

Ασκήσεις Μη Γραμμικής Δυναμικής 2024

18 Μαΐου 2024

1 Για την Παρασκευή 8/3

- 2 1. Οι πίνακες 2×2 ορίζουν ένα διανυσματικό χώρο ως προς την πράξη της πρόσθεσης πινάκων και
3 πολλαπλασιασμού πινάκων με τους πραγματικούς αριθμούς. Ποία η διάσταση του διανυσματι-
4 κού αυτού χώρου; Θεωρήστε τώρα τον υποχώρο που σχηματίζεται από τις δυνάμεις ενός πίνακα
5 2×2 , A , δηλαδή του υποχώρου με στοιχεία τα $I \stackrel{\text{def}}{=} A^0, A, A^2, \dots$. Ποιά είναι η μέγιστη διάσταση που
6 μπορεί να έχει αυτός ο υποχώρος;
- 7 2. Πόσο είναι το $e^{\varepsilon d/dt} f(t)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$;
- 8 3. Η δυναμική της σταγόνας στην οροφή μέσω της εξίσωσης της ενέργειας οδηγεί σε απροσδιόριστη
9 εξέλιξη. Ενώ αν περιγραφεί με τις εξισώσεις του Νεύτωνα η απροσδιοριστία στην εξέλιξη αίρεται.
10 Γιατί υπάρχει αυτή η διαφορά;
- 11 4. Σωματίδιο πέφτει κατακόρυφα από κάποιο ύψος στο ομογενές πεδίο βαρύτητας και ανακλάται ελα-
12 στικά στο δάπεδο. Κατασκευάστε διάγραμμα της θέσης του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου
13 και εξετάστε αν το πρόβλημα αυτό είναι γραμμικό. Προσδιορίστε την εξάρτηση της περιόδου της
14 κίνησης από την ενέργεια του σωματιδίου.
- 15 5. (γραμμικό ή μη γραμμικό;) Η γραμμικότητα ή μη γραμμικότητα ενός δυναμικού συστήματος
16 μπορεί να εξαρτάται από την ποσότητα που επιλέχθηκε για την περιγραφή του φαινομένου. Ένα
17 χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η κίνηση σωματιδίου μάζας m και στροφορμής L στο κεντρικό
18 δυναμικό $V(r) = -k/r$, όπου $r \geq 0$ είναι η απόσταση του σωματιδίου από το κέντρο της δύνα-
19 μης. Γράψτε την διαφορική εξίσωση που διέπει την ακτίνα $r(\theta)$ του σωματιδίου στο επίπεδο της
20 κίνησης. Η εξίσωση αυτή είναι μη γραμμική. Μπορείτε αλλάζοντας μεταβλητή να μετατρέψετε
21 το πρόβλημα σε γραμμικό ως προς τη νέα μεταβλητή;

22 Για την Τρίτη 19/3

- 23 6. Προσδιορίστε με τη μέθοδο Picard τη λύση της $\dot{x} = x + 2$, $x(0) = 0$ μετά από 4 επαναλήψεις. Η
24 μέθοδος αυτή επειδή η $x + 2$ είναι Lipschitz στο 0 (δείξτε το) αναγκαστικά συγκλίνει. Μαντέψτε,
25 από τους όρους που έχετε, τη λύση που προκύπτει μετά από n επαναλήψεις και τη συνάρτηση
26 στην οποία συγκλίνει η ακολουθία αυτή.

27

Λύση

28

Η αναδρομική σχέση Picard είναι:

$$x_{n+1} = 2t + \int_0^t ds x_n(s), x_1 = 0. \quad (1)$$

29

$$x_2 = 2t, \quad x_3 = 2t + t^2, \quad x_4 = 2t + t^2 + \frac{t^3}{3}, \quad x_5 = 2t + t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{3 \cdot 4} \rightarrow 2(e^t - 1) \quad (2)$$

30

7. Εξετάστε με τη μέθοδο Picard την ύπαρξη έστω και ασθενών λύσεων των δυναμικών συστημάτων και αν υπάρχουν να τις προσδιορίσετε:

31

(α)

32

$$\dot{x} = \begin{cases} -1, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0, \end{cases}$$

33

με αρχική τιμή $x(0) = 0$.

34

(β) $\dot{x} = -\Theta(x)$ με $x(0) = 0$, όπου

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

35

Λύση

36

(α) Δεν έχει λύση για την αρχική τιμή $x(0) = 0$.

37

Δεν έχει λύση για $t > 0$. Η ακολουθία Picard είναι διαδοχικά για $t > 0$:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \int_0^t 1 ds = t > 0, \quad x_3 = \int_0^t -1 ds = -t < 0, \quad x_4 = \int_0^t 1 ds = t, \dots \quad (3)$$

38

Ενώ για $t < 0$ έχει λύση, την $x(t) = t$:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \int_0^t 1 ds = t < 0, \quad x_3 = \int_0^t 1 ds = t < 0, \quad x_4 = \int_0^t 1 ds = t, \dots \quad (4)$$

39

Δεν θεωρείται ότι έχει λύση διότι συμβατικά θεωρείται ότι έχει λύση ένα δυναμικό σύστημα αν υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή γύρω από τον αρχικό χρόνο (και για θετικούς αλλά και αρνητικούς χρόνους) που υπάρχει λύση.

40

41

(β) Και αυτό δεν έχει λύση. Η ακολουθία Picard για $t > 0$ δεν συγκλίνει:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\int_0^t (1/2) ds = -t/2 < 0, \quad x_3 = \int_0^t 0 ds = 0, \quad x_4 = -\int_0^t (1/2) ds = t/2 < 0, \dots \quad (5)$$

43 Για $t < 0$ συγκλίνει στο $x(t) = -t$:

$$x_1 = 0, x_2 = -\int_0^t (1/2)ds = -t/2 > 0, x_3 = -\int_0^t 1ds = -t > 0, x_4 = -\int_0^t 1ds = -t, \dots \quad (6)$$

44
45 8. Η εξίσωση Gompertz για την εξέλιξη του πληθυσμού των καρκινικών κυττάρων με $x \geq 0$ είναι:
46 $\dot{x} = v(x)$ με πεδίο ταχυτήτων:

$$v(x) = \begin{cases} -x \log(x) & , x > 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases} \quad (7)$$

47 (α) Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας της.

48 (β) Προσδιορίστε την αναλυτική λύση όταν $x(0) = x_0$, με $x_0 > 0$ και προσδιορίστε την ασυμ-
49 πτωτική τιμή του x .

50 (γ) Υπολογίστε αριθμητικά με τη μέθοδο Euler την εξέλιξη των πληθυσμών που συνεπά-
51 γεται η Gompertz για τις αρχικές τιμές $x(0) = 0.01$, $x(0) = 0.5$, $x(0) = 2$. Επιλέξτε κατάλληλο
52 χρονικό βήμα ώστε να είναι σχετικά ακριβής η εξέλιξη που θα πετύχετε αριθμητικά. Σχεδιάστε
53 την εξέλιξη του πληθυσμού με τον χρόνο. Σχεδιάστε τις αναλυτικές λύσεις στο ίδιο διάγραμμα
54 για να διαπιστώσετε οπτικά την ακρίβεια της αριθμητικής λύσης σας.

55 (δ) Είναι η λύση μοναδική για $x(0) = 0$; Εάν ναι εξηγήστε τον λόγο.

56 (ε) Η $v(x)$ που δίνεται από την (7) της Gompertz είναι Lipschitz στο $x = 0$; Τι συμπεραίνετε
57 για την αναγκαιότητα της συνθήκης Lipschitz για την ύπαρξη μοναδικών λύσεων;

58 (στ) Για πιο χρονικό βήμα δ της διακριτοποίησης του συνεχούς δυναμικού συστήματος με τη
59 μέθοδο του Euler ο ελκυστής του διακριτού δυναμικού συστήματος διαφέρει από τον ελκυστή του
60 συνεχούς;

61 Λύση

62 (α) Τα σημεία ισορροπίας είναι $x_e = 0$ και $x_e = 1$.

63 (β,γ) $x(t) = (x(0))^{e^{-t}}$. Η σύγκριση της αναλυτικής λύσης με την αριθμητική στο Σχ. 1 επιβεβαιώνει
64 ότι δεν έχει γίνει λάθος και στη μία και στην άλλη.

65 (δ,ε) Η λύση είναι μοναδική, παρότι η $-x \log(x)$ δεν είναι Lipschitz στο $x = 0$, διότι απαιτείται
66 άπειρος χρόνος για να φτάσει κανείς στο $x(0) = 0$.

$$T_{x \rightarrow \varepsilon} = \int_x^\varepsilon -\frac{dx}{x \log x} = \int_\varepsilon^x \frac{d(\log x)}{\log x} = \log(\log x) - \log(\log \varepsilon) \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0 \quad (8)$$

67 Το σημείο ισορροπίας $x_e = 0$ είναι απομονωμένο. Συνεπώς η συνθήκη Lipschitz είναι ικανή συν-
68 θήκη για την ύπαρξη μοναδικής λύσης, αλλά δεν είναι αναγκαία. Ικανή και αναγκαία συνθήκη
69 μοναδικότητας των λύσεων είναι ο χρόνος μετάβασης στα σημεία ισορροπίας να είναι άπειρος
70 (υποθέτουμε επίσης για την ύπαρξη τη συνέχεια του πεδίου ταχυτήτων που και αυτό δεν είναι
71 ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη λύσεων).

72

Η $-x \log(x)$ δεν είναι Lipschitz στο $x = 0$ διότι αν ήταν θα υπήρχε $k > 0$ ώστε:

$$|x \log x| \leq K|x|, \quad (9)$$

73

που θα απαιτούσε: $|\log x| < k$, που είναι άτοπο διότι η $\log x$ δεν είναι φραγμένη στο $x = 0$.

74

(στ) Η διακριτοποίηση οδηγεί στην αναδρομική σχέση $x_{n+1} = x_n(1 - \delta \log(x_n)) = f(x_n)$, που

75

έχει και αυτή ως σταθερά σημεία τα $x_e = 1$ και $x_e = 0$. Η ευστάθεια του κάθε x_e κρίνεται από

76

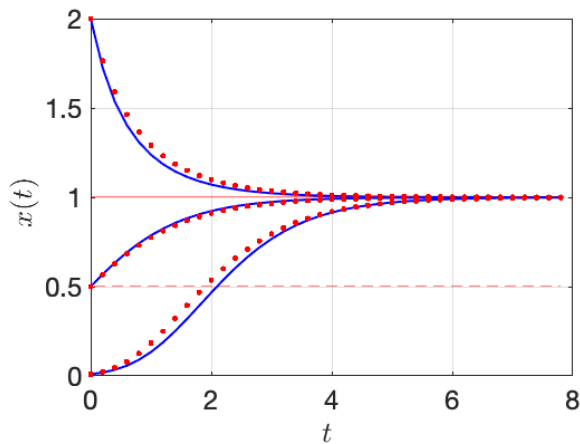
το αν είναι $|f'(x_e)| < 1$ όπου $f'(x) = 1 - \delta - \delta \log(x)$. Είναι $f'(1) = 1 - \delta$. Συνεπώς αν $\delta < 2$

77

και $\log(x_0) < 1/\delta$ ο ελκυστής του συνεχούς δυναμικού συστήματος και της διακριτοποιημένης

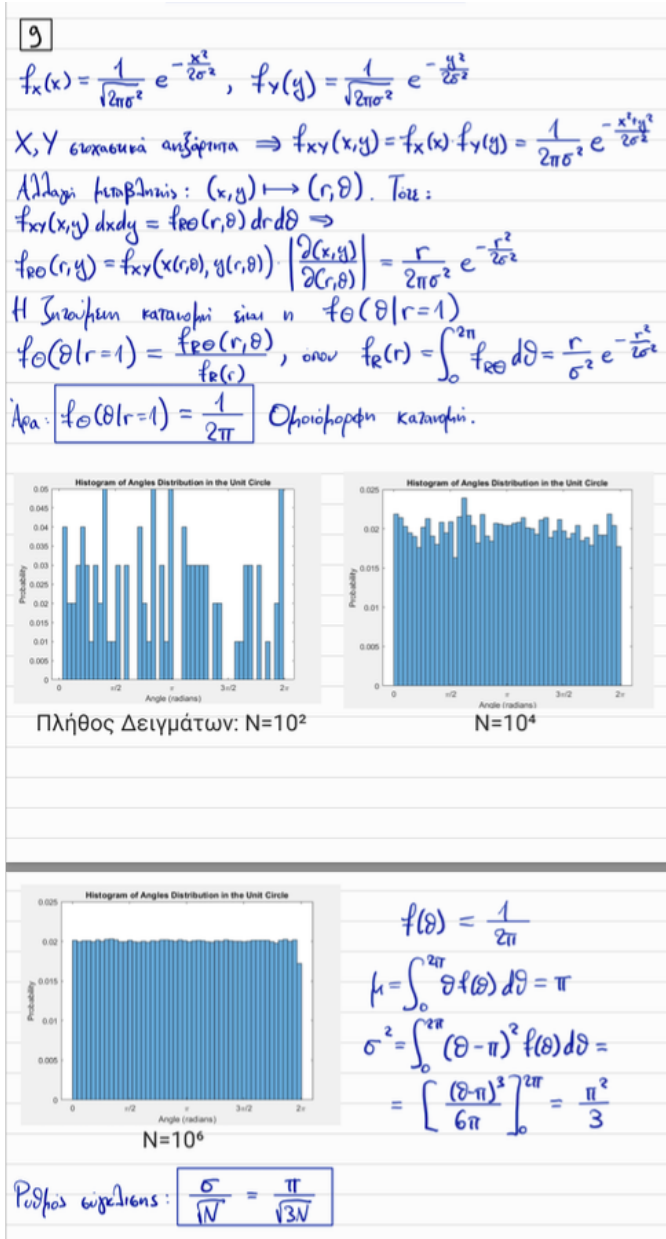
78

προσέγγισης είναι ο ίδιος.



Σχήμα 1: Οι συνεχείς μπλε γραμμές η λύση της Gompertz με την Euler με βήμα $\delta = 0.2$. Η αναλυτική λύση με κόκκινες τελείες. Η προσέγγιση στην αναλυτική λύση είναι ικανοποιητική και με αυτό το βήμα.

9. Δείξτε ότι αν $\mathbf{x} = (x, y)$ και οι συνιστώσες x και y είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί που έχουν ληφθεί από Γκαουσιανή κατανομή, τότε τα τυχαία διανύσματα $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ είναι ομοιόμορφα καταμεμημένα στον μοναδιαίο κύκλο. Σχεδιάστε ιστόγραμμα της κατανομής της πιθανότητας των γωνιών που προκύπτουν όταν ληφθούν $N = 10^2, 10^4, 10^6$ δείγματα. Εξετάστε τον ρυθμό σύγκλισης στην ομοιόμορφη κατανομή συναρτήσει του αριθμού, N , του δείγματος.



Σχήμα 2: Λύση της Ασκ. 9 από τον Ν. Σούλα Κοτζαμάνη.

10. Διακριτό δυναμικό σύστημα δίνεται από την αναδρομική σχέση (ή απεικόνιση) $x_{n+1} = f(x_n)$ με

$$f(x_n) = (1 + \delta)x_n - \delta x_n^2, \quad x_1 \geq 0, \quad \delta > 0. \quad (10)$$

(α) Είδαμε στο μάθημα ότι το $x = 1$ είναι ευσταθές σταθερό σημείο της απεικόνισης όταν $\delta < 2$ και ασταθές όταν $\delta > 2$. Η ευστάθεια του διακριτού συστήματος όμως για $\delta = 2$ δεν μπορεί να κριθεί από τη γραμμική ανάλυση. Με κατευθείαν υπολογισμό προσδιορίστε αν το $x = 1$ είναι ο ελκυστής της δυναμικής όταν είναι $\delta = 2$. Και αν ναι, ποιά είναι το πεδίο έλξεως του $x = 1$ (δηλαδή ποιές αρχικές τιμές τείνουν στο $x = 1$);

(β) Προσδιορίστε τα δ για τα οποία προκύπτουν σταθερά σημεία περιόδου 2 που δεν είναι περιόδου 1, δηλαδή τα σταθερά σημεία της $x_{n+2} = f(f(x_n))$ που δεν είναι σταθερά σημεία της $x_{n+1} = f(x_n)$.

(γ) Προσδιορίστε το πεδίο έλξεως του ελκυστή όταν υπάρχουν σταθερά σημεία περιόδου 2.

(δ) Σχεδιάστε την $f(f(x))$. Διερευνήστε την ευστάθεια των σταθερών σημείων περιόδου 2.

(ε) Σχεδιάστε τα x_n συναρτήσει του n για $\delta = \delta_c - 0.1$, $\delta = \delta_c$ και $\delta = \delta_c + 0.1$, όπου δ_c η τιμή του δ για την οποία τα σταθερά σημεία περιόδου 2 γίνονται ασταθή.

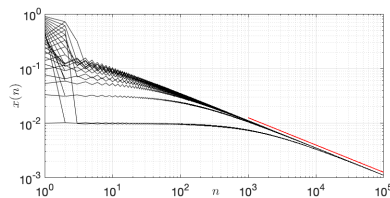
(α) Σταθερά σημεία της απεικόνισης

$$f(x) = (1 + \delta)x - \delta x^2 \quad (11)$$

προσδιορίζονται από τον μηδενισμό της

$$0 = f(x) - x = \delta x(1 - x) \quad (12)$$

$$(13)$$



Σχήμα 3: Η σύγκλιση της αναδρομικής σχέσης $x_{n+1} = 3x_n - 2x_n^2$ στο 1, για 31 αρχικές συνθήκες στο διάστημα $0 < x < (1 + \delta)/\delta$. Η σύγκλιση γίνεται με ρυθμό $n^{-1/2}$, που σημειώνεται με την κόκκινη ευθεία γραμμή στο loglog γραφήμα. Εμφανίζει κρίσιμη επιβράδυνση. Σχεδιάζεται το $\log(|x_n - 1|)$ συναρτήσει του $\log n$.

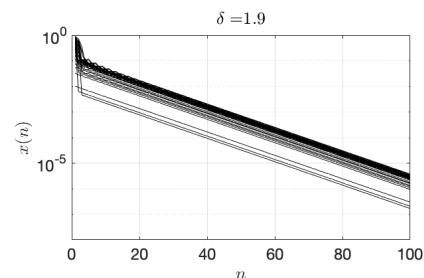
Με σταθερά σημεία τα $x_e = 0, 1$, όπως και στο συνεχές σύστημα (στο οποίο το 0 ήταν ασταθές και το 1 είναι ευσταθές αν $\delta < 2$ και ο ελκυστής είναι το 1 αν επίσης είναι $0 < x < (1 + \delta)/\delta$).

Η αναδρομική για $\delta = 2$ είναι $x_{n+1} = 3x_n - 2x_n^2$, και τελικά συγκλίνει στο 1 εφόσον $x < 3/2$ με ρυθμό $n^{-1/2}$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Εμφανίζεται κρίσιμη επιβράδυνση στη σύγκλιση. Για $\delta < 2$ η σύγκλιση είναι εκθετική όπως και στο συνεχές σύστημα, και όπως φαίνεται στο Σχ. 4.

(β) Η αναδρομική σχέση $x_{n+2} = F(x_n)$ όπου:

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(f(x)) = (1 + \delta)f - \delta f^2 \quad (14)$$

$$f(f(x)) - x = \delta x(1 - x)(2 + \delta - \delta(2 + \delta)x + \delta^2 x^2) \quad (15)$$



Σχήμα 4: Η σύγκλιση της αναδρομικής σχέσης $x_{n+1} = (1 + \delta)x_n - \delta x_n^2$ στο 1, για $\delta < 2$ είναι εκθετική όπως και στο συνεχές σύστημα, όπως φαίνεται στο $\log(x) - n$ διάγραμμα. Σχεδιάζεται το $\log(|x_n - 1|)$ συναρτήσει του n .

και τα σταθερά της σημεία είναι:

$$x_e = 0, 1, x_a = \frac{\delta + 2 + \sqrt{\delta^2 - 4}}{2\delta}, x_b = \frac{\delta + 2 - \sqrt{\delta^2 - 4}}{2\delta} \quad (16)$$

112 **ΌΠΟΥ**

$$f(x_a) = x_b, f(x_b) = x_a \quad (17)$$

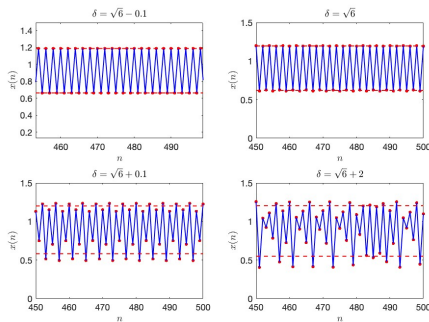
113

$$\begin{aligned} (f(f(x)))'_{x=x_a} &= f'(x_a)(1 + \delta - 2\delta f(x_a)) \\ &= f'(x_a)(1 + \delta - 2\delta x_b) \\ &= f'(x_a)f'(x_b) \\ &= (-1 - \sqrt{\delta^2 - 4})(-1 + \sqrt{\delta^2 - 4}) \\ &= 5 - \delta^2 \end{aligned}$$

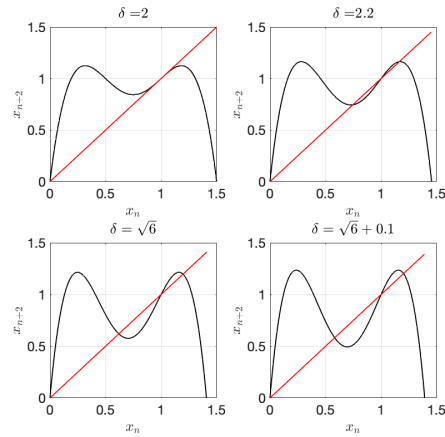
114

115

116 Τα σταθερά σημεία περιόδου 2 που εμφανίζονται
 117 για $\delta \geq 2$, γίνονται ασταθή όταν $|5 - \delta^2| > 1$ δηλαδή
 118 όταν $\delta > \sqrt{6} \approx 2.4495$. Δηλαδή είναι το $\delta_c = \sqrt{6}$.



Σχήμα 6: Τιμές της αναδρομικής ακολουθίας η οποία από περιοδική περιόδου 2 γίνεται χαοτική για $\delta = \sqrt{6} + 2$. Για $\delta = \sqrt{6} + 0.1$ έχει περίοδο 4.



Σχήμα 5: Η αναδρομική σχέση περιόδου 2 και τα σταθερά της σημεία για διαφορετικά δ .

119 11. Θεωρούμε το γραμμικό δυναμικό σύστημα $\dot{x} = Ax$ στο επίπεδο. Ο A είναι 2×2 πραγματικός πίνα-
 120 κας με πραγματικές ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 με $\lambda_1 > \lambda_2$. Τα αντιστοιχούντα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα
 121 $|1\rangle$ και $|2\rangle$ σχηματίζουν γωνία θ , όπου $\cos(\theta) = \langle 1|2\rangle$. Όλες οι αρχικές καταστάσεις μπορούν να
 122 γραφούν ως γραμμικός συνδυασμός των $|1\rangle$ και $|2\rangle$, ως $\alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$, και για $t \gg 1/|\lambda_1|$ η αρχική
 123 η κατάσταση εξελίσσεται με εκθετική ακρίβεια ως $ae^{\lambda_1 t}|1\rangle$ (πλην των αρχικών καταστάσεων με
 124 $\alpha = 0$).

125 (α) Προσδιορίστε τη μοναδιαία αρχική κατάσταση $|o\rangle$ η οποία έχει τη μέγιστη προβολή στο
 126 $|1\rangle$ και τη μοναδιαία αρχική κατάσταση $|p\rangle$ η οποία έχει τη μέγιστη προβολή στο $|2\rangle$ όταν είναι
 127 $\theta = \pi/2$. Ποία η ασυμπτωτική συμπεριφορά αυτών των αρχικών καταστάσεων σε αυτήν την
 128 περίπτωση.

129 (β) Προσδιορίστε τη μοναδιαία αρχική κατάσταση $|o\rangle$ η οποία έχει τη μέγιστη προβολή στο
 130 $|1\rangle$ και τη μοναδιαία αρχική κατάσταση $|p\rangle$ η οποία έχει τη μέγιστη προβολή στο $|2\rangle$ όταν είναι
 131 $0 < \theta < \pi/2$. Ποία η ασυμπτωτική συμπεριφορά αυτών των αρχικών καταστάσεων σε αυτήν την
 132 περίπτωση.

133 Αν $|a\rangle$ είναι το ορθογώνιο διάνυσμα στο $|2\rangle$, ώστε $\langle a|2\rangle = 0$, τότε θα είναι $\langle a,o\rangle = \alpha \langle a,1\rangle$ και το

$$\alpha = \frac{\langle a|o\rangle}{\langle a|1\rangle} \quad (18)$$

134 γίνεται μέγιστο όταν $|o\rangle = |a\rangle$. Επειδή, $\langle a,1\rangle = \sin \theta$ η μέγιστη διέγερση της ιδιοκατάστασης $|1\rangle$ γίνεται
 135 από το $|a\rangle$ με διέγερση που είναι κατά $1/\sin \theta$ μεγαλύτερη από το να επιλέγαμε ως αρχική συνθήκη το
 136 $|1\rangle$. Η φυσική κατάσταση που περιγράφει το $|a\rangle$ είναι όταν $\theta \ll 1$ εντελώς διαφορετική από την $|1\rangle$.

137 Για τη Δευτέρα 01/4

138 12. α) Θεωρήστε το μη αυτόνομο μονοδιάστατο δυναμικό σύστημα $\dot{x} = v(x,t)$ επί της ευθείας, με
 139 $v(x,t)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς τα ορίσματά της και την $v(x,t)$ περιοδική συνάρτηση ως
 140 προς t με περίοδο 1. Αν υπάρχουν ξ και η με $\xi > \eta$ ώστε $\forall t$ να είναι $v(\xi,t) < 0$ και $v(\eta,t) > 0$, δείξτε
 141 ότι το δυναμικό σύστημα εκτελεί περιοδική κίνηση για κάποια αρχική κατάσταση x_0 , $\eta < x_0 < \xi$.
 142 (β) Υπάρχουν περιοδικές τροχιές στο δυναμικό σύστημα $\dot{x} = x^2 - 1 - \cos(2\pi t)$; Αν υπάρχουν
 143 εντοπίστε τες κατασκευάζοντας αριθμητικά την αντιστοιχούσα απεικόνιση Poincaré και προσ-
 144 διορίστε την ευστάθειά τους.

145 Αν $P(x)$ η εξέλιξη του x κατά μία περίοδο, τότε θα είναι $P(\xi) < \xi$ και $P(\eta) > \eta$. Η συνάρτηση
 146 $f(x) = x - P(x)$ είναι συνεχής και αλλάζει πρόσημο στο $[\eta, \xi]$. Συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον
 147 μία ρίζα της $f(x) = x - P(x)$ στο $[\eta, \xi]$, η x_0 , που αντιστοιχεί σε περιοδική τροχιά.

13. Ασκήσεις από το βιβλίο του Strogatz.

2.2.8 (Working backwards, from flows to equations) Given an equation $\dot{x} = f(x)$, we know how to sketch the corresponding flow on the real line. Here you are asked to solve the opposite problem: For the phase portrait shown in Figure 1, find an equation that is consistent with it. (There are an infinite number of correct answers—and wrong ones too.)

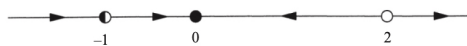


Figure 1

2.2.9 (Backwards again, now from solutions to equations) Find an equation $\dot{x} = f(x)$ whose solutions $x(t)$ are consistent with those shown in Figure 2.

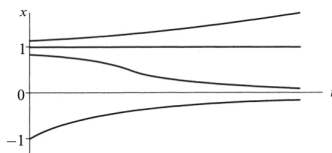


Figure 2

2.2.10 (Fixed points) For each of (a)–(e), find an equation $\dot{x} = f(x)$ with the stated properties, or if there are no examples, explain why not. (In all cases, assume that $f(x)$ is a smooth function.)

- Every real number is a fixed point.
- Every integer is a fixed point, and there are no others.
- There are precisely three fixed points, and all of them are stable.
- There are no fixed points.
- There are precisely 100 fixed points.

2.4.9 (Critical slowing down) In statistical mechanics, the phenomenon of “critical slowing down” is a signature of a second-order phase transition. At the transition, the system relaxes to equilibrium much more slowly than usual. Here’s a mathematical version of the effect:

- Obtain the analytical solution to $\dot{x} = -x^3$ for an arbitrary initial condition. Show that $x(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$, but that the decay is not exponential. (You should find that the decay is a much slower algebraic function of t .)
- To get some intuition about the slowness of the decay, make a numerically accurate plot of the solution for the initial condition $x_0 = 10$, for $0 \leq t \leq 10$. Then, on the same graph, plot the solution to $\dot{x} = -x$ for the same initial condition.

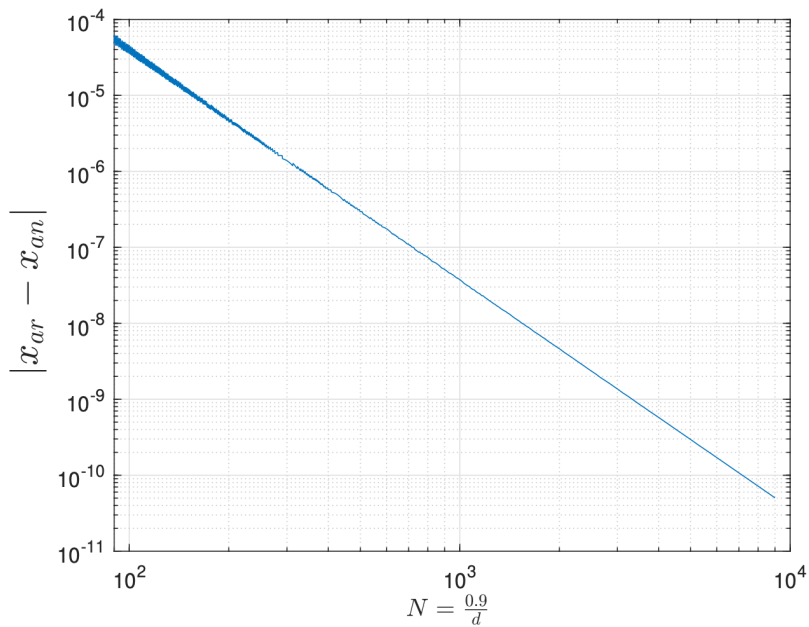
14. Προσδιορίστε την ακρίβεια στην ολοκλήρωση της $\dot{x} = v(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^x$, $x(0) = 0$, από το 0 μέχρι τον χρόνο 0.9 με τον αναδρομικό τύπο:

$$k_1 = \delta v(x_n) \quad (19)$$

$$k_2 = \delta v(x_n + \beta k_1) \quad (20)$$

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2, \quad (21)$$

συναρτήσει του αριθμού των βημάτων $0.9/\delta$, όπου δ το χρονικό βήμα, όταν $\alpha_1 = 5/8$, $\alpha_2 = 3/8$, $\beta_2 = 4/3$.

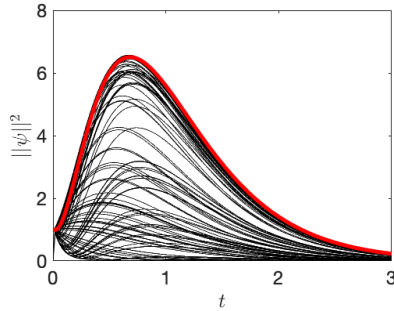


Βλέπουμε ότι η κλίση στο λογαριθμικό διάγραμμα είναι περίπου $\frac{4-10}{4-2} = -3$ οπότε η ακρίβεια της υπολογιστικής μεθόδου είναι 3ης τάξης και όχι 2ης όπως ακριβώς περιμέναμε.

Σχήμα 7: Λύση από Η. Μόσλεϊ.

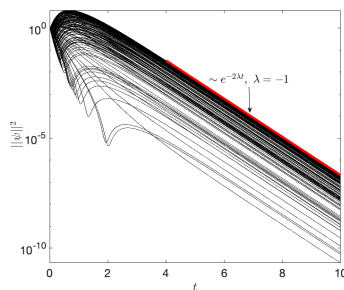
- 154 15. Σχεδιάστε τη χρονική εξέλιξη του τετραγώνου του ευκλείδειου μέτρου 50 τυχαίων αρχικών συν-
 155 θηκών ομοιομόρφως κατανομημένων στον μοναδιαίο κύκλο που εξελίσσονται με το γραμμικό
 156 δυναμικό σύστημα $\dot{\psi} = A\psi$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$



Σχήμα 8: Με κόκκινο είναι η εξέλιξη της καλύτερης διέγερσης της ιδιοκατάστασης με ιδιοτιμή $\lambda = -1$.

- 157 16. Ο μιγαδικός πίνακας $n \times n$, U , έχει ως κολώνες τις n ιδιοκαταστάσεις του πίνακα A . Αν γνωρί-
 158 ζουμε τον U^{-1} προσδιορίστε την μοναδιαίου μέτρου κατάσταση που διεγείρει περισσότερο την
 159 πρώτη ιδιοκατάσταση του A , η οποία είναι η πρώτη κολώνα του U . Το εσωτερικό γινόμενο στον
 160 χώρο αυτό δίνεται από το $\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i$. Πως αλλάζει η μεγαλύτερη διέγερση της πρώτης ιδιο-
 161 κατάστασης αν το εσωτερικό γινόμενο ήταν το $\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^* H_{ij} y_j$, όπου H ερμιτιανός πίνακας;
 162 Αν $V = HU$, τότε $V^{-1}HU = U^{-1}H^{-1}HU = I$. Συνεπώς αν $iV = V^{-1}$, η $iV(1,:)^{\dagger}$ διεγείρει το
 163 περισσότερο την $U(:,1)$
 164 17. (προαιρετικό) Αποδείξτε ότι για $n \gg 1$ είναι $|x_n - 1| \sim n^{-1/2}$ στο Σχ.3.



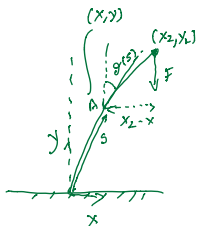
Σχήμα 9: Ασυμπτωτικά όλες οι διαταραχές, πλην μίας της οποίας η διέγερση έχει μηδενική πιθανότητα, φθίνουν με τον ρυθμό της ιδιοτιμής του A με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος, $\lambda = -1$. Προσέξτε το γράφημα αφορά στις ενέργειες των διαταραχών, $\|\psi\|^2$.

Για τη Δευτέρα 15/4

18. Η απεικόνιση Poincaré $P_0(x)$ ενός περιοδικού συστήματος περιόδου, 1, που προκύπτει από ολοκλήρωση του δυναμικού συστήματος από τον χρόνο $0 \rightarrow 1$ έχει ως σταθερό σημείο το x_0 , ενώ η απεικόνιση Poincaré $P_T(x)$ που προκύπτει από ολοκλήρωση του ίδιου δυναμικού συστήματος από τον χρόνο $T \rightarrow T + 1$, έχει ως σταθερό σημείο το x_T . Δείξτε ότι η ευστάθεια των x_0 και x_T είναι ίδια.
19. Ο Euler υπολόγισε το κρίσιμο φορτίο που θα λυγίσει μια στερεά ράβδος. Έδειξε ότι εξίσωση που διέπει το χρονοανεξάρτητο σχήμα της ράβδου σε στατική ισορροπία είναι η

$$D\ddot{\theta} + F \sin \theta = 0 \quad , \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(L) = 0 \quad . \quad (23)$$

Η τελεία συμβολίζει παραγωγή ως προς το μήκος τόξου (βλ. Σχ. 10) επί της ράβδου, π.χ. $\dot{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} d\theta/ds$. Το s είναι το μήκος τόξου της ράβδου από το κατώτερο σημείο της, όπου $s = 0$, ενώ η ράβδος θεωρείται ότι έχει αναλλοίωτο σταθερό μήκος L , δηλαδή η ράβδος δεν συρρικνώνεται υπό το βάρος που έχει εναποτεθεί σε αυτήν, και συνεπώς η παραπάνω εξίσωση ορίζεται στο διάστημα $s \in [0, L]$. Η $D > 0$ είναι η ελαστική σταθερά της ράβδου. Η γωνία θ είναι η γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της καμπύλης της ράβδου με την κατακόρυφο. Αυτή η εξίσωση διέπει το σχήμα ισορροπίας της ράβδου όταν ασκείται δύναμη F στο άνω άκρο της. Εμείς θα θεωρήσουμε ότι $F > 0$, που αντιστοιχεί σε πιεστική δύναμη. Η συνοριακή συνθήκη στο κατώτερο άκρο, $\theta(0) = 0$, προκύπτει επειδή θεωρούμε ότι η ράβδος στο κάτω άκρο στηρίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να παραμένει κατακόρυφη, ενώ $\dot{\theta}(L) = 0$, επειδή το ανώτερο άκρο είναι μεν ελεύθερο να μετακινηθεί αλλά δεν μπορεί να καμπυλωθεί διότι δεν υπάρχει τάση από ελαστικό υλικό που μπορεί να καμπυλώσει το άκρο αυτό.



Σχήμα 10: Η ράβδος του Euler

185 Η εξίσωση ισορροπίας του σχήματος της ράβδου (23) προκύπτει από την απαίτηση να είναι ελάχι-
 186 στο το συναρτησοειδές της συνολικής δυναμικής (ελαστικής και εξωτερικής δύναμης) ενέργειας

$$187 \quad V[\theta] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^L \frac{1}{2} D\dot{\theta}^2 ds + Fy_L = \int_0^L \left(\frac{1}{2} D\dot{\theta}^2 + F \cos \theta \right) ds, \quad (24)$$

188 δεδομένου ότι, αν θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στη ράβδο με την κατακόρυφο y διεύ-
 189 θυνση (βλ. σχήμα 10), οι συντεταγμένες (x, y) της ράβδου προκύπτουν από τις εξισώσεις:

$$\dot{x} = \sin \theta, \quad \dot{y} = \cos \theta, \quad (25)$$

190 και $y_L = \int_0^L \cos \theta ds$. Θυμίζουμε ότι x είναι η οριζόντια διεύθυνση, με $(x, y) = (0, 0)$ το κάτω πα-
 191 κτωμένο άκρο της ράβδου. Ο πρώτος όρος στην (24) δίνει την ελαστική ενέργεια η οποία είναι
 192 ανάλογη του τετραγώνου της καμπυλότητας της ράβδου (ο όρος $\dot{\theta}$ είναι ίσος με την καμπυλό-
 193 τητα της ράβδου) και ο δεύτερος είναι το έργο της ασκούμενης δύναμης.

194 (α) Δείξτε από πρώτες αρχές, ορίζοντας προσεκτικά το είδος των μεταβολών, ότι στασιμο-
 195 ποίηση της (24) οδηγεί στην (23). Ποία η διαφορά με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για την
 196 κατασκευή των εξισώσεων Euler-Lagrange μέσω της αρχής του Χάμιλτον στη Μηχανική;

197 Η διαφορά από την αρχή του Χάμιλτον είναι ότι αρκεί η στασιμοποίηση να γίνει ως προς μεταβο-
 198 λές, $\delta\theta$, που ικανοποιούν μόνο $\delta\theta(0) = 0$, δεν απαιτείται περιορισμός στη τιμή των διαταραχών
 199 στο ελεύθερο άκρο.

200 (β) Θεωρήστε τώρα ότι η ράβδος έχει λυγίσει ελάχιστα και το σχήμα ισορροπίας της ράβδου
 201 ικανοποιεί τη γραμμική εξίσωση:

$$D\ddot{\theta} + F\theta = 0, \quad (26)$$

202 με $\dot{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} d\theta/ds$ και συνοριακές συνθήκες:

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(L) = 0. \quad (27)$$

203 Η εξίσωση αυτή ισχύει για μικρές παραμορφώσεις από την κατακόρυφο.

204 Προσδιορίστε για κάθε τιμή της F την $\theta(s)$. Αν χρησιμοποιήσουμε την $\theta_L \stackrel{\text{def}}{=} \theta(L)$ ως ενδεικτική
 205 συντεταγμένη που ορίζει την κατάσταση ισορροπίας της ράβδου, για ποιές τιμές του F αναμένετε
 206 διακλάδωση; Σε διάγραμμα (F, θ_L) σχεδιάστε το διάγραμμα διακλάδωσης της γραμμικής εξίσω-
 207 σης (26). Ποία είναι η πρώτη κρίσιμη τιμή της δύναμης F_c που οδηγεί στο λυγισμό της ράβδου;
 208 Σχεδιάστε το σχήμα της ράβδου στις διάφορες διακλαδώσεις.

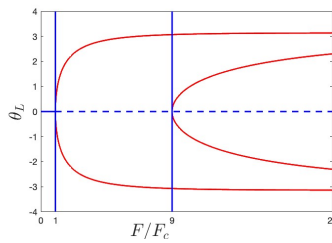
209 Η (26) με συνοριακές συνθήκες (27) επιδέχεται μόνο τη λύση $\theta = 0$ εκτός αν είναι $\sqrt{F/D} = n\pi/(2L)$ για $n = 1, 3, 5, \dots$, δηλαδή όταν η δύναμη που ασκείται έχει την τιμή:

$$F = \frac{n^2 \pi^2 D}{4L^2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

210 Αυτό σημαίνει ότι αυξάνοντας τη δύναμη που ασκούμε επί της ράβδου, δεν θα καμφθεί η ρά-
 211 βδος (δεν θα αλλάξει η κατάσταση ισορροπίας από το $\theta = 0$), μέχρι η δύναμη γίνει η δύναμη

212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228

λυγισμού που πρόβλεψε ο Euler: $F_c = \pi^2 D / (4L^2)$. Σε αυτή την περίπτωση η γραμμική θεωρία προβλέπει άπειρες καταστάσεις ισορροπίας της ράβδου, δεδομένου ότι η $\theta_e(s) = a \sin(\pi s / (2L))$ για κάθε θετικό πλάτος a ικανοποιεί την εξίσωση ισορροπίας. Αυτός ο εκφυλισμός αίρεται με την εισαγωγή των μη γραμμικών όρων. Το ίδιο συμβαίνει και στις επόμενες κρίσιμες τιμές όπου η κατάσταση ισορροπίας που προβλέπεται για την n -οστή κατάσταση είναι η $\theta_e(s) = a \sin(n\pi s / (2L))$, $n = 1, 3, 5, \dots$ για κάθε θετικό a . Σύμφωνα με τη γραμμική θεώρηση στις ενδιάμεσες τιμές τυπικά η κατάσταση ισορροπίας είναι και πάλι $\theta = 0$. Το διάγραμμα διακλάδωσης των καταστάσεων ισορροπίας σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία έχει σχεδιασθεί στο Σχ. 11 με μπλε. Η μη γραμμική διόρθωση είναι σχεδιασμένη με κόκκινο. Προσέξτε ότι στο πλαίσιο αυτής της ανάλυσης δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την ευστάθεια ή αστάθεια των καταστάσεων διότι δεν έχουμε τις εξισώσεις που διέπουν τη χρονική εξέλιξη της δοκού που θα μας επέτρεπαν μελέτη της ευστάθειας ή αστάθειας. Οπότε τυπικά δεν μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ως ασταθή τις καταστάσεις $\theta = 0$ για $F > F_c$. Για το ότι είναι ασταθείς οι καταστάσεις αυτές μπορούμε να το υποστηρίξουμε έμμεσα συγκρίνοντας τη δυναμική ενέργεια (24) στην κατάσταση $\theta = 0$ για $F > F_c$ και δείχνοντας ότι είναι μεγαλύτερη από την κατάσταση που προβλέπεται από την μη γραμμική θεώρηση. Για $F > 9F_c$ προβλέπονται δύο καταστάσεις κάμψης (μπορείτε να τις βρείτε!), αυτή που θα υπερισχύσει είναι αυτή με τη χαμηλότερη ενέργεια (ποια είναι!).



Σχήμα 11: Οι δύο πρώτοι κλάδοι της υπερκρίσιμης δικρατικής (pitchfork) διακλάδωσης της δοκού του Euler που οδηγεί σε σπάσιμο συμμετρίας.

229
230
231
232
233
234
235
236
237
238

(γ) Υπολογισμός της διακλάδωσης λυγισμού της ράβδου του Euler στη μη γραμμική θεώρηση. Η εξίσωση του σχήματος της ράβδου (23) είναι ίδια με αυτήν του επίπεδου εκκρεμούς και οι λύσεις διατηρούν την “ενέργεια”:

$$\frac{1}{2} D \dot{\theta}^2 - F \cos \theta = -F \cos \theta_L, \quad (28)$$

όπου $\theta_L = \theta(L)$. [Προσέξτε ότι το συναρτησοειδές της συνολικής δυναμικής ενέργειας (4) που ελαχιστοποιούμε προκειμένου να βρούμε το σχήμα της ράβδου, που διέπεται τελικά από την (3) δεν είναι η διατηρούμενη ποσότητα. Η $V(\theta)$ είναι το αντίστοιχο της δράσης με αλλαγμένο το πρόσημο της κλασικής δυναμικής ενέργειας από αυτήν που υπεισέρχεται στη διατηρούμενη ενέργεια.] Από τη διατήρηση αυτή, όπως υπολογίζουμε στο εκκρεμές την περίοδο συναρτήσει του πλάτους της ταλάντωσης, υπολογίζουμε εδώ το σχήμα της ράβδου προσδιορίζοντας το μήκος τόξου της ράβδου $s(\theta)$ και τις συντεταγμένες (x, y) της ράβδου, Από την (28) προκύπτει ότι

$$L = \sqrt{\frac{D}{2F}} \int_0^{\theta_L} \frac{d\theta}{\sqrt{-\cos \theta_L + \cos \theta}}. \quad (29)$$

239

Κάνοντας την κλασική αντικατάσταση $\sin(\theta/2) = \sin(\theta_L/2) \sin \phi$ έχουμε

$$L = \sqrt{\frac{D}{F}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_L/2) \sin^2 \phi}}, \quad (30)$$

240

και για μικρά θ_L δείξτε ότι είναι:

$$L = \sqrt{\frac{D}{F}} \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2(\theta_L/2) + \frac{9}{64} \sin^4(\theta_L/2) + \dots \right), \quad (31)$$

241

και μέσω αυτής αποδείξτε ότι για μικρά θ_L ότι:

$$F = F_c \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2(\theta_L/2) + \frac{11}{32} \sin^4(\theta_L/2) + \dots \right), \quad (32)$$

242

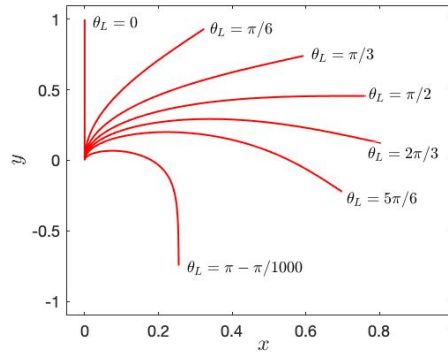
όπου F_c η κρίσιμη τιμή της δύναμης που υπολογίσατε από τη γραμμική προσέγγιση. Εξ'αυτού αποδείξτε ότι η διακλάδωση στο κρίσιμο σημείο λυγισμού είναι υπερκρίσιμη δικρανική διακλάδωση (supercritical pitchfork bifurcation) και σχεδιάστε τους τρεις πρώτους κλάδους που εμφανίζονται στα F_c , $9F_c$ και $25F_c$.

246

247

248

(δ) Σχεδιάστε το σχήμα τις δοκού σε διαδοχικές τιμές ενέργειας μετά την πρώτη και δεύτερη διακλάδωση. Με ενεργειακά επιχειρήματα προσδιορίστε την ευστάθεια των λύσεων (έστω για την πρώτη διακλάδωση). σχεδιάζονται στο Σχ. (11).



Σχήμα 12: Διαδοχικές θέσεις ισορροπίας της δοκού όταν η δοκός συμπιέζεται με αυξανόμενη δύναμη F που αντιστοιχεί στο αντίστοιχο θ_L του πρώτου κλάδου της διακλάδωσης στο F_c (βλ. Σχ. (11)). Η δύναμη που απαιτείται για να επιτευχθεί $\theta_L = \pi$ απειριόζεται.

249

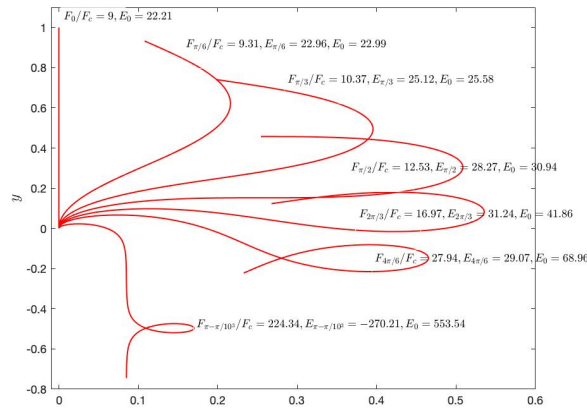
250

Το σχήμα της δοκού μετά το πρώτο σπάσιμο συμμετρίας έχει σχεδιασθεί στα Σχ. (12) και (??).

251

Σημείωση: Η ενέργεια (24) στην κατάσταση ισορροπίας είναι κάνοντας χρήση την (29)

$$\begin{aligned} V_{eq} &= 2F \int_0^{\theta_L} \cos \theta \frac{ds}{d\theta} d\theta - FL \cos \theta_L \\ &= -FL \cos \theta_L + 2\sqrt{DF} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - 2 \sin^2(\theta_L/2) \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_L/2) \sin^2 \phi}} d\phi \end{aligned}$$



Σχήμα 13: Διαδοχικές θέσεις ισορροπίας της δοκού όταν η δοκός συμπιέζεται με αυξανόμενη δύναμη F που αντιστοιχεί στο αντίστοιχο θ_L του δεύτερου κλάδου της διακλάδωσης στο $9F_c$ (βλ. Σχ. (11)). Η δύναμη που απαιτείται για να επιτευχθεί $\theta_L = \pi$ απειρίζεται.

252 20. (προαιρετικό) Εξετάστε το θεώρημα επιστροφής στο δυναμικό σύστημα $\dot{x} = 1$ όταν $t \in [0, 1]$
 253 και $\dot{x} = 0$ όταν $t \notin [0, 1]$. Εφόσον δεν ισχύει εξηγήστε τον λόγο που δεν ισχύει η απόδειξη του
 254 θεωρήματος.

255 Για τη Δευτέρα 22/4

256 21. Θεωρήστε τον μη γραμμικό ταλαντωτή:

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \varepsilon > 0 \quad (33)$$

257 (α) Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας του και την ευστάθειά τους.

258 (β) Με μέθοδο Runge-Kutta σχεδιάστε τροχιές του ταλαντωτή στο επίπεδο (x, \dot{x}) όταν είναι
 259 $\varepsilon = 0.1$ και έτσι προσδιορίστε τον ελκυστή αυτού του δυναμικού συστήματος. Τι συμβαίνει όταν
 260 είναι $\varepsilon = 0.01$;

261 Η παρατήρηση εδώ είναι η εξής: όταν είναι $\varepsilon = 0$ όλες οι κυκλικές τροχιές στο επίπεδο (x, \dot{x}) είναι
 262 περιοδικές τροχιές, ο εκφυλισμός όμως αίρεται με τον μη γραμμικό όρο και επιλέγεται μία μόνο
 263 τροχιά η οποία για οποιοδήποτε $\varepsilon \ll 1$ είναι κατά προσέγγιση η $x = 2 \cos(t)$. Το ερώτημα είναι
 264 γιατί επιλέγεται αυτή η τροχιά;

265 22. Ασκήσεις από Strogatz

7.1 Examples

Sketch the phase portrait for each of the following systems. (As usual, r, θ denote polar coordinates.)

7.1.1 $\dot{r} = r^3 - 4r, \theta = 1$ 7.1.2 $\dot{r} = r(1-r^2)(9-r^2), \theta = 1$

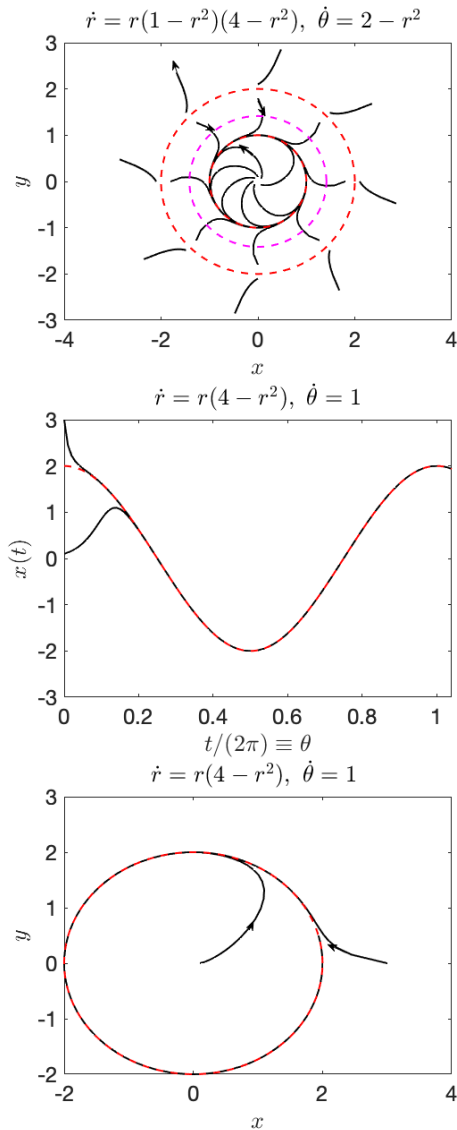
7.1.3 $\dot{r} = r(1-r^2)(4-r^2), \theta = 2 - r^2$ 7.1.4 $\dot{r} = r \sin r, \theta = 1$

7.1.5 (From polar to Cartesian coordinates) Show that the system $\dot{r} = r(1-r^2), \dot{\theta} = 1$ is equivalent to

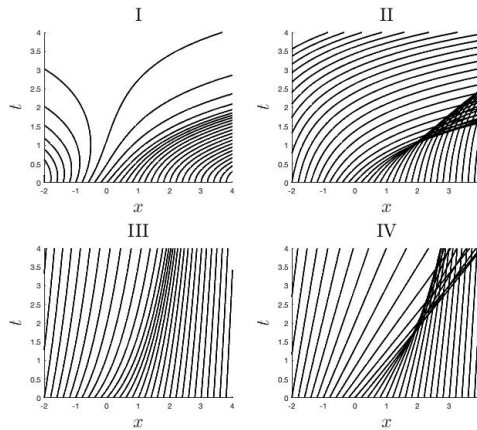
$$\dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2),$$

where $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. (Hint: $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta$.)

7.1.7 (Waveform) Consider the system $\dot{r} = r(4-r^2), \dot{\theta} = 1$, and let $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$. Given the initial condition $x(0) = 0.1, y(0) = 0$, sketch the approximate waveform of $x(t)$, without obtaining an explicit expression for it.



Σχήμα 14: Άσκηση 7.1.3 και 7.1.7. Στην 7.1.3 ο οριακός κύκλος $r = 1$ είναι ευσταθής (συνεχής κόκκινη γραμμή) ενώ ο $r = 2$ είναι ασταθής (διάστικτη κόκκινη γραμμή). Ο μαύρι διάστικτος κύκλος στο $r = \sqrt{2}$ είναι η ακτίνα στην οποία αλλάζει πρόσημο η γωνιακή ταχύτητα της κίνησης, οπότε η τροχιά τέμνει κάθετα τον κύκλο αυτό. Τα βέλη στο σχήμα σημειώνουν τη φορά της κίνησης. Μία λεπτομέρεια που δεν προσέξατε είναι ότι ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας είναι αρκετά μεγαλύτερος από τη γωνιακή ταχύτητα της κίνησης οπότε η τροχιά δεν προλαβαίνει να κάνει ούτε μισή περιστροφή πριν φτάσει στην περιοχή του οριακού κύκλου. Δεν φτάνει ποτέ στον οριακό κύκλο και στην περιοχή του οριακού κύκλου περιελίσσεται συνεχώς τείνοντας αργά προς τον οριακό κύκλο (στον οποίο δεν μπορεί να φτάσει σε πεπερασμένο χρόνο εφόσον υπάρχει μοναδικότητα στις λύσεις του δυναμικού συστήματος). Αυτό φαίνεται ιδιαίτερα στην άσκηση 7.1.7 (τα δύο επόμενα σχήματα). Η μέση ακτινική ταχύτητα για $0.1 < r < 1.9$ είναι 2.4 που σημαίνει αν η ακτινική κίνηση γινόταν με τη μέση ταχύτητα το διάστημα αυτό θα διανύετο σε χρόνο μικρότερο από 1 χρονική μονάδα ή $1/(2\pi) \approx 0.15$ ακτίνα (όπως φαίνεται στο σχήμα). Οπότε η προσαρμογή στην ταλάντωση $x = 2 \cos(t)$ γίνεται άμεσα και χωρίς ταλαντώσεις πριν προσεγγισθεί η οριακή τροχιά. Η προσαρμογή είναι σαν ταλάντωση με υπεραπόσβεση. Προσέξτε επίσης ότι επειδή η γωνιακή ταχύτητα δεν εξαρτάται με την απόσταση όλες οι αρχικές συνθήκες ανεξάρτητα αρχικής ακτίνας διανύουν ίσες γωνίες.



Σχήμα 15: Τα διαγράμματα της Ασκ. 22

Για την Δευτέρα 13/5

22. Στα διαγράμματα του Σχ. 15 έχουν σχεδιαστεί οι χαρακτηριστικές των πεδίων $u(x, t)$ όταν $u(x, 0) = 1/(1+x^2)$ και η εξέλιξη γίνεται με τις εξής δυναμικές:

(α) $u_t + uu_x = 0$

(β) $u_t + uu_x = u$

(γ) $u_t + uu_x = x$

(δ) $u_t + uu_x = -u^2$.

Σημειώστε ποιά διάγραμμα αντιστοιχεί σε ποιά εξίσωση εξηγώντας με λίγες γραμμές την επιλογή σας.

$\gamma=I, \beta=II, \delta=III, \alpha=IV$

Η λύση αναλυτικά:

```

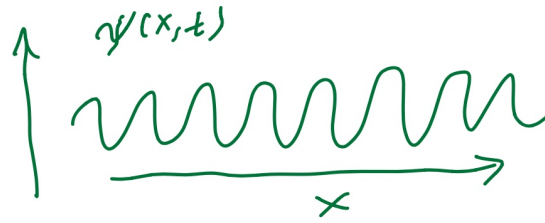
clear all
Nx=50;
x=linspace(-4,4,Nx)';
Nt=101;
tt=linspace(0,4,Nt)';
f=1./(1+x.^2);
Ca=zeros(Nt,Nx);Cb=Ca;Cc=Ca;Cd=Ca;
for ix=1:Nx
    fxi=f(ix);xi=x(ix);
    %(a)->IV
    Ca(:,ix)=fxi*tt+xi;
    %(b)->II
    Cb(:,ix)=fxi*(exp(tt)-1)+xi;
    %(c)->I
    Cc(:,ix)=fxi*sinh(tt)+xi*cosh(tt);
    % (d)->III

```

```

293     Cd(:,ix)=xi+log(1+fxi*tt);
294 end
295 figure(80);subplot(224)
296 plot(Ca,tt,'k','linewidth',2,'markersize',20);hold on
297 xlabel('$x$','Interpreter','latex')
298 ylabel('$t$','Interpreter','latex')
299 xlim([-2 4])
300 title('$IV$','interpreter','latex')
301 set(gca,'FontSize',24)
302 hold off
303 figure(80);subplot(223)
304 plot(Cd,tt,'k','linewidth',2,'markersize',20);hold on
305 xlabel('$x$','Interpreter','latex')
306 ylabel('$t$','Interpreter','latex')
307 xlim([-2 4])
308 title('$III$','interpreter','latex')
309 set(gca,'FontSize',24)
310 hold off
311 figure(80);subplot(222)
312 plot(Cb,tt,'k','linewidth',2,'markersize',20);hold on
313 xlabel('$x$','Interpreter','latex')
314 ylabel('$t$','Interpreter','latex')
315 xlim([-2 4])
316 title('$II$','interpreter','latex')
317 set(gca,'FontSize',24)
318 hold off
319 figure(80);subplot(221)
320 plot(Cc,tt,'k','linewidth',2,'markersize',20);hold on
321 xlabel('$x$','Interpreter','latex')
322 ylabel('$t$','Interpreter','latex')
323 xlim([-2 4])
324 title('$I$','interpreter','latex')
325 set(gca,'FontSize',24)
326 hold off

```



Σχήμα 16

23. Θεωρήστε μονοδιάστατο πεδίο $\psi(x, t)$ που εμφανίζει κορυφώσεις, όπως στο Σχήμα 16, οι οποίες έχουν δεδομένη κατεύθυνση κίνησης, έστω τη θετική. Θεωρούμε ότι ο κυματισμός του πεδίου είναι πολύ πυκνός ώστε να μπορούμε να ορίσουμε ως συνεχείς μεταβλητές τον αριθμό των κορυφών του πεδίου ανά cm , $k(x, t)$, και τον αριθμό των κορυφών ανά second, $\omega(x, t)$, που περνούν προς τη θετική κατεύθυνση από το σημείο x . Θεωρούμε επίσης ότι οι κορυφές παραμένουν κορυφές, ούτε διασπώνται, ούτε δημιουργούνται, ούτε εξαφανίζονται, έτσι ώστε ο αριθμός των κορυφών του πεδίου να διατηρείται.

α) Δείξτε από πρώτες αρχές ότι η διατήρηση του αριθμού των κορυφών οδηγούν στην εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 . \quad (34)$$

β) Το k είναι ο τοπικός κυματαριθμός, και το ω η τοπική συχνότητα του κυματισμού. Αν γνωρίζουμε ότι για το πεδίο αυτό υπάρχει σχέση $\omega(k)$ γράψτε την εξίσωση που διέπει το k .

Εάν $\omega(k) = k^2/2$ (όπως για το ελεύθερο σωματίο στην κβαντική μηχανική)

γ) σχεδιάστε στο ίδιο διάγραμμα (x, t) τον τόπο των χωροχρονικών σημείων που θα έχουν κυματάριθμο $k = 1$ όταν στον χρόνο $t = 0$ το $k = 1$ ήταν στο $x = 0$, και τον τόπο των σημείων με κυματάριθμο $k = 1/2$ αν αρχικά τα $k = 1/2$ ήταν στο $x = 1$ και $x = -1$.

δ) Όταν κατά τη χρονική εξέλιξη το πεδίο $k(x, t)$ γίνει πλειότιμο η εξέλιξη αυτή πρέπει αναγκαστικά να απορριφθεί; Αν όχι τι θα μπορούσε να περιγράψει (μονολεκτική απάντηση);

(ε) Αναφέρατε τι φαινόμενα δεν συμπεριλαμβάνει η εξίσωση (34) (μιά γραμμή).

Νόμοι διατήρησης σε πεδία

Στη κλασσική μηχανική των σωματιδίων ορίσαμε διατηρήσιμες ποσότητες όπως την ενέργεια, ορμή, κ.λ.π. τις ποσότητες, $Q(t)$, που δεν μεταβάλλονται κατά τη χρονική εξέλιξη του συστήματος, και που ικανοποιούν δηλαδή

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (35)$$

351 Στη μηχανική αυτή οι μεταβλητές του συστήματος, θέσεις και ορμές, καθώς και κάθε ποσότητα
352 που σχηματίζεται από αυτές είναι συναρτήσεις μόνο του χρόνου κατά τη χρονική εξέλιξη του
353 συστήματος.

354 Στη μηχανική των πεδίων οι μεταβλητές είναι συναρτήσεις και του χρόνου και των χωρικών
355 διαστάσεων. Ας θεωρήσουμε ότι το πεδίο εκτείνεται σε μία χωρική διάσταση, είναι δηλαδή ένα
356 πεδίο 1-διάστασης, π.χ. το φυσικό σύστημα να είναι μία χορδή που εκτελεί εγκάρσιες ταλαντώ-
357 σεις πλάτους $\eta(x, t)$. Υπό αυτή την έννοια η μηχανική των σωματιδίων είναι μηχανική πεδίων
358 0-διάστασης.

Πως μπορούμε να περιγράψουμε το νόμο διατήρησης σε αυτό το πεδίο; Θα μπορούσαμε να πούμε ότι κατά την κίνηση η ποσότητα $Q(t) = \int_{\mathcal{D}} dx q(x, t)$, όπου \mathcal{D} το χωρίο του καταλαμβάνεται από το πεδίο, είναι χρονικά σταθερή. Η ποσότητα αυτή λέγεται το συνολικό "φορτίο" (ή φορτίο Noether). Αυτός όμως ο ορισμός διατήρησης δεν είναι ικανοποιητικός διότι ο νόμος διατήρησης πρέπει να περιγράφει τη διατήρηση των ποσοτήτων όπως εξελίσσονται χωροχρονικά. Θεωρήστε ότι το πεδίο $q(x, t)$ περιγράφει την πυκνότητα φορτίου δύο σημειακών αντιθέτων φορτίων $q(x, 0) = a\delta(x - x_1) - a\delta(x - x_2)$, που είναι αρχικά στις θέσεις x_1, x_2 , και ότι για κάθε χρόνο $t > 0$ το πεδίο είναι $q(x, t) = 0$. Ενώ το Q του πεδίου αυτού διατηρείται είναι εμφανές ότι η ποσότητα αυτή δεν περιγράφει τη διατήρηση των φορτίων που στην περίπτωση αυτή εξαφανίζονται. Είναι εμφανές ότι ένας καθολικός νόμος διατήρησης, όπως αυτός του συνολικού φορτίου Q δεν περιγράφει ικανοποιητικά τη διατήρηση ποσοτήτων στα πεδία. Οι νόμοι διατήρησης στα πεδία πρέπει να έχουν τοπική διατύπωση και απαιτούν για τη διατύπωσή τους δύο πεδία: την πυκνότητα της διατηρήσιμης ποσότητας $q(x, t)$ και τη ροή της διατηρήσιμης ποσότητας $f(x, t)$, τα οποία πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (36)$$

Η εξίσωση συνέχειας είναι η διατύπωση του νόμου διατήρησης του πεδίου. Ο τοπικός αυτός νόμος διατήρησης βεβαιώνει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ποσότητας $\int_a^b dx q(x, t)$ στο χωρίο $[a, b]$, για κάθε $a < b$, είναι ίσος με τον ρυθμό f με τον οποίον το q εισέρχεται στο σύνορο a και εξέρχεται στο σύνορο b , δηλαδή είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b dx q(x, t) = f(a, t) - f(b, t). \quad (37)$$

359 Η διατύπωση του νόμου διατήρησης στην ολοκληρωτική μορφή είναι ισχυρότερος διότι απαιτεί
360 μόνο την ολοκληρωσιμότητα των συναρτήσεων q και f , άλλως οι (36) και (37) είναι ισοδύναμες
361 διατυπώσεις. Βεβαίως, ο τοπικός νόμος διατήρησης (36) συνεπάγεται τον καθολικό (35) (με κα-

362
363
364
365
366
367
368

τάλληλες συνοριακές συνθήκες), ενώ όπως είδαμε δεν ισχύει το αντίστροφο.

Το συναφές πεδίο f προσδιορίζεται από το φυσικό πρόβλημα. Εάν το πεδίο είναι η πυκνότητα ενός ρευστού που κινείται με ταχύτητα $v(x, t)$ τότε η διατήρηση της μάζας απαιτεί το $f = \rho v$. Σε άλλες περιπτώσεις το f προσδιορίζεται από τις εξισώσεις του πεδίου και ένας συστηματικός τρόπος προσδιορισμού της πυκνότητας q και f γίνεται μέσω του θεωρήματος της Noether που έχετε δει για πεδία 0-διάστασης. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να προσδιορίσουμε το νόμο διατήρησης της ενέργειας, ορμής κλπ μίας χορδής ή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Λύση της 23

Στο διάστημα $[a, \beta]$ έχουμε

$$\int_a^\beta k dx \tag{38}$$

κορυφές, δεδομένου ότι $k(x, t)$ είναι η πυκνότητα των κορυφών. Ο ρυθμός μεταβολής του αριθμού των κορυφών σε αυτό το διάστημα ισούται με τη διαφορά του ρυθμού κορυφών που εισέρχονται και εξέρχονται από αυτό το διάστημα, που είναι

$$\omega(a, t) - \omega(\beta, t) = - \int_a^\beta \frac{\partial \omega}{\partial x} dx . \tag{39}$$

Άρα από τις υποθέσεις η διατήρηση του αριθμού των κορυφών απαιτεί την εξής ισότητα:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^\beta k dx = \int_a^\beta \frac{\partial k}{\partial t} dx = - \int_a^\beta \frac{\partial \omega}{\partial x} dx . \tag{40}$$

Εξ'αυτού συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_a^\beta \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dx = 0 , \tag{41}$$

369
370
371

για κάθε $a < \beta$. Συνεπώς πρέπει η ολοκληρωτέα ποσότητα να μηδενίζεται (χρειάζεται μόνο συνέχεια εδώ των παραγώγων) και έτσι αποδεικνύεται ότι το k και ω ικανοποιούν τη γνωστή σχέση συνέχειας:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 . \tag{42}$$

372

Αν δε η $\omega(k)$ είναι συνάρτηση του k τότε το k εξελίσσεται χωροχρονικά σύμφωνα με την

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \omega'(k) \frac{\partial k}{\partial x} = 0 , \tag{43}$$

όπου $\omega'(k) = d\omega/dk$. Η εξίσωση αυτή εκφράζει ότι επί των σημείων του χωρόχρονου (x, t) που ικανοποιούν τη σχέση

$$x = \omega'(k)t + x_0 , \tag{44}$$

373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383

ο κυματαριθμός έχει τη σταθερή τιμή k και το σημείο x_0 είναι το σημείο στο χώρο που στον χρόνο $t = 0$ η πυκνότητα κορυφών (ο κυματάριθμος) είναι k . Συνεπώς σταθερές τιμές του k διαδίδονται με την ταχύτητα ομάδας $\omega'(k)$.

Μία διαφορά που προκύπτει σε αυτήν την περίπτωση είναι ότι όταν οι χαρακτηριστικές τέμνονται δεν παράγεται κρουστικό κύμα. Η συχνότητα μπορεί χωρίς πρόβλημα να έχει δύο τιμές στο ίδιο σημείο, μπορεί να έχουμε δύο ομάδες κυμάτων διαφορετικών συχνοτήτων που μεταδίδονται στα ίδια σημεία. Δηλαδή εδώ δεν εμφανίζονται ασυνέχειες στη συχνότητα.

Ο νόμος διατήρησης των κορυφών κυμάτων με διασπορά δεν ισχύει πάντα. Είναι καλή προσέγγιση όταν έχει περάσει αρκετός χρόνος και το κυματοπακέτο έχει απλωθεί και τότε η εμφάνιση και εξαφάνιση κορυφών είναι σπάνιο φαινόμενο.

Παρατήρηση:

Από τη (42) προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{(x_0, t_0)}^{(x, t)} k dx - \omega dt \quad (45)$$

είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που ενώνει το σημείο του χωρόχρονου (x_0, t_0) με το (x, t) και ορίζει μία συνάρτηση $\varphi(x, t)$ η οποία έχει ως παραγώγους τον κυματάριθμο και τη συχνότητα:

$$k = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (46)$$

Το $\varphi(x, t)$ είναι η τοπική φάση των κυμάτων. Πχ. αν $\varphi(x, t) = kx - \omega t$ έχουμε την κλασσική φάση ενός μονοχρωματικού κύματος. Επειδή τώρα

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt \quad (47)$$

η σταθερή φάση $d\varphi = 0$ διαδίδεται με ταχύτητα

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\varphi} = -\frac{\partial \varphi / \partial t}{\partial \varphi / \partial x} = \frac{\omega}{k}, \quad (48)$$

384
385

που είναι η γνωστή φασική ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η φάση ενός κύματος (πχ. μία κορυφή).

386 24. Το πάχος της μπογιάς $\eta(x, t)$ που εναποτίθεται σε μία κατακόρυφη επιφάνεια ρέει υπό την επί-
387 δραση της βαρύτητας και εξελίσσεται σύμφωνα με την κατάλληλα αδιαστατικοποιημένη εξί-
388 σωση συνέχειας:

$$\eta_t + \left(\frac{\eta^3}{3}\right)_x = 0 . \quad (49)$$

389 (ο κύβος προέρχεται διότι η ταχύτητα της μπογιάς είναι παραβολική συνάρτηση της απόστασης
390 από τον τοίχο και η παροχή κυβική συνάρτηση του πάχους του ρευστού). Αρχικά η μπογιά περιο-
391 ρίζεται στη λωρίδα $0 < x < 1$ έτσι ώστε

$$\eta(x, 0) = \begin{cases} 0 , & x > 1, \\ 1 , & x \leq 1 . \end{cases}$$

392 Κατά την εξέλιξη σχηματίζεται κρουστικό κύμα που αποτρέπει να γίνει η $\eta(x, t)$ πλειότιμη συ-
393 νάρτηση του x .

394 (α) Προσδιορίστε μια διατηρήσιμη ποσότητα αυτής της δυναμικής.

395 (β) Σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές καμπύλες της δυναμικής σε χωροχρονικό διάγραμμα (x, t) και
396 σημειώστε στο διάγραμμα αυτό τη χωροχρονική εξέλιξη του κρουστικού κύματος.

397 (γ) Σχεδιάστε την η συναρτήσει του x την χρονική στιγμή $t = 1$ και $t = 2$.

398 (δ) Ένας μαθηματικός υποστηρίζει ότι η παραπάνω δυναμική είναι ισοδύναμη με αυτήν της εξί-
399 σωσης Hopf, διότι πολλαπλασιάζοντας την (49) με την 2η έχουμε $2\eta\eta_t + \eta^2 2\eta\eta_x = 0$ ή

$$u_t + uu_x = 0 , \quad (50)$$

400 αν θέσουμε $u = \eta^2$. Προσδιορίστε τώρα την ταχύτητα του κρουστικού κύματος στην αναπαρά-
401 σταση (50) της αρχικής δυναμικής και εξηγήστε γιατί η αναπαράσταση (50) ενώ φαίνεται ισοδύ-
402 ναμη με την (49), τελικά δεν είναι.

403 Λύση

404 (α) για κάθε n οι ποσότητες $\int_{-\infty}^{\infty} dx \eta^n$ διατηρούνται καθώς και οι "πυκνότητες" η^n επίσης ικανο-
405 ποιούν τοπικό νόμο διατήρησης. το $\int_{-\infty}^{\infty} dx \eta$ είναι ανάλογο της μάζας της μπογιάς, και είναι η
406 πρωταρχική αρχή διατήρησης που θα ισχύει και όταν υπάρχουν ασυνέχειες. Δεν χάνεται η μάζα,
407 η ενέργεια χάνεται όταν σχηματίζεται κρουστικό κύμα.

408 (β) Η ταχύτητα του κρουστικού κύματος είναι $1/3$ δεδομένου ότι διατηρείται η μάζα $\int_{-\infty}^{\infty} dx \eta$. (δ)
409 Αν θεωρήσουμε ότι η (50) έχει φυσική οντότητα, δηλαδή ισχύει η διατήρηση του $u = \eta^2$ και όχι
410 του η , στο όριο που δεν υπάρχει τριβή τότε η ταχύτητα του κρουστικού κύματος που προκύπτει
411 είναι $1/2$. Οπότε βλέπουμε ότι η ταχύτητα θα έχει το κρουστικό κύμα εξαρτάται από ποιά είναι
412 η φυσικά πρωταρχική ποσότητα που διατηρείται! Δηλαδή δεν μπορούμε βλέποντας μια μερική
413 διαφορική εξίσωση να προβλέψουμε ποια είναι η ταχύτητα του κρουστικού κύματος. Για αυτό
414 απαιτείται να γνωρίζουμε ποια μεταβλητή του φυσικού προβλήματος διατηρείται όταν εμφανί-
415 ζονται ασυνέχειες.

417 25. Έστω $u(x, t)$ πεδίο ταχυτήτων που εξελίσσεται σύμφωνα με την $u_t + uu_x = 0$ με αρχική κατανομή

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & , \quad |x| > 1, \\ 1 & , \quad |x| \leq 1. \end{cases}$$

418 Δείξτε ότι το κρουστικό κύμα που κινείται με ταχύτητα $1/2$ είναι συμβατό με τη διατήρηση της
419 ορμής $\int_{-\infty}^{\infty} dx u$ αλλά όχι της ενέργειας $\int_{-\infty}^{\infty} dx u^2$. Δείξτε τώρα ότι στη δυναμική $u_t + u^2 u_x = 0$
420 με την ίδια αρχική συνθήκη και με ταχύτητα κρουστικού κύματος $1/3$ διατηρείται πάλι η ορμή
421 $\int_{-\infty}^{\infty} dx u$ και όχι η ενέργεια $\int_{-\infty}^{\infty} dx u^2$.

422 26. Θεωρήστε μονοδιάστατη διάδοση κυμάτων της θάλασσας με $\omega = \sqrt{gk}$, g η επιτάχυνση της βα-
423 ρύτητας. Παρατηρούμε τον κυματισμό που φτάνει στην ακτή που προκλήθηκε από έκρηξη σε
424 κάποιο σημείο στη θάλασσα που είναι σε απόσταση L από την ακτή. Στις 12 το μεσημέρι παρα-
425 τηρούμε κύματα μήκους κύματος $7 m$, και μισή ώρα αργότερα κύματα $2 m$. Πόσο μακριά από την
426 ακτή έγινε η έκρηξη; (Υπ. βλ. (43))

427 27. Strogatz 6.4.4 και 6.4.5. Παραλαγές του μοντέλου του ανταγωνισμού (πρόβατα-λαγούς, δυνατότητα
428 ειρηνικής συνύπαρξης)

6.4.4 The simplest model is $\dot{N}_1 = r_1 N_1 - b N_1 N_2$, $\dot{N}_2 = r_2 N_2 - b_2 N_1 N_2$.

a) In what way is this model less realistic than the one considered in the text?

b) Show that by suitable rescalings of N_1 , N_2 , and t , the model can be nondimensionalized to $x' = x(1 - y)$, $y' = y(\rho - x)$. Find a formula for the dimensionless group ρ .

c) Sketch the nullclines and vector field for the system in (b).

d) Draw the phase portrait, and comment on the biological implications.

e) Show that (almost) all trajectories are curves of the form $\rho \ln x - x = \ln y - y + C$. (Hint: Derive a differential equation for dx/dy , and separate the variables.) Which trajectories are not of the stated form?

6.4.5 Now suppose that species #1 has a finite carrying capacity K_1 . Thus

$$\dot{N}_1 = r_1 N_1 (1 - N_1/K_1) - b_1 N_1 N_2$$

$$\dot{N}_2 = r_2 N_2 - b_2 N_1 N_2.$$

Nondimensionalize the model and analyze it. Show that there are two qualitatively different kinds of phase portrait, depending on the size of K_1 . (Hint: Draw the nullclines.) Describe the long-term behavior in each case.