο. Ποια είναι ασυμπτωτική συμπεριφορά αυτών των δύο πληθυσμών; **[5]**

Απάντηση

1.Το ερώτημα που τίθεται είναι τι συμβαίνει όταν δύο πανομοιότυποι πληθυσμοί που εξελίσσονται λογιστικά αλληλεπιδρούν ανταγωνιστικά. Η αρνητική επίδραση της αλληλεπίδρασης λαμβάνεται ανάλογη της πιθανότητας να αλληλεπιδράσουν οι δύο πληθυσμοί (ο όρος xy) αλλά και ανάλογος του συνολικού πληθυσμού ($x+y$).

2. Δεν μπορεί να υπάρχει τέτοιος κύκλος διότι η τροχιά του θα έτεμνε εγκάρσια τις ευθείες $x=0$, $y=0$, $x=y$ που είναι αδύνατο διότι η ροή σε αυτές είναι στην κατεύθυνση της κάθε ευθείας (οι καμπύλες αυτές είναι αναλλοίωτες: αν $x(0)=0$ τότε και $x(t)=0$, αν $y(0)=0$ τότε και $y(t)=0$, αν $x(0)=y(0)$ τότε και $x(t)=y(t)$).

(3,4,5) Στο Σχ. 1. Οι πληθυσμοί θα καταλήξουν στην κατάσταση ισορροπίας Β και θα συνυπάρξουν με ίσους πληθυσμούς, αλλά λίγο λιγότερους από όταν δεν αλληλεπιδρούσαν.



Σχήμα 1: Μαύρες γραμμές οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες. Μπλε γραμμές άλλες τροχιές. Το $(0, 0)$ είναι ακτινωτή πηγή.

- Θεωρήστε τον ταλαντωτή $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$ του οποίου η συχνότητα $\omega(t)$ εναλλάσσεται μεταξύ ω_1 και ω_2 έτσι ώστε σε κάθε περίοδο $T = \pi/(2\omega_1) + \pi/(2\omega_2)$ να είναι:

$$\omega = \begin{cases} \omega_1, & 0 \leq t < \pi/(2\omega_1) \\ \omega_2, & \pi/(2\omega_1) \leq t < \pi/(2\omega_1) + \pi/(2\omega_2) \ . \end{cases}$$

6. Γράψτε τον διαδότη μίας περιόδου $\Phi(T)$ που προωθεί τη θέση και ταχύτητα του ταλαντωτή T μονάδες του χρόνου. **[5]**

7. Υπολογίστε τον μέγιστο και ελάχιστο εκθέτη Lyapunov του συστήματος. **[5]**

8. Τι απαιτείται ώστε να είναι ο ταλαντωτής ασταθής; **[5]**

9. Προσδιορίστε την αρχική κατάσταση που αυξάνεται με τον μέγιστο εκθέτη Lyapunov και σχεδιάστε την τροχιά του συστήματος στο επίπεδο $(x, \dot{x})$. Κάντε το ίδιο για την αρχική κατάσταση που εξελίσσεται με τον ελάχιστο εκθέτη Lyapunov. **[10]**

Απάντηση

6.

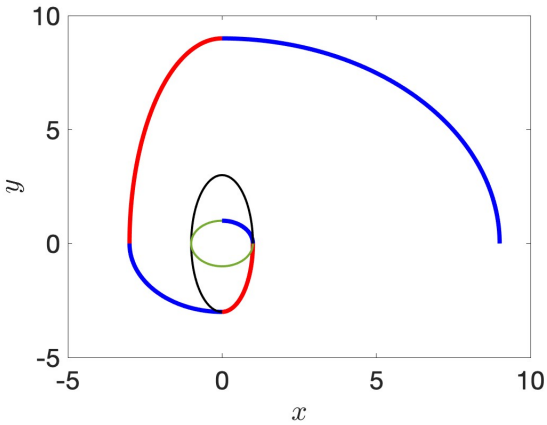
$$\mathbf{\Phi}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1/\omega_2 \\ -\omega_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\omega_1 \\ -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_1/\omega_2 & 0 \\ 0 & -\omega_2/\omega_1 \end{pmatrix}$$

7. Εάν $\omega_1 > \omega_2$ και

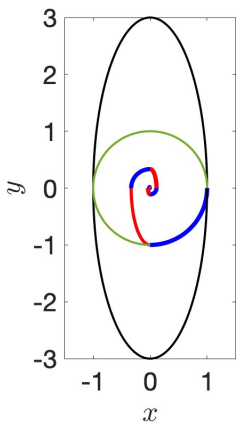
$$\lambda_{max} = \frac{1}{T} \log\left(\left|\frac{\omega_2}{\omega_1}\right|\right) \quad , \quad \lambda_{min} = \frac{1}{T} \log\left(\left|\frac{\omega_1}{\omega_1}\right|\right) = -\lambda_{max}$$

8. Είναι πάντα ασταθής, αρκεί να είναι $\omega_1 \neq \omega_2$. Η αστάθεια μεγαλώνει λογαριθμικά με τον λόγο των συχνοτήτων.

9. Εάν $\omega_2 > \omega_1$ τότε η $[0; 1]$ είναι η ιδιοκατάσταση που αυξάνεται με τον μέγιστο εκθέτη Lyapunov λ_{max} (βλ. Σχ. 2) και η $[1; 0]$ με τον ελάχιστο εκθέτη Lyapunov λ_{min} (βλ. Σχ. 3)



Σχήμα 2: Η εξέλιξη της $[0, 1]$ η οποία για $\omega_1 = 1$ και $\omega_3 = 3$ αυξάνεται εκθετικά προς το (∞, ∞) με τον μεγαλύτερο και ασταθή εκθέτη Lyapunov λ_{max}. Η μπλε γραμμή είναι η εξέλιξη της κατάστασης όταν η συχνότητα είναι ω_1 και η κόκκινη γραμμή είναι η εξέλιξη της κατάστασης όταν η συχνότητα είναι ω_3 (έχουν σχεδιασθεί 2.5 περίοδοι). Η μαύρη γραμμή είναι η εξέλιξη της $[1, 0]$ αν η συχνότητα ήταν σταθερή και ίση με ω_3. Η πράσινη γραμμή είναι η εξέλιξη της $[1, 0]$ αν η συχνότητα ήταν σταθερή και ίση με ω_1.



Σχήμα 3: Η εξέλιξη της $[1, 0]$ η οποία για $\omega_1 = 1$ και $\omega_3 = 3$ μειώνεται εκθετικά προς το $(0, 0)$ με τον μικρότερο και ευσταθή εκθέτη Lyapunov $\lambda_{min} = -\lambda_{max}$. Η μπλε γραμμή είναι η εξέλιξη της κατάστασης όταν η συχνότητα είναι ω_1 και η κόκκινη γραμμή είναι η εξέλιξη της κατάστασης όταν η συχνότητα είναι ω_3 (έχουν σχεδιασθεί 5 περίοδοι). Η μαύρη γραμμή είναι η εξέλιξη της $[1, 0]$ αν η συχνότητα ήταν σταθερή και ίση με ω_3. Η πράσινη γραμμή είναι η εξέλιξη της $[1, 0]$ αν η συχνότητα ήταν σταθερή και ίση με ω_1.

- Το δυναμικό σύστημα $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, όπου $\mathbf{x}$ στο πραγματικό επίπεδο, έχει μία περιοδική τροχιά $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t)$ περιόδου T. Αρχικές διαταραχές $\boldsymbol{\eta}(0)$ από κάποιο δεδομένο σημείο της περιοδικής τροχιάς εξελίσσονται στη γραμμική προσέγγιση μέσω του διαδότη $\mathbf{\Phi}(t)$ στο $\eta_i(t) = \Phi_{ij}(t)\eta_j(0)$.

10. Προσδιορίστε τη διαταραχή $\boldsymbol{\eta}(0)$ η οποία είναι ιδιοκατάσταση του διαδότη μίας περιόδου $\mathbf{\Phi}(T)$ με ιδιοτιμή 1. **[5]**

11. Εξηγήστε γιατί η ευστάθεια της περιοδικής τροχιάς κρίνεται από την τιμή της ποσότητας: **[5]**

$$\exp\left[\int_0^T dt\, \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{v}(\mathbf{X}(t))\right] .$$

Θεωρήστε τον μη γραμμικό αρμονικό ταλαντωτή

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2 + a\dot{x}^2)\dot{x} \ , \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \ ,$$

όπου a μία παράμετρος.

12. Αν υπάρχει περιοδική τροχιά στο επίπεδο (x, y) όπου $y = \dot{x}$ εξηγήστε α) που μπορεί να βρίσκεται αυτός, β) τι σχήμα πρέπει να έχει και γ) τι περίοδο πρέπει να έχει στο όριο $\varepsilon \to 0$. **[5]**

13. Προσδιορίστε τη συνθήκη που πρέπει να πληρεί η παράμετρος a ώστε να υπάρχει περιοδική τροχιά. (Δίδεται ότι $\int_0^{2\pi} d\theta \sin^2\theta\cos^2\theta = \pi/4$, $\int_0^{2\pi} d\theta \sin^4\theta = 3\pi/4$.) **[10]**

14. Προσδιορίστε την ευστάθεια της περιοδικής τροχιάς; Εξαρτάται η ευστάθεια από την παράμετρο a; **[10]**

Απάντηση

10. Είναι κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα στην τροχιά. Μετά από μία περίοδο επιστρέφει στην ίδια θέση με το ίδιο μέγεθος. Επομένως ο αντίστοιχος εκθέτης Lyapunov είναι 0.

11. Αυτή η ποσότητα είναι η ορίζουσα του διαδότη (που προσδιορίζει την αύξηση της επιφάνειας χωρίου διαταραχών εξελισσόμενο κατά μία περίοδο) που είναι ίση με το γινόμενο των ιδιοτιμών του διαδότη. Δεδομένου ότι μια ιδιοτιμή του διαδότη είναι 1 η άλλη που θα κρίνει τη ευστάθεια θα είναι ίση με την ορίζουσα του διαδότη. Αν είναι η ορίζουσα >1 η περιοδική τροχιά είναι ασταθής, άλλως ευσταθης και ο εκθέτης Lyapunov των διαταραχών στην περιοδική τροχιά είναι:

$$\frac{1}{T}\int_0^T dt\, \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{v}(\mathbf{X}(t)) \ .$$

12. Το μόνο σημείο ισορροπίας είναι το $(0, 0)$ που είναι ασταθής σπείρα (δείκτης 1) άρα η περιοδική τροχιά πρέπει να είναι γύρω από το $(0, 0)$ και στο όριο $\varepsilon \to 0$ όλες οι τροχιές είναι κυκλικές (διότι πλησιάζουν τις τροχιές του $\ddot{x} + x = 0$) και θα έχουν την περίοδο $T = 2\pi$ αυτού του ταλαντωτή.

13. Η ενέργεια του ταλαντωτή $E = 1/2(\dot{x}^2 + x^2)$ εξελίσσεται ως

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon(1 - x^2 + a\dot{x}^2)\dot{x}^2 \ .$$

Επί της περιοδικής τροχιάς πρέπει να είναι $\int_0^T dt\, dE/dt = 0$ συνεπώς απαιτείται να είναι στο όριο $\varepsilon \to 0$

$$\int_0^{2\pi} dt(1 - x^2 + a\dot{x}^2)\dot{x}^2 = 0 \ ,$$

όπου $x = r\cos t$, $\dot{x} = -r\sin t$, και r η άγνωστη ακτίνα της περιοδικής τροχιάς στο όριο $\varepsilon \to 0$. Δηλαδή απαιτείται

$$0 = \int_0^{2\pi} dt(r^2\sin^2 t - r^4\sin^2 t\cos^2 t + ar^4\sin^4 t) = \frac{\pi r^2}{4}(4 - (1-3a)r^2) \ ,$$

και επομένως για να υπάρχει περιοδική τροχιά η παράμετρος πρέπει να είναι $a < 1/3$ και η ακτίνα της περιοδικής τροχιάς είναι:

$$r = \sqrt{\frac{4}{1-3a}} \quad , \quad a < \frac{1}{3} \ .$$

14. Η απόκλιση είναι

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \equiv \varepsilon(1 - r^2\cos^2 t + 3ar^2\sin^2 t)$$

και ο εκθέτης Lyapunov

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt(1 - r^2\cos^2 t + 3ar^2\sin^2 t) = \frac{\varepsilon}{2}(1 - (1-3a)r^2) = -\frac{3}{2}\varepsilon\pi \ ,$$

είναι αρνητικός εφόσον $\varepsilon > 0$ και επομένως η τροχιά ευσταθής (και θετικός και ασταθής αν ήταν $\varepsilon > 0$) και ανεξάρτητος από το a.

- Το μοντέλο Adlam-Allen (AA) για τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων διέπεται από τις εξισώσεις:

$$u_{tt} + w_{xx} + \frac{1}{2}(w^2)_{xx} = 0,$$
$$w_{xx} - w - u - uw = 0,$$

όπου οι συναρτήσεις $u(x,t)$ και $w(x,t)$ εκφράζουν την αντίστροφη πυκνότητα του πλάσματος και το μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα.

Ζητούνται:

15. Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις που ικανοποιούν τα πεδία $u(x,t)$ και $w(x,t)$. **[5]**

16. Η σχέση διασποράς κυματικών λύσεων. **[10]**

17. Ποια είναι η σχέση διασποράς στο όριο των μακρών κυμάτων (κυμάτων μεγάλου μήκους κύματος, κρατήστε όρους μέχρι δεύτερης τάξης); Σε αυτή την περίπτωση, ποια είναι η ταχύτητα φάσης και η ταχύτητα ομάδας; **[5]**

Απάντηση

15.

$$u_{tt} + w_{xx} = 0,$$
$$w_{xx} - w - u = 0,$$

16.

$$-\omega^2\hat{u} - k^2\hat{w} = 0,$$
$$-\hat{u} - (k^2+1)\hat{w} = 0,$$

$$\omega = \pm\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

17.

$$\omega = \pm\left(k - \frac{k^3}{2}\right) \quad , \quad k \ll 1$$

$$u_{phase} = \frac{\omega}{k} = \pm\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) \quad , \quad u_{group} = \frac{d\omega}{dk} = 1 - \frac{3}{2}k^2 \, .$$

- Θεωρήστε τη βελτιωμένη εξίσωση Boussinesq (improved Boussinesq equation (IBE)):

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \mu u_{xxtt} - \nu (u^2)_{xx} = 0,$$

όπου το πεδίο $u(x,t)$ και όλες οι παράγωγοί της μηδενίζονται στο όριο $x \to \pm\infty$, και οι σταθερές $\{c, \mu, \nu\} \in \mathbb{R}_+$. Ζητούνται:

18. Να προσδιορισθεί η σχέση διασποράς της IBE. Να βρεθούν οι συνθήκες που η σχέση διασποράς της IBE ταυτίζεται με τη σχέση διασποράς της KdV:

$$u_t + c u_x - \gamma u_{xxx} + \delta u u_x = 0.$$

[5]

19. Να αναζητηθούν λύσεις της IBE της μορφής οδευόντων κυμάτων

$$u = \varphi(\xi),\ \xi = x - vt,\ v = \text{const.},$$

και να προσδιορισθεί το δυναμικό $V(\varphi)$ που διέπει τη διαμόρφωση του κύματος μέσω της εξίσωσης

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{dV}{d\varphi}.$$

[5]

20. Υπό ποιές συνθήκες η IBE επιδέχεται σολιτονικές λύσεις; **[10]**

21. Γράψτε την εξίσωση που διέπει τη διαμόρφωση του κύματος φ όταν υπάρχουν σολιτονικές λύσεις (μην την ολοκληρώστε). **[5]**

Απάντηση

18. Η σχέση διασποράς της IBE είναι

$$\omega = \pm \frac{kc}{\sqrt{1+\mu^2 k^2}} \approx \pm(kc - \frac{\mu^2 c}{2} k^3),\ \ k \ll 1\ .$$

ενώ της KdV

$$\omega = kc + \gamma k^3\ .$$

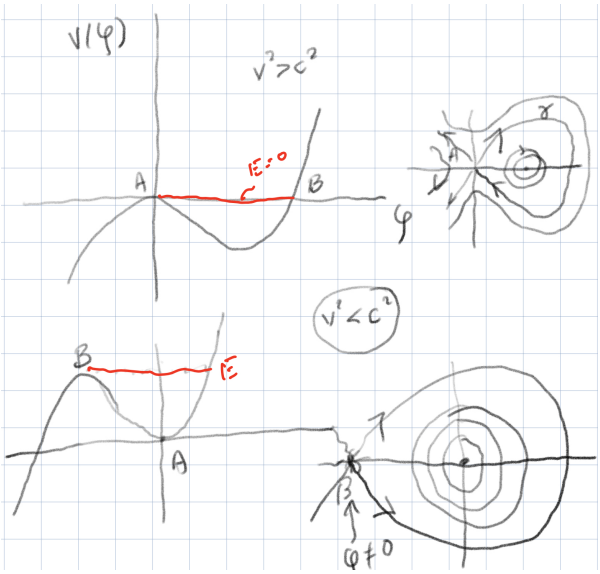
Λόγω της αντιστρεπτότητας στον χρόνο $t \to -t$ η διαδοση στην IBE γίνεται και στις δύο διευθύνσεις ενω στην KdV σε μία. Οι διασπορές γίνονται οι ίδιες μόνο για κύματα που διαδιδόνται προς τα θετικά x, για κύματα μεγαλου μήκους κύματος ($k \ll 1$) όταν είναι $\gamma = -\mu^2 c/2$.

19. Έχουμε

$$v^2\phi'' - c^2\phi'' - \mu v^2 \phi^{iv} - \nu(\phi^2)'' = 0$$

και επειδή η ϕ και όλες οι παράγωγοι της μηδενιζονται στο άπειρο έχουμε μετα από δύο ολοκληρώσεις:

$$(v^2 - c^2)\phi - \mu v^2 \phi'' - \nu\phi^2 = 0$$



Σχήμα 4: Όταν είναι $v > c$ το δυναμικό επιτρέπει ομοκλινικές τροχιές στις οποίες $\phi \to 0$ όταν $x \to \pm\infty$ επειδή οι ομοκλινικές τροχιές αυτές αρχίζουν από το σημείο ισορροπίας A. Αυτές είναι σολιτόνια και έχουν ενέργεια $\dot{\phi}^2/2 + V(\phi) = 0$. Όταν είναι $v < c$ οι ομοκλινικές τροχιές είναι περί το σημείο B που δεν αντιστοιχεί σε $\phi \to 0$ όταν $x \to \pm\infty$ και οι λύσεις αυτές είναι μη πραγματοποιήσιμες διότι έχουν άπειρη ενέργεια.

ή

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{1}{\mu v^2}((v^2 - c^2)\phi - \nu\phi^2) = -\frac{d}{d\phi}\left[\underbrace{\frac{1}{\mu v^2}\left(-(v^2 - c^2)\frac{\phi^2}{2} + \nu\frac{\phi^3}{3}\right)}_{V(\phi)}\right]$$

20. Απαιτείται να είναι $v > c$ βλ. Σχ. 4.
21. Η εξίσωση είναι $\dot{\phi}^2/2 + V(\phi) = 0$ δηλαδή

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm\frac{\sqrt{2}}{v\sqrt{\mu}}\sqrt{(v^2 - c^2)\frac{\phi^2}{2} - \nu\frac{\phi^3}{3}}$$