ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Πρώτο τεστ Μη Γραμμικής Δυναμικής

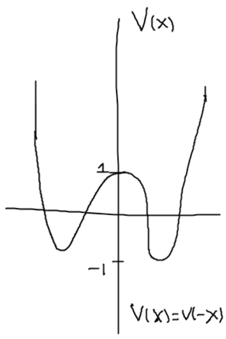
17/5/2023

Σύνολο μορίων 125

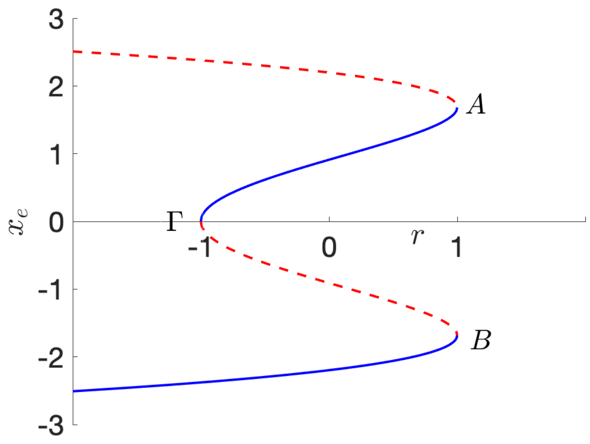
1. Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = \cos(x)$, $x(0) = 0$.
   (α) Γράψτε την αναδρομική σχέση Picard που προσδιορίζει τη λύση του δυναμικού συστήματος. [**5**]

   (β) Με 4 επαναλήψεις με τη μέθοδο Picard προσδιορίστε την εξέλιξη του δυναμικού συστήματος για μικρούς χρόνους. [**10**]

   (α) $x_{n+1}(t) = \int_0^t ds\ \cos(x_n(s)),\ x_1(t) = 0.$
   (β) $x_2 = \int_0^t ds\ \cos(0) = t,\ x_3 = \int_0^t ds\ \cos(s) = \sin(t)$, $x_4(t) = \int_0^t ds\ \cos(\sin(s)))$
   (Μπορείτε να δείτε ποιά είναι η λύση αυτής της διαφορικής;)



2. Σχεδιάστε το διάγραμμα διακλάδωσης $x_e(r)$ (x_e τα σημεία ισορροπίας όταν η παράμετρος έχει την τιμή r) που αναμένεται να εμφανίσει το δυναμικό σύστημα: $\dot{x} = V(x) + r$ ($x \in \mathbb{R}$), με το συμμετρικό δυναμικό $V(x)$ του σχήματος. Σημειώστε με διάστικτη γραμμή τα ασταθή σημεία ισορροπίας και με συνεχή γραμμή τα ευσταθή και αναφέρατε το είδος των διακλαδώσεων που εμφανίζονται. [**15**]



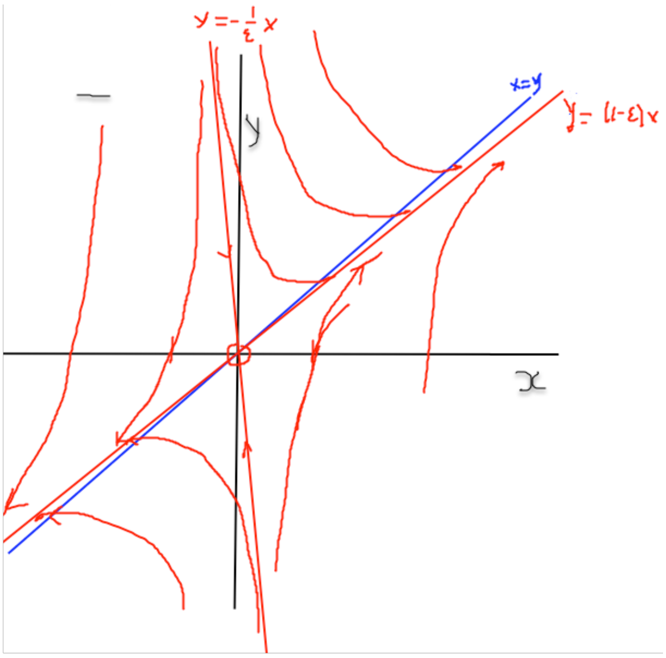
Σχήμα 1: Με μπλε συνεχή γραμμή σημειώνονται τα ευσταθή σημεία ισορροπίας, με κόκκινη διάστιχτη γραμμή σημειώνονται τα ασταθή σημεία ισορροπίας. Οι διακλαδώσεις στα Α και Β στο $r = 1$ είναι υποκρίσιμες saddle-node, στο Γ στο $r = -1$ είναι υπερκρίσιμη saddle-node.

3. Σχεδιάστε τη ροή στο επίπεδο $(x, \dot{x})$ του Νευτώνειου συστήματος $\varepsilon\ddot{x} + \dot{x} - x = 0$ με $\varepsilon = 10^{-10}$. Σε πόσο χρόνο αναμένεται να ισχύσει η Αριστοτέλεια μηχανική; **[10]**

Το σύστημα γράφεται ως

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y\,, \\ \dot{y} &= \frac{x-y}{\varepsilon}\,. \end{aligned}$$

Όταν $|x - y| = O(1)$ η ταχύτητα είναι $\dot{y} = O(1/\varepsilon) \approx 10^{10}$ και συνεπώς σε χρόνο $t_A = O(\varepsilon) \approx 10^{-10}$ οι τροχιές θα κατευθυνθούν προς την ευθεία $|x - y| = O(\varepsilon)$ και η δυναμική θα γίνει με ακρίβεια $O(\varepsilon)$ Αριστοτοτέλεια, $\dot{x} = x$. Η ροή είναι η ακόλουθη:



Σχήμα 2: Με κόκκινες γραμμές η ροή. Με μπλε η Αριστοτέλεια $y = x$ με ασταθές το σημείο $x = 0$. Στην Αριστοτέλεια προσέγγιση η εξέλιξη γίνεται ακριβώς επί της μπλέ ευθείας, απομακρυνόμενη από το ασταθές σημείο ισορροπίας $x = 0$. Όμως, όλες οι τροχιές (πλην δύο) θα τμήσουν την ευθεία επί της οποίας εξελίσσεται η Αριστοτέλεια δυναμική $y = x$ με μηδενική κλίση, διότι επί της ευθείας αυτής είναι $\dot{y} = 0$ (δηλαδή είναι nullcline), και θα προσεγγίσουν ασυμπτωτικά την $y = (1 - \varepsilon)x$, που είναι η ασταθής πολλαπλότητα του σημείου ισορροπίας $(0, 0)$ της πλήρους δυναμικής. Το $(0, 0)$ στην πλήρη δυναμική είναι σάγμα και η ευσταθής πολλαπλότητα, $y = -x/\varepsilon$, διαχωρίζει τις τροχιές που καταλήγουν στο $x > 0$ και σε αυτές στο $x < 0$. Η άλλη καμπύλη μηδενικής κλίσης (nullcline) είναι η $y = 0$ την οποία η τροχιές τέμνουν κάθετα, $\dot{x} = 0$.

4. Ο ταλαντωτής $\ddot{x} + \varepsilon(x - 3)(x + 1)\dot{x} + x = 0$, $0 < \varepsilon << 1$ έχει έναν οριακό κύκλο. Εντοπίστε τον κύκλο αυτόν κάνοντας χρήση ενεργειακού επιχειρήματος. **[15]**

Εφόσον $0 < \varepsilon << 1$ οι τροχιές θα είναι οιονεί περιοδικές και κυκλικές στο επίπεδο $(x, \dot{x})$, και με περίοδο σε πρώτη τάξη 2π. Ο οριακός κύκλος θα είναι τότε η τέλεια περιοδική τροχιά, $x = a\cos t$, επί της οποίας η $E(t) = \dot{x}^2/2 + x^2/2$ θα ικανοποιεί σε πρώτη τάξη:

$$
\begin{aligned}
0 &= E(2\pi) - E(0) \\
&= \int_0^{2\pi} dt\, \frac{dE}{dt} \\
&= -\varepsilon \int_0^{2\pi} dt\, \dot{x}^2 (x-3)(x+1) \\
&= -\varepsilon a^2 \int_0^{2\pi} dt \sin^2 t (a^2 \cos^2 t - 2a \cos t - 3) \\
&= -\varepsilon a^2 \int_0^{2\pi} dt (a^2 (\sin(2t))^2/4 - 3 \sin^2 t) \\
&= -\varepsilon a^2 \pi (a^2/4 - 3)\ .
\end{aligned}
$$

Συνεπώς ο οριακός κύκλος έχει ακτίνα $a = \sqrt{12}$!

5. Το δυναμικό σύστημα $\dot{x} + x = \sin(t)$, $x(0) = x_0$ έχει ως λύση την

$$
x(t) = e^{-t} x_0 + \frac{e^{-t}}{2} + \frac{\sin(t) - \cos(t)}{2}\ .
$$

(α) Είναι για κάθε αρχική συνθήκη η τροχιά περιοδική; [**2**]
(β) Γράψτε την απεικόνιση Poincaré $P(x)$ μίας περιόδου. [**3**]
(γ) Δείξτε μέσω της απεικόνισης Poincaré ότι το δυναμικό αυτό σύστημα έχει περιοδική τροχιά και προσδιορίσετέ την. [**5**]
(δ) Τι θα συμβεί αν το σύστημα αρχίζει από τιμή διαφορετική από αυτήν της περιοδικής τροχιάς; [**10**]

(α) Από τη λύση φαίνεται ότι η λύση θα είναι περιοδική μόνο για την αρχική συνθήκη $x_0 = -1/2$.

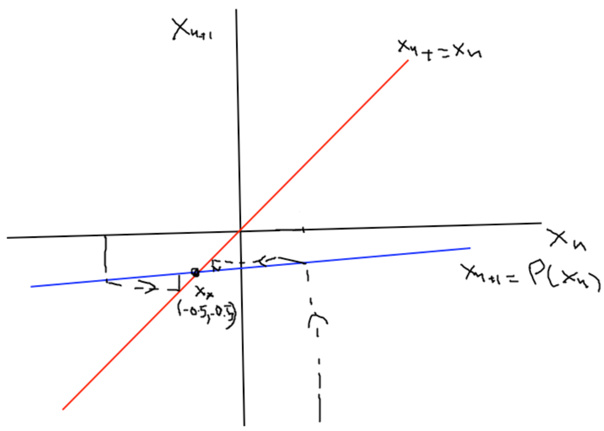
(β) Η περίοδος είναι 2π, η απεικόνιση Poincaré είναι $P(x) = e^{-2\pi} x - \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi})$.

(γ) Η δυναμική τώρα από περίοδο σε περίοδο δίνεται από την αναδρομική σχέση $x_{n+1} = e^{-2\pi} x_n - \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi})$ και όταν έχουμε περιοδική τροχιά είναι $x_{n+1} = x_n$ οπότε η περιοδική τροχιά θα έχει αρχικό σημείο το $x_* = -1/2$, όπως είδαμε και στο (α).

(δ) Αυτό φαίνεται και σε διάγραμμα στο επίπεδο (x_n, x_{n+1}) από την τομή της απεικόνισης Poincaré, που είναι η ευθεία $x_{n+1} = e^{-2\pi} x_n - \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi})$, με την $x_{n+1} = x_n$. Η κλίση της ευθείας είναι $e^{-2\pi} < 1$, οπότε η περιοδική τροχιά είναι ευσταθής και όλες οι αρχικές τιμές θα οδηγήσουν σε τροχιές που συγκλίνουν στην περιοδική.

6. Ένα μοντέλο που περιγράφει ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε πλάσμα είναι το Adlam − Allen (AA), που μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη κανονικοποιημένη μορφή:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} + w_{xx} + \frac{1}{2}(w^2)_{xx} &= 0, \\
w_{xx} - w - u - uw &= 0\ ,
\end{aligned}
$$



όπου οι συναρτήσεις $u(x,t)$ και $w(x,t)$ εκφράζουν την αντίστροφη πυκνότητα του πλάσματος και το μαγνητικό πεδίο, αντίστοιχα, με $u, w \to 0$ για $x \to \pm\infty$. Ζητούνται:
(α) Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις που ικανοποιούν οι συναρτήσεις u και w. **[5]**
(β) Η σχέση διασποράς. **[10]**
(γ) Ποια είναι η μορφή της σχέσης διασποράς στο όριο των μακρών κυμάτων ($k \ll 1$); Σε αυτή την περίπτωση, ποια είναι η ταχύτητα φάσης και η ταχύτητα ομάδας; **[10]**

(α)

$$u_{tt} + w_{xx} = 0,$$
$$w_{xx} - w - u = 0\,.$$

(β) Λαμβάνοντας $u = \hat{u}e^{ikx-i\omega t}$ και $w = \hat{w}e^{ikx-i\omega t}$ έχουμε

$$\omega^2\hat{u} + k^2\hat{w} = 0,$$
$$\hat{u} + (1+k^2)\hat{w} = 0\,.$$

Συνεπώς η σχέση διασποράς είναι

$$\omega = \pm\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\,.$$

(γ) Όταν $k \ll 1$

$$\omega = \pm k\left(1 - \frac{k^2}{2} + \cdots\right) = \pm\left(k - \frac{k^3}{2} + \cdots\right)\,.$$

Η ταχύτητα φάσης είναι

$$c = \frac{\omega}{k} = \pm\left(1 - \frac{k^2}{2} + \cdots\right)\,,$$

ενώ η ταχύτητα ομάδας:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \pm\left(1 - \frac{3k^2}{2} + \cdots\right)\,.$$

7. Έστω η εξίσωση Hopf για το πεδίο $u(x,t)$:

$$u_t + uu_x = 0 \ \ , x \in \mathbb{R}, \ \ t \geq 0 \ ,$$

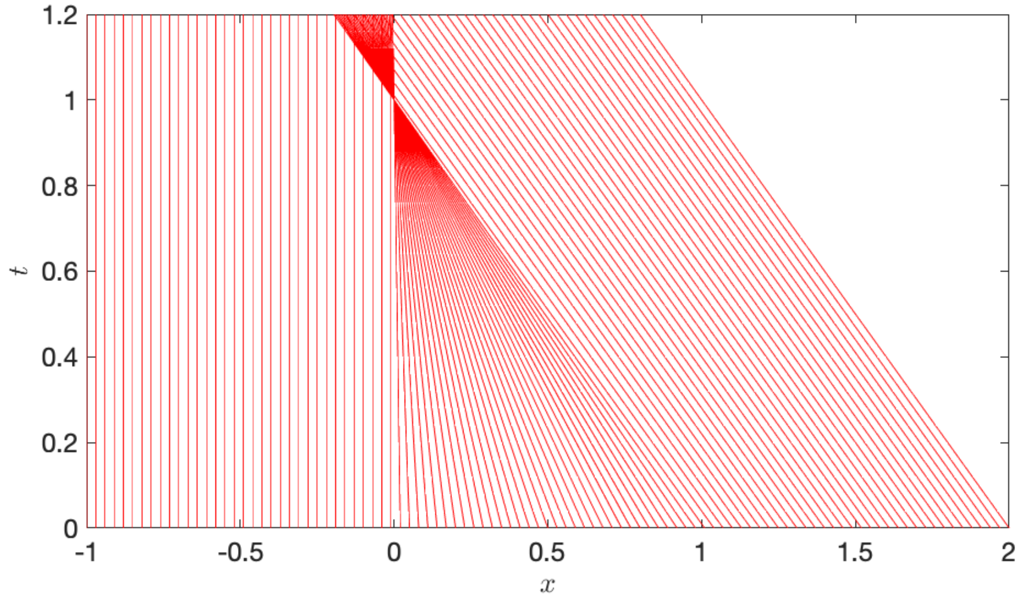
εφοδιασμένη με την αρχική συνθήκη:

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -x, & x \in [0,\ 1) \\ -1, & x \geq 1 \ . \end{cases}$$

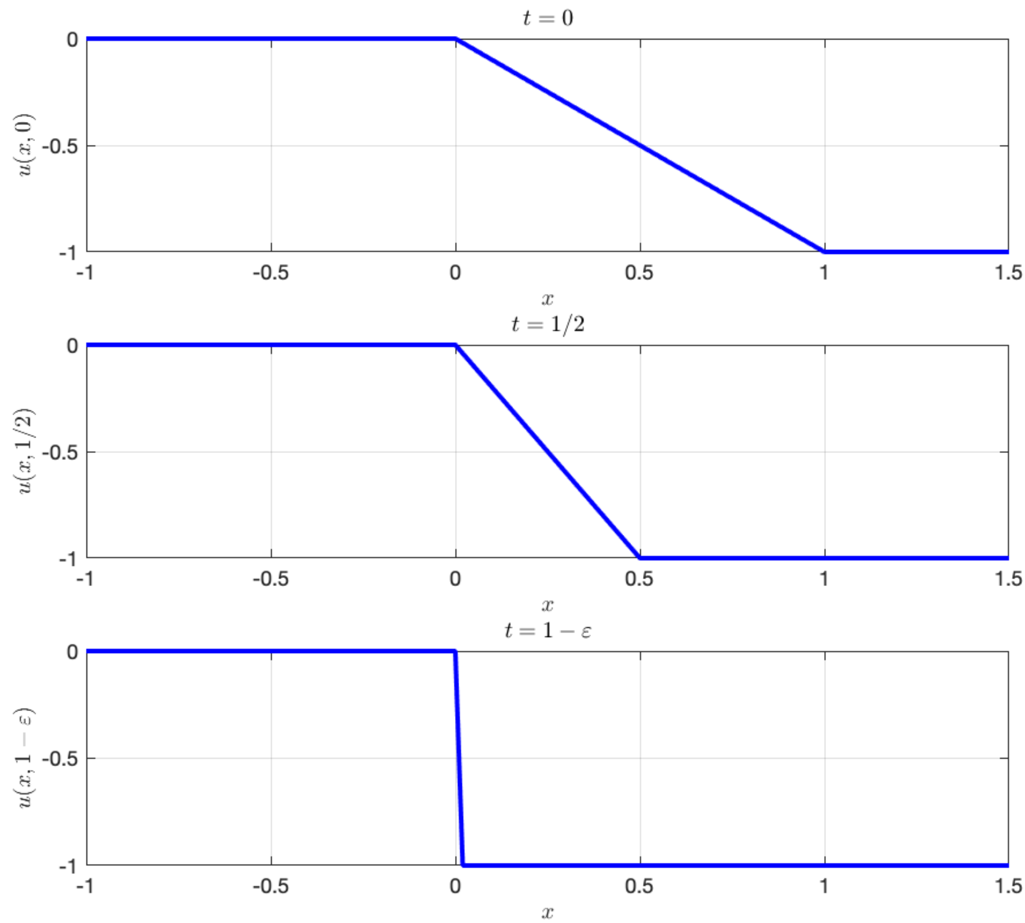
α) Προσδιορίστε και σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές καμπύλες επί των οποίων το πεδίο λαμβάνει σταθερές τιμές. **[10]**

β) Προσδιορίστε το χρόνο θραύσης. **[5]**

γ) Σχεδιάστε το πεδίο τις χρονικές στιγμές $t = 0$, $t = 1/2$ και $t = 1$. **[10]**



Σχήμα 3: Οι χαρακτηριστικές τέμνονται για πρώτη φορά στον χρόνο $t = 1$ στο σημείο $x = 0$.



Σχήμα 4: Η εξέλιξη της αρχικής κατάστασης. Στον χρόνο $t = 1$ το πεδίο $u(x,t)$ παύει να μπορεί να περιγραφεί από αυτήν τη δυναμική δεδομένου ότι η λύση ισχύει μόνο στο διάστημα $t \in [0, 1)$, στον χρόνο $t = 1$ η $u(x,t)$ που προκύπτει δεν είναι συνάρτηση. Ο χρόνος θραύσης είναι $t_B = \min_\xi(-1/u_0'(\xi)) = 1$ (οι γωνίες δεν αλλάζουν την εκτίμηση αυτή). Αυτό συμβαίνει για όλα τα $0 < \xi < 1$, συνεπώς όλες οι χαρακτηριστικές σε αυτό το διάστημα εστιάζονται στο χωροχρονικό σημείο $(0, 1)$, δεδομένου ότι $x_B = -\xi t_B + \xi = 0, \forall \xi \in (0, 1)$.