ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Τελική εξέταση Μη Γραμμικής Δυναμικής

14/6/2023

Σύνολο μορίων 150

1. Για τον 2Χ2 πίνακα A η εκθετική συνάρτηση ορίζεται ως το όριο: $e^A = \lim_{n\to\infty}(1 + A/n)^n$. Δείξτε ότι $\det(e^A) = e^{\mathrm{trace}(A)}$. **[10]**

- Για το δυναμικό σύστημα $\dot{z} = -z^3$:

2. Τι σημαίνει ότι το $z = 0$ είναι σημείο ισορροπίας; **[5]**

   Ότι αν $z(0) = 0$ τότε $z(t) = 0\ \forall t$.

3. Εξηγήστε το λόγο που η αρχική συνθήκη $z(0) = 0$ παράγει μοναδική τροχιά για $t \geq 0$.**[5]** Επειδή η λύση του δυναμικού συστήματος που είναι η

$$z(t) = \frac{z_0}{\sqrt{1 + 2z_0^2 t}} \quad ,$$

   δεν μπορεί να λάβει την τιμή $z = 0$ σε πεπερασμένο χρόνο.

4. Αναφέρατε πότε μία συνάρτηση είναι συνάρτηση Lyapunov ενός σημείου ισορροπίας. **[5]**

5. Κατασκευάστε μία συνάρτηση Lyapunov μέσω της οποίας να αποδεικνύεται ότι το σημείο ισορροπίας $z = 0$ είναι ευσταθές και το πεδίο έλξεώς του είναι όλη η πραγματική ευθεία. **[5]** $V = z^2$, ικανοποιεί τις συνθήκες συνάρτησης Lyapunov σε όλη τη πραγματική ευθεία διότι είναι $V(0) = 0$, $V(z) > 0$ και $\dot{V} = -2z^4 < 0\ \forall |z| > 0$.

- Για το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = yz$, $\dot{y} = -xz$, $\dot{z} = -z^3$:

6. Γράψτε τη διαφορική εξίσωση που διέπει την εξέλιξη του όγκου ενός χωρίου αρχικών συνθηκών που εξελίσσονται με το δυναμικό σύστημα. **[5]**

7. Γράψτε το σύστημα σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες (r, θ, z) όπου $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ και προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας του. **[5]** $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = -z$, $\dot{z} = -z^3$. Στην περίπτωση αυτή κάθε σημείο του επιπέδου $z = 0$ είναι σημείο ισορροπίας. Έχουμε δηλαδή ένα ολόκληρο επίπεδο του οποίου κάθε σημείο είναι σημείο ισορροπίας.

8. Προσδιορίστε τις τροχιές του δυναμικού συστήματος. **[5]** Είναι ελικοειδεις τροχιές επί της επιφάνειας του κυλίνδρου με συντεταγμένες: $r(t) = r(0)$,

$$z(t) = \frac{z_0}{\sqrt{1 + 2z_0^2 t}} \quad ,$$

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \theta(0) - \int_0^t z(t')dt' \\ &= \theta(0) - \int_0^t \frac{z_0}{\sqrt{1+2z_0^2 t'}}\, dt' \\ &= \theta_0 - \frac{\sqrt{1+2z_0^2 t}-1}{z_0}\end{aligned}$$

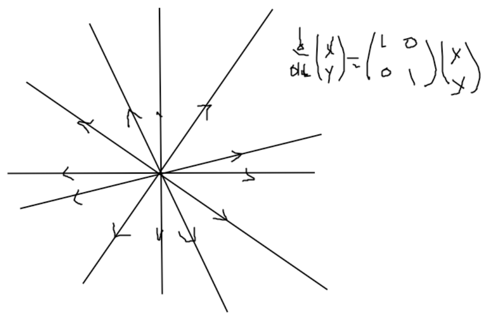
9. Αν άλλαζε η εξέλιξη της τρίτης μεταβλητής από $\dot{z} = -z^3$ σε $\dot{z} = -z$ θα άλλαζε ουσιαστικά η ασυμπτωτική δυναμική του συστήματος; **[5]**

   Ασυμπτωτικά: $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \theta(t) = -\infty$ ενώ η τροχιά κείται επί της κυλινδρικής επιφανείας $r = r(0)$ και τείνει στην περιοδική τροχιά $r = r(0)$, $z = 0$. Το ενδιαφέρον σε αυτό το δυναμικό σύστημα είναι ότι ενώ όλες οι τροχιές τείνουν στο επίπεδο $z = 0$ δεν συγκρατούνται από κανένα σημείο ισορροπίας, απλώς η γωνιακή ταχύτητα της κυκλικής κίνησης τείνει στο μηδέν, και η περίοδος αυξάνει με την τετραγωνική ρίζα του χρόνου.

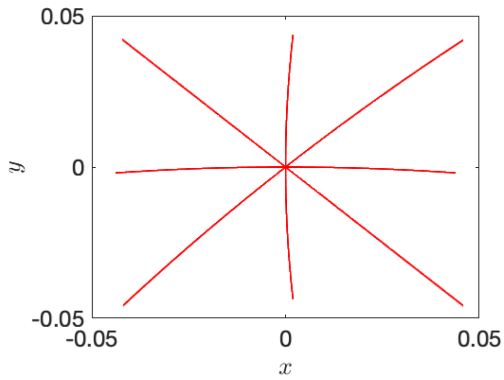
   Αν όμως $\dot{z} = -z$ τότε $\theta(t) = \theta(0) + z_0(1 - e^{-t})$ και $\lim_{t\to\infty} \theta(t) = \theta(0) + z_0$, δηλαδή η τροχιά κείται πάλι επί της κυλινδρικής επιφανείας $r = r(0)$ αλλά τείνει στο σημείο $(r(0), \theta(0) + z(0), 0)$, συνεπώς η δυναμική εξέλιξη είναι διαφορετική, από οιονεί κυκλική, αλλά ποτέ περιοδική, στην περίπτωση $\dot{z} = -z^3$, καταλήγει σε ελκτικό σημείο όταν $\dot{z} = -z$, που προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες.

- Για το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = x + y^2$, $\dot{y} = y - x^2$:

10. Σχεδιάστε τις ευσταθείς-ασταθείς πολλαπλότητες του σημείου ισορροπίας $(0, 0)$ στην γραμμική προσέγγιση. **[5]** Γραμμικοποίηση περί το $(0, 0)$ οδηγεί στο γραμμικό δυναμικό σύστημα $\dot{x} = x$, $\dot{y} = y$, το οποίο έχει αναλλοίωτες διευθύνσεις (ιδιοκαταστάσεις) όλες τις καταστάσεις που είναι ασταθείς με ιδιοτιμή 1. Το σημείο είναι πηγή και όλες οι διευθύνσεις είναι ασταθείς πολλαπλότητες. Στη γραμμική προσέγγιση η ροή ειναι:



11. Σχεδιάστε τώρα τις πολλαπλότητες αυτές, πλησίον του σημείου ισορροπίας, λαμβάνοντας υπόψη σας τη μη γραμμικότητα και δείχνοντας με σαφήνεια την καμπυλότητα που προκύπτει λόγω της μη γραμμικότητας. **[15]**



12. Σχεδιάστε τις ευσταθείς-ασταθείς πολλαπλότητες του 2ου σημείου ισορροπίας στη γραμμική προσέγγιση. **[10]**

    Περί το $(-1, 1)$ η γραμμικοποίηση οδηγεί στο δυναμικό σύστημα με πίνακα τον συμμετρικό

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

    με κάθετες και πραγματικές ιδιοκαταστάσεις (άρα υπάρχουν αναλλοιωτες ευθείες) που είναι η $(-1, 1)$, ευσταθής πολλαπλότητα με ιδιοτιμή -1, και η $(1, 1)$ που είναι η ασταθής πολλαπλότητα με ιδιοτιμή 3.

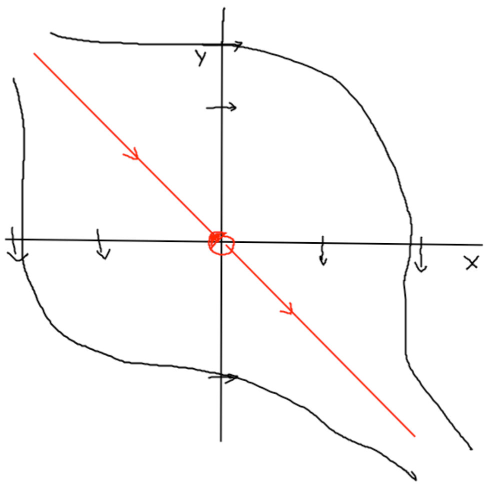
13. Λαμβάνοντας ως μεταβλητές τις $\xi = (x + y)/2$ και $\eta = (x - y)/2$ ή άλλως, δείξτε ότι η $y = -x$ είναι αναλλοίωτη διεύθυνση και ότι η ροή έχει κατοπτρική συμμετρία ως προς αυτήν την ευθεία. **[10]** Προσθέτοντας και αφαιρώντας έχουμε αμέσως ότι

$$\dot{\xi} = \xi - 2\xi\eta \quad (1)$$
$$\dot{\eta} = \eta + \xi^2 + \eta^2 \quad (2)$$

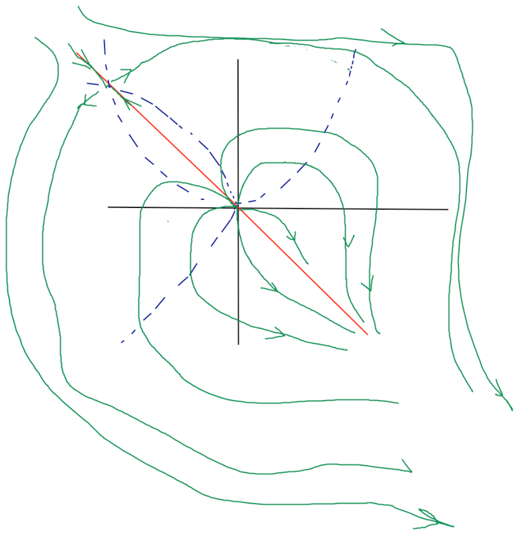
    Παρατηρούμε ότι αν $\xi(0) = 0$ θα είναι $\xi(t) = 0$ για όλους τους χρόνους. Συνεπώς η $\xi = 0$ είναι αναλλοίωτη διεύθυνση, δηλαδή η $y = -x$ είναι αναλλοίωτη καμπύλη, σημεία που αρχίζουν σε αυτήν παραμένουν σε αυτήν. Το δυναμικό σύστημα είναι αναλλοίωτο στον μετασχηματισμό $\xi \to -\xi$, $\eta \to \eta$. Που σημαίνει ότι αν η $(\xi(t), \eta(t))$ είναι τροχιά του συστήματος τότε και η $(-\xi(t), \eta(t))$ θα είναι τροχιά, που είναι η κατοπτρική τροχιά ως προς το $\xi = 0$, δηλαδή οι τροχιές έχουν κατοπτρική συμμετρία ως προς την ευθεία $y = -x$. (σχολιστικοτερα: οι ευθείες $\xi =$σταθερό είναι ευθείες παράλληλες στην $\xi = 0$, δηλαδή στην $y = -x$, και οι $\eta =$σταθερό κάθετες στις $\xi =$σταθερό, έτσι φαίνεται οτι ο μετασχηματισμός $\xi \to -\xi$, $\eta \to \eta$ είναι κατοπτρισμός ως προς τον $\xi = 0$.)

14. Προσδιορίστε ακριβώς την καμπύλη της ευσταθούς πολλαπλότητας του άλλου σημείου ισορροπίας καθώς και την εξίσωση της ετεροκλινικής τροχιάς. **[5]**

    Λόγω συμμετρίας είναι η ευθεία $y = -x$ που ταυτίζεται με την ασταθή πολλαπλότητα του $(-1, 1)$ και αποτεεί μία εκ των ασταθών πολλαπλοτήτων του $(0, 0)$.



15. Σχεδιάστε τη ροή που προκαλείται από το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = y^2, \dot{y} = -x^2$ στο επίπεδο (x, y). **[5]**
Extra bonus: Σχεδιάστε τώρα τη ροή που προκαλείται από το αρχικό δυναμικό σύστημα στο επίπεδο (x, y). **[15]



- Στην υδροδυναμική εικόνα, ιοντο-ακουστικά κύματα σε πλάσμα περιγράφονται από ένα σύστημα εξισώσεων για την πυκνότητα n και την ταχύτητα v των ιόντων, και για το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ. Σε μία διάσταση, και σε κανονικοποιημένη μορφή, το σύστημα αυτό γράφεται ως:

$$\begin{aligned} n_t + (nv)_x &= 0, \\ v_t + v v_x &= -\Phi_x, \\ \Phi_{xx} &= \exp(\Phi) - n. \end{aligned}$$

16. Να προσδιοριστεί μια κατάσταση ισορροπίας (ομογενής στο χώρο και στο χρόνο) του συστήματος. **[5]** Είναι η $n_e = n_0$, $\Phi_e = \log(n_0)$, $v_e = 0$.

17. Να γραμμικοποιηθεί το σύστημα γύρω από την κατάσταση ισορροπίας. **[5]** Διαταραχές (n', v', Φ') όπου $n = n_0 + n'$, $v = v'$, $\Phi = \Phi_0 + \Phi'$ ικανοποιούν τις γραμμικές εξισώσεις:

$$
\begin{aligned}
&n'_t + n_0 v'_x = 0, \\
&v'_t = -\Phi'_x, \\
&\Phi'_{xx} = n_0 \Phi' - n'.
\end{aligned}
$$

18. Να προσδιορισθεί η σχέση διασποράς. **[5]** Λόγω ομογένειας στον χωροχρονο λαμβάνω διαταραχές (είναι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης του συστήματος) της μορφής $n' = \hat{n}e^{i(kx-\omega t)}$, $v' = \hat{v}e^{i(kx-\omega t)}$, $\Phi' = \hat{\Phi}e^{i(kx-\omega t)}$ που πρέπει να ικανοποιούν το ομογενές σύστημα:

$$
\begin{pmatrix} -\omega & kn_0 & 0 \\ 0 & -\omega & k \\ -1 & 0 & n_0 + k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{v} \\ \hat{\Phi} \end{pmatrix} = 0 \, .
$$

Για να υπάρχει λύση η ορίζουσα του γραμμικού συστήματος πρεπει να μηδενίζεται που συνεπάγεται ότι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης ικανοποιούν την εξίσωση διασποράς:

$$
\omega = \pm \sqrt{\frac{k^2 n_0}{n_0 + k^2}} \, ,
$$

η οποία για $k \ll 1$ λαμβάνει την μορφή:

$$
\omega = \pm k \, .
$$

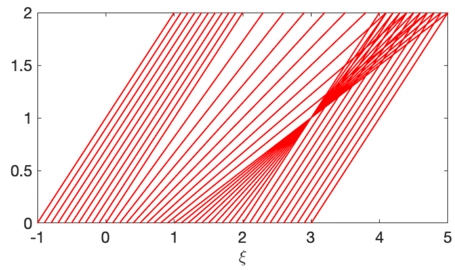
19. Ποια είναι η μορφή της σχέσης διασποράς στο όριο των μακρών κυμάτων ($k \ll 1$); Σε αυτή την περίπτωση, ποια είναι η ταχύτητα φάσης και η ταχύτητα ομάδας; **[5]**

- Έστω η εξίσωση τύπου Hopf για το πεδίο $u(x,t)$:

$$
u_t + (1+u)u_x = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,
$$

εφοδιασμένη με την αρχική συνθήκη:

$$
u(x,0) = f(x) = \begin{cases} u_0 x, & x \in [0, \ 1] \\ u_0(2-x), & x \in [1, \ 2] \\ 0, & x \in (-\infty, \ 0) \cup (2, +\infty) \, . \end{cases}
$$



Σχήμα 1: Οι χαρακτηριστικές όταν $u_0 = 1$.

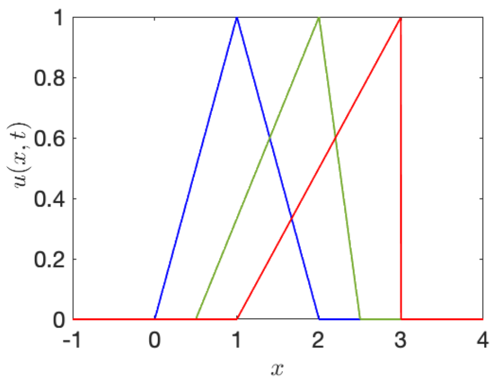
20. Προσδιορίστε και σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές καμπύλες επί των οποίων το πεδίο λαμβάνει σταθερές τιμές. **[5]** Είναι

$$x = \xi + (1 + f(\xi))t\ .$$

21. Προσδιορίστε το χρόνο θραύσης t_b. **[5]** $t_b = 1/u_0,\ u_0 > 0$

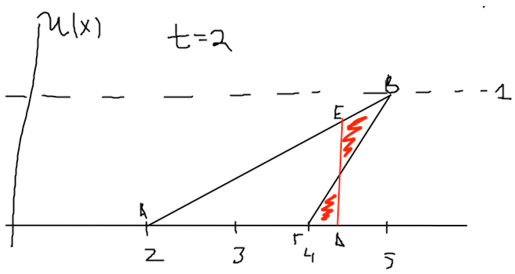
22. Να βρεθεί αναλυτικά το πεδίο για $t < t_b$, και να σχεδιαστεί για διάφορες χρονικές στιγμές στο ίδιο διάστημα. **[10]**

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0 \frac{x-t}{1+u_0 t}, & t \leq x \leq 1 + t(1+u_0) \\ u_0 \frac{2-x+t}{1-u_0 t}, & 1 + t(1+u_0) \leq x \leq 2 + t \\ 0, & x \in (-\infty,\ t) \cup (2+t, +\infty)\ . \end{cases}$$



Σχήμα 2: Το πεδίο στον χρόνο $t = 0$ (μπλε), στον χρόνο $t = 1/2$ (πράσινο) και τον χρόνο $t = 1$ που γίνεται η "θραύση" (κόκκινο) όταν $u_0 = 1$.

23. Ποια είναι η μορφή της ασθενούς λύσης για $t \geq t_b$; **[10]**



Σχήμα 3: Δείχνουμε την ασθενή λύση στον χρόνο $t = 2$ και για $u_0 = 1$. Η πλειότιμες μη μηδενικέςς τιμές διαγράφουν το τρίγωνο ΑΒΓ. Επειδή στη δυναμική διατηρείται η ποσότητα $\int_{-\infty}^{\infty} u dx$ η ασθενής λύση διατηρεί το ίδιο ολοκλήρωμα και είναι το ορθογωνιο τρίγωνο ΑΕΔ που προκύπτει ωστε τα τριγωνα που είναι σκιασμένα να εχουν ισα εμβαδον. Με αυτόν τρόπο προκύπτει η ασθενής λύση και σε άλλους χρόνους. Η αναλυτική περιγραφή είναι εφικτή αλλά είναι σχετικά επίπλοκη.