

Ασκήσεις Μη Γραμμικής Δυναμικής 2023

6 Ιουνίου 2023

1 Για την Παρασκευή 3/3

- 2 1. Η δυναμική της σταγόνας στην οροφή μέσω της εξίσωσης της ενέργειας οδηγεί σε απροσδιόριστη
3 εξέλιξη. Ενώ αν περιγραφεί με τις εξισώσεις του Νεύτωνα η απροσδιοριστία στην εξέλιξη αίρεται.
4 Γιατί υπάρχει αυτή η διαφορά;
- 5 2. Σωματίδιο κινείται εντός του διαστήματος $[0, 1]$ ελεύθερα και ανακλάται ελαστικά στα άκρα του
6 διαστήματος. Κατασκευάστε διάγραμμα της θέσης του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου και
7 εξετάστε αν το πρόβλημα αυτό είναι γραμμικό.
- 8 3. (γραμμικό ή μη γραμμικό;) Η γραμμικότητα ή μη γραμμικότητα ενός δυναμικού συστήματος
9 μπορεί να εξαρτάται από την ποσότητα που επιλέχθηκε για την περιγραφή του φαινομένου. Ένα
10 χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η κίνηση σωματιδίου μάζας m και στροφορμής L στο κεντρικό
11 δυναμικό $V(r) = -k/r$, όπου $r \geq 0$ είναι η απόσταση του σωματιδίου από το κέντρο της δύνα-
12 μης. Γράψτε την διαφορική εξίσωση που διέπει την ακτίνα $r(\theta)$ του σωματιδίου στο επίπεδο της
13 κίνησης. Η εξίσωση αυτή είναι μη γραμμική. Μπορείτε αλλάζοντας μεταβλητή να μετατρέψετε
14 το πρόβλημα σε γραμμικό ως προς τη νέα μεταβλητή;

15 Για την Παρασκευή 24/3

- 16 4. Η εξίσωση Gompertz για την εξέλιξη του πληθυσμού των καρκινικών κυττάρων με $x \geq 0$ είναι:

$$\dot{x} = \begin{cases} -x \log(x) & , \quad x > 0, \\ 0 & , \quad x = 0. \end{cases} \quad (1)$$

17 (α) Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας της.

18 (β) Προσδιορίστε την αναλυτική λύση όταν $x(0) = x_0$, με $x_0 > 0$ και προσδιορίστε την ασυμ-
19 πτωτική τιμή του x .

20 (γ) Υπολογίστε αριθμητικά με τη μέθοδο Euler την εξέλιξη των πληθυσμών που συνεπάγε-
21 ται η Gompertz για τις αρχικές τιμές $x(0) = x_0$, τις αρχικές τιμές $x(0) = 0.01$, $x(0) = 0.5$, $x(0) = 2$.
22 Επιλέξτε κατάλληλο χρονικό βήμα ώστε να είναι σχετικά ακριβής η εξέλιξη που θα πετύχετε
23 αριθμητικά. Σχεδιάστε την εξέλιξη του πληθυσμού με τον χρόνο. Σχεδιάστε τις αναλυτικές λύ-
24 σεις στο ίδιο διάγραμμα για να διαπιστώσετε οπτικά την ακρίβεια της αριθμητικής λύσης σας.

25 (δ) Είναι η λύση μοναδική για $x(0) = 0$; Εάν ναι εξηγήστε τον λόγο.

5. (Συνέπειες της συνθήκης Lipschitz) Θεωρήστε τη δυναμική $\dot{x} = v(x)$, με $x = 0$ το μόνο σημείο ισορροπίας όπου $v(0) = 0$. Το πεδίο ταχυτήτων $v(x)$ είναι παντού συνεχής συνάρτηση. Η $v(x)$ θα λέγεται Lipschitz στο σημείο $x = 0$ αν υπάρχει $K \geq 0$ ώστε υπάρχει περιοχή του 0 ώστε για κάθε x στην περιοχή αυτή να είναι $|v(x)| < K|x|$.

(α) Τι εκφράζει γεωμετρικά για τη συνάρτηση $v(x)$ η παραπάνω συνθήκη Lipschitz;

(β) Δείξτε ότι αν $v(x) < 0$ για $x > 0$ και η $v(x)$ είναι Lipschitz τότε απαιτείται άπειρος χρόνος για να φτάσουμε στο $x = 0$ από το σημείο $x(0) = x_0 \neq 0$. Το $x = 0$ είναι τότε ευσταθές σημείο και όλες οι αρχικές καταστάσεις τείνουν να καταλήξουν στο σημείο αυτό, αλλά ποτέ δεν το φτάνουν. Εξ' αυτού εξαγάγετε το συμπέρασμα ότι αν η $v(x)$ είναι Lipschitz στο σημείο ισορροπίας τότε υπάρχει μοναδική λύση. Δηλαδή η συνθήκη Lipschitz είναι ικανή συνθήκη για να είναι οι λύσεις μοναδικές. Ξεχάσαμε όμως την περίπτωση που $v(x) > 0$ για $x > 0$, όταν είναι το $x = 0$ ασταθές;

Ορθό ή λάθος; (αν ορθό αποδείξτε το αν λάθος δώστε αντιπαράδειγμα)

(γ) Αν η $v(x)$ είναι συνεχής στο $x = 0$ τότε είναι και Lipschitz στο $x = 0$;

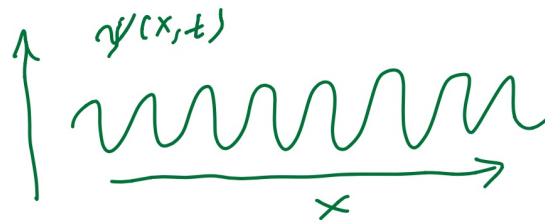
(δ) Αν η $v(x)$ είναι Lipschitz στο $x = 0$ τότε είναι και συνεχής στο $x = 0$.

(ε) Αν η $v(x)$ είναι διαφορίσιμη στο $x = 0$ τότε είναι και Lipschitz στο $x = 0$.

(στ) Αν η $v(x)$ είναι Lipschitz στο $x = 0$ τότε είναι και διαφορίσιμη στο $x = 0$.

(ζ) Η $v(x) = \sqrt{|x|}$ είναι Lipschitz στο $x = 0$;

(η) Η $v(x)$ που δίνεται από την (1) της Gompertz είναι Lipschitz στο $x = 0$; Τι συμπεραίνετε για την αναγκαιότητα της συνθήκης Lipschitz για την ύπαρξη μοναδικών λύσεων;



Σχήμα 1

Σημειώσεις από το μάθημα της Παρασκευής

Θεωρήστε μονοδιάστατο πεδίο $\psi(x, t)$ που εμφανίζει κορυφώσεις, όπως στο Σχήμα 1, οι οποίες έχουν δεδομένη κατεύθυνση κίνησης, έστω τη θετική. Θεωρούμε ότι ο κυματισμός του πεδίου είναι πολύ πυκνός ώστε να μπορούμε να ορίσουμε ως συνεχείς μεταβλητές τον αριθμό των κορυφών του πεδίου ανά cm , $k(x, t)$, και τον αριθμό των κορυφών ανά second, $\omega(x, t)$, που περνούν προς τη θετική κατεύθυνση από το σημείο x . Θεωρούμε επίσης ότι οι κορυφές παραμένουν κορυφές, ούτε διασπώνται, ούτε δημιουργούνται, ούτε εξαφανίζονται, έτσι ώστε ο αριθμός των κορυφών του πεδίου να διατηρείται.

α) Γράψτε την εξίσωση συνέχειας που συνεπάγεται η διατήρηση του αριθμού των κορυφών.

β) Το k είναι ο τοπικός κυματαριθμός, και το ω η τοπική συχνότητα του κυματισμού. Αν γνωρίζουμε ότι για το πεδίο αυτό υπάρχει σχέση $\omega(k)$ γράψτε την εξίσωση που διέπει το k .

γ) Σύμφωνα με το γ) που θα βρísκεται στον χρόνο t ένας δεδομένος κυματαριθμός k_0 ;

57

Απάντηση:

Στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} k dx \quad (2)$$

κορυφές, δεδομένου ότι $k(x, t)$ είναι η πυκνότητα των κορυφών. Ο ρυθμός μεταβολής του αριθμού των κορυφών σε αυτό το διάστημα ισούται με τη διαφορά του ρυθμού κορυφών που εισέρχονται και εξέρχονται από αυτό το διάστημα, που είναι

$$\omega(\alpha, t) - \omega(\beta, t) = - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial \omega}{\partial x} dx . \quad (3)$$

Άρα από τις υποθέσεις η διατήρηση του αριθμού των κορυφών απαιτεί την εξής ισότητα:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha}^{\beta} k dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial k}{\partial t} dx = - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial \omega}{\partial x} dx . \quad (4)$$

Εξ' αυτού συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dx = 0 , \quad (5)$$

58

για κάθε $\alpha < \beta$. Συνεπώς πρέπει η ολοκληρωτέα ποσότητα να μηδενίζεται (χρειάζεται μόνο συνέχεια

59

εδώ των παραγώγων) και έτσι αποδεικνύεται ότι το k και ω ικανοποιούν τη γνωστή σχέση συνέχειας:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 . \quad (6)$$

60

Αν δε η $\omega(k)$ είναι συνάρτηση του k τότε το k εξελίσσεται χωροχρονικά σύμφωνα με την

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \omega'(k) \frac{\partial k}{\partial x} = 0 , \quad (7)$$

όπου $\omega'(k) = d\omega/dk$. Η εξίσωση αυτή εκφράζει ότι επί των σημείων του χωρόχρονου (x, t) που ικανοποιούν τη σχέση

$$x = \omega'(k)t + x_0 , \quad (8)$$

61

ο κυματάρηθος έχει τη σταθερή τιμή k και το σημείο x_0 είναι το σημείο στο χώρο που στον χρόνο

62

$t = 0$ η πυκνότητα κορυφών (ο κυματάρηθος) είναι k . Συνεπώς σταθερές τιμές του k διαδίδονται με

63

την ταχύτητα ομάδας $\omega'(k)$.

Από τη (6) προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{(x_0, t_0)}^{(x, t)} k dx - \omega dt \quad (9)$$

είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που ενώνει το σημείο του χωρόχρονου (x_0, t_0) με το (x, t) και ορίζει

μία συνάρτηση $\varphi(x, t)$ η οποία έχει ως παραγώγους τον κυματάριθμο και τη συχνότητα:

$$k = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (10)$$

Το $\varphi(x, t)$ είναι η τοπική φάση των κυμάτων. Πχ. αν $\varphi(x, t) = kx - \omega t$ έχουμε την κλασσική φάση ενός μονοχρωματικού κύματος. Επειδή τώρα

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt \quad (11)$$

η σταθερή φάση $d\varphi = 0$ διαδίδεται με ταχύτητα

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\varphi} = -\frac{\partial \varphi / \partial t}{\partial \varphi / \partial x} = \frac{\omega}{k}, \quad (12)$$

64 που είναι η γνώριμη φασική ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η φάση ενός κύματος (πχ. μία κορυφή).

65 Για την Παρασκευή 31/3

66 6. Θέλουμε να προσδιορίσουμε πως μεταβάλλεται η ρίζα $x = 1$ της $x^2 - 1 - 2\epsilon x = 0$ για $\epsilon \neq 0$.
67 Αφενός, μπορούμε να αναπτύξουμε σε σειρά Taylor την ακριβή λύση $x = \epsilon + \sqrt{1 + \epsilon^2}$, ενώ αφε-
68 τέρου μπορούμε να έχουμε διαφορετικές προσεγγίσεις μέσω των αναδρομικών σχέσεων $x_{n+1} =$
69 $\sqrt{1 + 2\epsilon x_n}$, $x_1 = 1$. Συγκρίνατε (με χρήση MATLAB ή αλλιώς) το ρυθμό σύγκλισης των δύο μεθό-
70 δων για $\epsilon = 0.5$ και $\epsilon = 2$.

71 7. Εξετάστε με τη μέθοδο Picard την ύπαρξη έστω και ασθενών λύσεων των δυναμικών συστημά-
72 των και αν υπάρχουν να τις προσδιορίσετε:

73 (α)

$$\dot{x} = \begin{cases} -1, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0, \end{cases}$$

74 με αρχική τιμή $x(0) = 0$.

75 (β) $\dot{x} = -\Theta(x)$ με $x(0) = 0$, όπου

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

76 8. Γράψτε την εξίσωση για τη χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας αυτοκινήτων $\rho(x, t) \geq 0$ σε ένα
77 δρόμο μονής κυκλοφορίας στον οποίον ο αριθμός των αυτοκινήτων διατηρείται. Θεωρήστε ότι
78 τα αυτοκίνητα σχηματίζουν ένα συνεχές και ότι η ταχύτητά τους, $v(\rho)$, εξαρτάται μόνο από την
79 πυκνότητα. Αν η κατανομή των αυτοκινήτων ήταν αρχικά $\rho(x, 0) = \exp(-x^2)$ και η ταχύτητά τους
80 τους δινόταν από τον νόμο $v(\rho) = \exp(-\rho)$, σχεδιάστε (με κάποιο λογισμικό) κάνοντας χρήση της

81 λύσης που συζητήσαμε στην τάξη την κατανομή της πυκνότητας στους χρόνους $t = 0, 2, 4, 6$. Τι
82 παρατηρείτε;

- 83 9. (Συμπληρωματική της 5, λόγω των λύσεων που δώσατε) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις x^2 , x^3 , $\tan(x)$,
84 e^x είναι Lipschitz στο $x = 0$. Δηλαδή υπάρχει K ώστε να είναι $|f(x) - f(0)| < K|x|$ για κάθε x που
85 είναι σε κάποια περιοχή του 0. Αναφέρατε μία τιμή της σταθεράς K σε κάθε περίπτωση.
- 86 10. Διαβάστε το σημείωμα για την άσκηση 8. Και σχεδιάστε την $\rho(x, t)$, αν $\rho(x, 0) = \exp(-x^2)$ και η
87 ταχύτητα ακολουθεί τον νόμο $v(x) = \exp(-\rho)$, τους χρόνους $t = 0, 2, 4, 6$.

88 Διευκρινήσεις για την άσκηση 8

89 Εάν $\rho(x, t)$ είναι η πυκνότητα των αυτοκινήτων στον δρόμο, η συνάρτηση αυτή προφανώς δεν
90 μπορεί να είναι ούτε πολύτιμη ούτε αρνητική. Η εξίσωση συνέχειας (με υποθέσεις διαφορισιμό-
91 τητας) απαιτεί η πυκνότητα και η ροή (αριθμός αυτοκινήτων που διέρχεται κάποιο x ανά μονάδα
92 χρόνου) να ικανοποιούν την εξίσωση

$$\rho_t + f_x = 0, \quad (13)$$

93 όπου η ροή δίνεται από την έκφραση

$$f = \rho v(\rho). \quad (14)$$

94 Εξ'αυτού συμπεραίνουμε ότι η πυκνότητα ικανοποιεί την εξίσωση

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0, \quad c(\rho) = f_\rho, \quad (15)$$

95 και στην περίπτωση που αναφέρετε η άσκηση με ταχύτητα $v(\rho) = \exp(-\rho)$ η ταχύτητα $c(\rho)$ είναι:

$$c(\rho) = \frac{d(\rho \exp(-\rho))}{d\rho} = (1 - \rho) \exp(-\rho). \quad (16)$$

97 Επί των ευθειών

$$\frac{dx}{dt} = c(\rho) \quad (17)$$

98 η ρ δεν αλλάζει τιμή. Συνεπώς αν αρχικά στο σημείο ξ η πυκνότητα έχει την τιμή $\rho_0(\xi)$, στον
99 χρόνο t το σημείο

$$x = \xi + c(\rho_0(\xi))t \quad (18)$$

100 θα έχει και αυτό τιμή $\rho_0(\xi)$. Συνεπώς θα είναι $\rho(x, t) = \rho_0(\xi(x, t))$, όπου τα ξ συνδέονται με τα
101 (x, t) μέσω των σχέσεων $x = \xi + c(\rho_0(\xi))t$. Άρα για να σχεδιάσουμε την πυκνότητα στον χρόνο t
102 αρκεί να απεικονήσουμε τα σημεία $\xi + c(\rho_0(\xi))t \rightarrow \rho_0(\xi)$.

103
104

Στόχος: Να πετύχουμε να υπολογίσουμε την επόμενη διαδοχική τιμή του x μετά από χρονικό βήμα δ

$$x(\delta) = x_0 + \delta \dot{x}|_0 + \frac{\delta^2}{2} \ddot{x}|_0 + \frac{\delta^3}{6} \frac{d^3 x}{dt^3} \Big|_0 + \dots \quad (19)$$

105
106
107

χρησιμοποιώντας όχι τις παραγώγους της f αλλά την τιμή της f σε σημεία παραπλήσια του x_0 . Εξάλλου οι παραπλήσιες στο x_0 τιμές της f σχετίζονται με τις παραγώγους της f στο x_0 .

Η παραπάνω έκφραση μπορεί να απλοποιηθεί αν κάνουμε τις αντικαταστάσεις:

$$\dot{x} = f \Rightarrow \dot{x}|_0 = f(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} f_0 \quad (20)$$

108

και

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = f' f \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= (f'' f + f' f') f \\ &\dots \end{aligned}$$

109

οπότε

$$x(\delta) = x_0 + f_0 \delta + \frac{f_0 f'_0}{2} \delta^2 + \frac{f_0^2 f''_0 + f_0 (f'_0)^2}{6} \delta^3 + \dots \quad (21)$$

110
111
112
113
114
115

με χρήση του συμβολισμού $f_0^{(n)} = f^{(n)}(x)|_{x_0}$.

Ας δούμε τώρα πως μπορούμε να πετύχουμε τους ανωτέρω όρους για να «πιάσουμε» την ακρίβεια τάξης δ^3 . Προφανώς η διαδικασία που θα περιγράψουμε μπορεί να επεκταθεί καταλλήλως για να καλύψει σε ακρίβεια οποιαδήποτε τάξη επιθυμούμε.

Έστω η ακολουθία κλίσεων των καμπυλών $x(t)$ για διάφορες αρχικές συνθήκες $x(0)$ και σε διάφορα σημεία x :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0) = f_0 \\ k_2 &= f(x_0 + b_1 k_1 \delta) = f_0 + f'_0(b_1 k_1 \delta) + \frac{1}{2} f''_0 (b_1 k_1 \delta)^2 + \dots \\ &= \left[f_0 + f'_0 f_0 (b_1 \delta) + \frac{1}{2} f''_0 f_0^2 (b_1 \delta)^2 + \dots \right] \\ k_3 &= f(x_0 + b_2 k_2 \delta) = f_0 + f'_0(b_2 k_2 \delta) + \frac{1}{2} f''_0 (b_2 k_2 \delta)^2 + \dots \\ &= f_0 + f'_0 k_2 (b_2 \delta) + \frac{1}{2} f''_0 k_2^2 (b_2 \delta)^2 + \dots \\ &= f_0 + f'_0 [\dots] (b_2 \delta) + \frac{1}{2} f''_0 [\dots]^2 (b_2 \delta)^2 + \dots \\ &= f_0 + f'_0 [f_0 + f'_0 f_0 (b_1 \delta) + \dots] (b_2 \delta) + \frac{1}{2} f''_0 [f_0 + \dots]^2 (b_2 \delta)^2 + \dots \end{aligned}$$

$$= f_0 + f'_0 f_0(b_2 \delta) + \left[f'_0 f_0(b_1 \delta)(b_2 \delta) + \frac{1}{2} f''_0 f_0^2(b_2 \delta)^2 \right] + \dots$$

... .

(22)

116 Στην ανωτέρω αναδρομική σχέση χρησιμοποιείται η προηγούμενη κλίση k_j για να μας οδηγήσει
 117 σε κάποιο σημείο παραπλήσιο του x_0 και πιο συγκεκριμένα στο $x_0 + k_j b_j \delta$ προκειμένου να «δια-
 118 βάσουμε» εκεί (στο σημείο που θα καταλήξουμε) την τοπική κλίση. Το b_j μετράει το ποσοστό του
 119 χρονικού βήματος που θα μετακινηθούμε: $b_j = 1$ σημαίνει ένα ολόκληρο βήμα δ στη μεταβολή
 120 του x με σημείο, πάντα, εκκίνησης το x_0 .

121 Τέλος αυτό που θέλουμε είναι ένα κατάλληλο μίγμα αυτών των κλίσεων προκειμένου να μετα-
 122 βούμε όσο κοντινότερα γίνεται στο πραγματικό σημείο $x(\delta)$ το οποίο στην ακρίβεια που εμείς
 123 επιθυμούμε αντιπροσωπεύεται από την έκφραση (21). Επομένως αναζητούμε κατάλληλα βάρη
 124 a_j τέτοια ώστε σε συνδυασμό με τα ποσοστά βήματος b_j να είναι

$$x(\delta) = x_0 + \delta(a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + \dots) .$$
(23)

125 Σταματώντας την ακρίβεια στο δ^3 και με τη χρήση 3 κλίσεων βρίσκουμε

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\ a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 1/2 \\ a_3 b_2 b_3 &= 1/6 \\ a_2 b_2^2 + a_3 b_3^2 &= 1/3 . \end{aligned}$$
(24)

126 Μια στοιχειώδης αρίθμηση οδηγεί σε $2N - 1$ άγνωστες παραμέτρους a_j, b_j εφόσον κανείς κρατή-
 127 σει N κλίσεις. Στην συγκεκριμένη ακρίβεια οδηγούμαστε σε 4 εξισώσεις προσδιορισμού των 5
 128 παραμέτρων a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 με τη χρήση $N = 3$ κλίσεων. Αν είχαμε χρησιμοποιήσει λιγότερες κλί-
 129 σεις, π.χ. $N = 2$ θα έπρεπε να ικανοποιήσουμε 4 εξισώσεις με 3 παραμέτρους, επομένως το πλή-
 130 θος $N = 2$ θα ήταν απαγορευτικό. Τώρα που οι εξισώσεις είναι λιγότερες από τις παραμέτρους
 131 έχουμε τη δυνατότητα να φτιάξουμε μια οικογένεια δυνατών λύσεων. Ας παραμετροποιήσουμε
 132 τις λύσεις μέσω του λόγου $b_2 = \ell b_3$. Τότε

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\ (a_2 \ell + a_3) b_3 &= 1/2 \\ a_3 \ell b_3^2 &= 1/6 \\ (a_2 \ell^2 + a_3) b_3^2 &= 1/3 . \end{aligned}$$
(25)

133 Από το λόγο των τελευταίων σχέσεων βρίσκουμε

$$a_2 \ell^2 + a_3 = 2a_3 \ell \Rightarrow a_2 = a_3 \frac{2\ell - 1}{\ell^2}$$
(26)

134

και εφαρμόζοντάς το στο λόγο της 3ης προς τη 2η σχέση βρίσκουμε:

$$b_3 \frac{9\ell^3}{9\ell \left(1 + \frac{2\ell-1}{\ell}\right)} = 1/3 \Rightarrow b_3 = \frac{1}{3} \frac{3\ell-1}{\ell^2}. \quad (27)$$

135

Πλέον όλες οι παράμετροι έχουν καθοριστεί:

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{3} \frac{3\ell-1}{\ell} \\ b_3 &= \frac{1}{3} \frac{3\ell-1}{\ell^2} \\ a_3 &= \frac{1}{6} \frac{9\ell^3}{(3\ell-1)^2} = \frac{3\ell^3}{2(3\ell-1)^2} \\ a_2 &= \frac{1}{6} \frac{9\ell^3}{(3\ell-1)^2} \frac{2\ell-1}{\ell^2} = \frac{3\ell(2\ell-1)}{2(3\ell-1)^2} \\ a_1 &= \frac{-3\ell^3 + 12\ell^2 - 9\ell + 2}{2(3\ell-1)^2} \end{aligned} \quad (28)$$

136

137

11. Η ερώτηση είναι ποια επιλογή του ℓ καθιστά «καλύτερη» την εκτίμηση του $x(\delta)$ και επομένως καθιστά την αριθμητική ολοκλήρωση με αυτό το σχήμα βέλτιστο. Η απάντηση είναι ότι κάθε τιμή του ℓ υπολογίζει σωστά το $x(\delta)$ με ακρίβεια δ^3 αλλά εκτιμά λάθος (μάλλον) τους όρους τάξης δ^4 . Το αν «πιάνει» σωστά ή προσεγγιστικά και τους όρους τάξης δ^4 έχει να κάνει με το ποια ακριβώς είναι η συνάρτηση και η τιμή του όρου τάξης δ^4 στο ανάπτυγμα του $x(\delta)$.

138

139

140

141

142

Υποθέστε ότι η συνάρτηση f είναι η

$$f(x) = x \quad (29)$$

143

δηλαδή το δυναμικό πρόβλημα που έχετε να λύσετε είναι το

$$\dot{x} = x \quad (30)$$

144

με λύση τη γνωστή:

$$x(\delta) = e^\delta x_0. \quad (31)$$

145

146

147

(α) Προσδιορίστε την παράμετρο ℓ έτσι ώστε η παραπάνω προσεγγιστική λύση (με τις 3 κλίσεις) που θα πάρετε να δώσει την σωστότερη (ή τη σωστή) προσέγγιση της εκθετικής λύσης σε τάξη δ^4 .

148

149

150

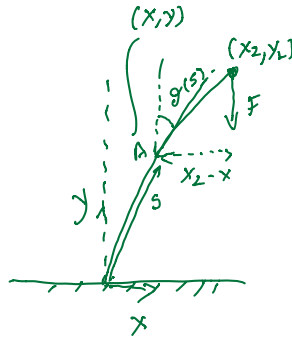
(β) Εκτελέστε την αντίστοιχη αριθμητική ολοκλήρωση με την βέλτιστη ℓ καθώς και με μια άλλη τιμή ℓ και δείξτε ότι το συνολικό λάθος στην εύρεση της $x(1)$ (για $x_0 = 1$) κατόπιν αριθμητικής ολοκλήρωσης ακολουθεί άλλη σχέση με το μέγεθος του δ (δοκιμάστε $d = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$).

151

152

153

12. Εφαρμόστε τον τύπο για την προώθηση κατά βήμα δ με Runge-Kutta-4 στη δυναμική $\dot{x} = Ax$ και δείξτε ότι οι τιμές της συνάρτησης $x_n \stackrel{\text{def}}{=} x(t_n)$ και $x_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} x(t_n + \delta)$ ικανοποιούν την αναδρομική σχέση $x_{n+1} = f(A, t)x_n$. Προσδιορίστε τη συνάρτηση $f(A, t)$. Τι παρατηρείτε;



Σχήμα 2: Η ράβδος του Euler

- 154 13. Κατασκευάστε μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης αρχικών πληθυσμών στο διάστημα $x(0) \in [0, 2]$
 155 την απεικόνιση Poincaré $P(x)$ καθώς και την απεικόνιση Poincaré δύο περιόδων $P(P(x))$ του δυνα-
 156 μικού συστήματος που περιγράφει την εξέλιξη του πληθυσμού υπο συνθήκες περιοδικής αλιείας:

$$\dot{x} = x(1 - x) - h(1 + \varepsilon \sin(t)) , \quad x(t) \geq 0 , \quad (32)$$

158 για τις τιμές $h = 1/8$ και $\varepsilon = 1$. Η απεικόνιση Poincaré ορίζεται ως η συνάρτηση: $P(x(0)) = x(2\pi)$.

- 159 14. Ο Euler υπολόγισε το κρίσιμο φορτίο που θα λυγίσει μια στερεά ράβδο. Έδειξε ότι εξίσωση που
 160 διέπει το χρονοανεξάρτητο σχήμα της ράβδου σε στατική ισορροπία είναι η

$$D\ddot{\theta} + F \sin \theta = 0 \quad , \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(L) = 0 . \quad (33)$$

161 Η τελεία συμβολίζει παραγωγή ως προς το μήκος τόξου (βλ. Σχ. 2) επί της ράβδου, π.χ. $\dot{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\theta}{ds}$
 162 $d\theta/ds$. Το s είναι το μήκος τόξου της ράβδου από το κατώτερο σημείο της, όπου $s = 0$, ενώ η ρά-
 163 βδος θεωρείται ότι έχει αναλλοίωτο σταθερό μήκος L , δηλαδή η ράβδος δεν συρρικνώνεται υπό
 164 το βάρος που έχει εναποτεθεί σε αυτήν, και συνεπώς η παραπάνω εξίσωση ορίζεται στο διάστημα
 165 $s \in [0, L]$. Η $D > 0$ είναι η ελαστική σταθερά της ράβδου. Η γωνία θ είναι η γωνία που σχηματίζε-
 166 ται από την εφαπτομένη της καμπύλης της ράβδου με την κατακόρυφο. Αυτή η εξίσωση διέπει
 167 το σχήμα ισορροπίας της ράβδου όταν ασκείται δύναμη F στο άνω άκρο της. Εμείς θα θεωρή-
 168 σουμε ότι $F > 0$, που αντιστοιχεί σε πιεστική δύναμη. Η συνοριακή συνθήκη στο κατώτερο άκρο,
 169 $\theta(0) = 0$, προκύπτει επειδή θεωρούμε ότι η ράβδος στο κάτω άκρο στηρίζεται με τέτοιο τρόπο
 170 ώστε να παραμένει κατακόρυφη, ενώ $\dot{\theta}(L) = 0$, επειδή το ανώτερο άκρο είναι μεν ελεύθερο να
 171 μετακινηθεί αλλά δεν μπορεί να καμπυλωθεί διότι δεν υπάρχει τάση από ελαστικό υλικό που
 172 μπορεί να καμπυλώσει το άκρο αυτό.

173 Η εξίσωση ισορροπίας του σχήματος της ράβδου (33) προκύπτει από την απαίτηση να είναι ελάχι-
 174 στο το συναρτησοειδές της συνολικής δυναμικής (ελαστικής και εξωτερικής δύναμης) ενέργειας

$$V[\theta] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^L \frac{1}{2} D \dot{\theta}^2 ds + F y_L = \int_0^L \left(\frac{1}{2} D \dot{\theta}^2 + F \cos \theta \right) ds , \quad (34)$$

176 δεδομένου ότι, αν θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στη ράβδο με την κατακόρυφο y διεύ-

177

θυνση (βλ. σχήμα 2), οι συντεταγμένες (x, y) της ράβδου προκύπτουν από τις εξισώσεις:

$$\dot{x} = \sin \theta \quad , \quad \dot{y} = \cos \theta \quad , \quad (35)$$

178

179

180

181

και $y_L = \int_0^L \cos \theta ds$. Θυμίζουμε ότι x είναι η οριζόντια διεύθυνση, με $(x, y) = (0, 0)$ το κάτω πακτωμένο άκρο της ράβδου. Ο πρώτος όρος στην (34) δίνει την ελαστική ενέργεια η οποία είναι ανάλογη του τετραγώνου της καμπυλότητας της ράβδου (ο όρος $\dot{\theta}$ είναι ίσος με την καμπυλότητα της ράβδου) και ο δεύτερος είναι το έργο της ασκούμενης δύναμης.

182

183

184

(α) Δείξτε από πρώτες αρχές, ορίζοντας προσεκτικά το είδος των μεταβολών, ότι στασιμοποίηση της (34) οδηγεί στην (33). Ποία η διαφορά με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για την κατασκευή των εξισώσεων Euler-Lagrange μέσω της αρχής του Χάμιλτον στη Μηχανική;

185

186

(β) Θεωρήστε τώρα ότι η ράβδος έχει λυγίσει ελάχιστα και το σχήμα ισορροπίας της ράβδου ικανοποιεί τη γραμμική εξίσωση:

$$D\ddot{\theta} + F\theta = 0 \quad , \quad (36)$$

187

με $\dot{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} d\theta/ds$ και συνοριακές συνθήκες:

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(L) = 0 \quad . \quad (37)$$

188

Η εξίσωση αυτή ισχύει για μικρές παραμορφώσεις από την κατακόρυφο.

189

190

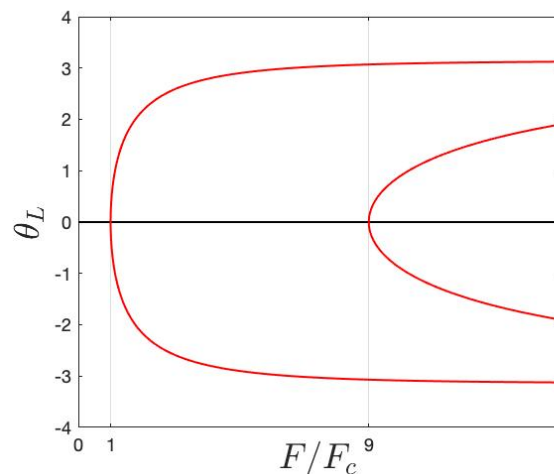
191

192

193

194

Προσδιορίστε για κάθε τιμή της F την $\theta(s)$. Αν χρησιμοποιήσουμε την $\theta_L \stackrel{\text{def}}{=} \theta(L)$ ως ενδεικτική συντεταγμένη που ορίζει την κατάσταση ισορροπίας της ράβδου, για ποιές τιμές του F αναμένετε διακλάδωση; Σε διάγραμμα (F, θ_L) σχεδιάστε το διάγραμμα διακλάδωσης της γραμμικής εξίσωσης (36). Ποία είναι η πρώτη κρίσιμη τιμή της δύναμης F_c που οδηγεί στο λυγισμό της ράβδου; Σχεδιάστε το σχήμα της ράβδου στις διάφορες διακλαδώσεις.



Σχήμα 3: Οι δύο πρώτοι κλάδοι της υπερκρίσιμης δικρανικής (pitchfork) διακλάδωσης της δοκού του Euler που οδηγεί σε σπάσιμο συμμετρίας.

195

(γ) Υπολογισμός της διακλάδωσης λυγισμού της ράβδου του Euler στη μη γραμμική θεώρηση.

196 Η εξίσωση του σχήματος της ράβδου (33) είναι ίδια με αυτήν του επίπεδου εκκρεμούς και οι λύσεις
197 διατηρούν την “ενέργεια”:

$$\frac{1}{2}D\dot{\theta}^2 - F \cos \theta = -F \cos \theta_L, \quad (38)$$

198 όπου $\theta_L = \theta(L)$. [Προσέξτε ότι το συναρτησοειδές της συνολικής δυναμικής ενέργειας (4) που
199 ελαχιστοποιούμε προκειμένου να βρούμε το σχήμα της ράβδου, που διέπεται τελικά από την
200 (3) δεν είναι η διατηρούμενη ποσότητα. Η $V(\theta)$ είναι το αντίστοιχο της δράσης με αλλαγμένο
201 το πρόσημο της κλασικής δυναμικής ενέργειας από αυτήν που υπεισέρχεται στη διατηρούμενη
202 ενέργεια.] Από τη διατήρηση αυτή, όπως υπολογίζουμε στο εκκρεμές την περίοδο συναρτήσει
203 του πλάτους της ταλάντωσης, υπολογίζουμε εδώ το σχήμα της ράβδου προσδιορίζοντας το μήκος
204 τόξου της ράβδου $s(\theta)$ και τις συντεταγμένες (x, y) της ράβδου, Από την (38) προκύπτει ότι

$$L = \sqrt{\frac{D}{2F}} \int_0^{\theta_L} \frac{d\theta}{\sqrt{-\cos \theta_L + \cos \theta}}. \quad (39)$$

205 Κάνοντας την κλασική αντικατάσταση $\sin(\theta/2) = \sin(\theta_L/2) \sin \phi$ έχουμε

$$L = \sqrt{\frac{D}{F}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_L/2) \sin^2 \phi}}, \quad (40)$$

206 και για μικρά θ_L δείξτε ότι είναι:

$$L = \sqrt{\frac{D}{F}} \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2(\theta_L/2) + \frac{9}{64} \sin^4(\theta_L/2) + \dots \right), \quad (41)$$

207 και μέσω αυτής αποδείξτε ότι για μικρά θ_L ότι:

$$F = F_c \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2(\theta_L/2) + \frac{11}{32} \sin^4(\theta_L/2) + \dots \right), \quad (42)$$

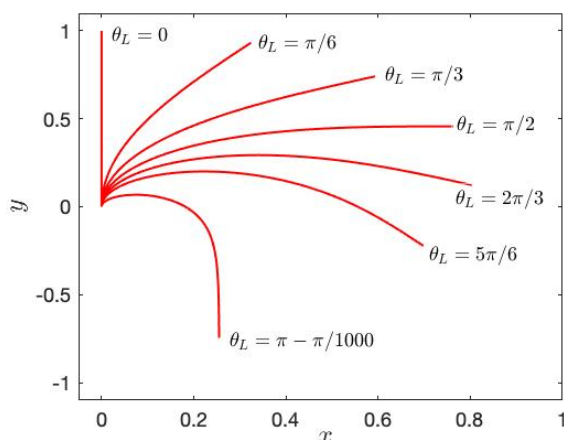
208 όπου F_c η κρίσιμη τιμή της δύναμης που υπολογίσατε από τη γραμμική προσέγγιση. Εξ'αυτού
209 αποδείξτε ότι η διακλάδωση στο κρίσιμο σημείο λυγισμού είναι υπερκρίσιμη δικραυική διακλά-
210 δωση (supercritical pitchfork bifurcation) και σχεδιάστε τους τρεις πρώτους κλάδους που εμφανί-
211 ζονται στα $F_c, 9F_c$ και $25F_c$.

212
213 (δ) Σχεδιάστε το σχήμα τις δοκού σε διαδοχικές τιμές ενέργειας μετά την πρώτη και δεύτερη
214 διακλάδωση. Με ενεργειακά επιχειρήματα προσδιορίστε την ευστάθεια των λύσεων (έστω για
215 την πρώτη διακλάδωση). σχεδιάζονται στο Σχ. (3).

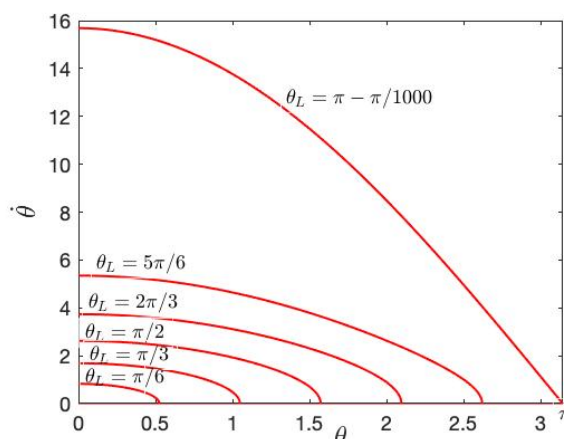
216 Το σχήμα της δοκού μετά το πρώτο σπάσιμο συμμετρίας έχει σχεδιασθεί στα Σχ. (4) και (5).

217 Σημείωση: Η ενέργεια (34) στην κατάσταση ισορροπίας είναι κάνοντας χρήση την (39)

$$\begin{aligned} V_{eq} &= 2F \int_0^{\theta_L} \cos \theta \frac{ds}{d\theta} d\theta - FL \cos \theta_L \\ &= -FL \cos \theta_L + 2\sqrt{DF} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - 2 \sin^2(\theta_L/2) \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_L/2) \sin^2 \phi}} d\phi \end{aligned}$$



Σχήμα 4: Διαδοχικές θέσεις ισορροπίας της δοκού όταν η δοκός συμπιέζεται με αυξανόμενη δύναμη F που αντιστοιχεί στο αντίστοιχο θ_L του πρώτου κλάδου της διακλάδωσης στο F_c (βλ. Σχ. (3)). Η δύναμη που απαιτείται για να επιτευχθεί $\theta_L = \pi$ απειρίζεται.



Σχήμα 5: Οι αντιστοιχούσες του Σχ. (4) τροχιές στο επίπεδο $\theta, \dot{\theta}$ (η $\dot{\theta} = \kappa$ είναι η καμπυλότητα της δοκού).

218 Για την Τρίτη 9/5

219 15. Ο ταλαντωτής

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \left(\dot{x} - \frac{1}{3} \dot{x}^3 \right), \quad x(0) = 0, \dot{x}(0) = a, \varepsilon > 0 \quad (43)$$

220 έχει έναν οριακό κύκλο στο επίπεδο (x, \dot{x}) . Ολοκληρώστε τον ταλαντωτή αυτόν για $\varepsilon = 0.02$ και
 221 τις αρχικές τιμές $a = 0.05, a = 2$ και εντοπίστε τον οριακό κύκλο. Προσδιορίστε με ενεργειακά επι-
 222 χειρήματα την αναλυτική μορφή του οριακού κύκλου στον οποίο καταλήγει τελικά ο ταλαντωτής
 223 στο όριο $\forall \varepsilon \rightarrow 0^+$.

224 16. Στο μάθημα και στην προηγούμενη άσκηση εξετάσαμε ταλαντωτές που έχουν μόνον ένα οριακό
 225 κύκλο. Κατασκευάστε έναν μη γραμμικό ταλαντωτή με δύο οριακούς κύκλους.

226 Σημειώσεις με διόρθωση στον υπολογισμό του σημερινού μαθήματος
 227 Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη συμπεριφορά του ταλαντωτή

$$\ddot{x} + x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = 0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (44)$$

228 έστω με αρχικές συνθήκες $x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$. Προς τούτο θεωρήσαμε μία εξελισσόμενη ταλάντωση
 229 $x = r \cos(t + \phi)$ με τις συναρτήσεις $r(t) > 0, \phi(t)$ αργά εξελισσόμενες. Αν δε θεωρήσουμε ότι $\dot{x} =$
 230 $-r \sin(t + \phi)$, τότε έχουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon \sin(t + \phi) f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi)), \\ \dot{\phi} &= \frac{\varepsilon}{r} \cos(t + \phi) f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi)), \end{aligned}$$

231 στο οποίο εξελίσσονται πράγματι αργά και το πλάτος της ταλάντωσης, $r(t)$, και η φάση, $\phi(t)$. Ανα-
 232 πτύσσουμε τις $\sin(t + \phi) f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi))$ και $\cos(t + \phi) f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi))$ σε σειρές
 233 Fourier ως προς t . Π.χ.

$$\sin(t + \phi) f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi)) = a_0(r, \phi) + a_1(r, \phi) \cos(t) + b_1(r, \phi) \sin(t) + a_2(r, \phi) \cos(2t) + b_2(r, \phi) \sin(2t) + \dots, \quad (45)$$

234 με

$$a_0(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \sin(t + \phi) f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi)), \quad (46)$$

235 (εδώ ήταν το λάθος που έκανα στον πίνακα: δεν διαίρεσα με το 2π), ενώ οι ανώτερης τάξης όροι είναι:

$$\frac{a_n(r, \phi)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \cos(nt) \sin(t + \phi) f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi)), \quad n \geq 1 \quad (47)$$

$$\frac{b_n(r, \phi)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \sin(nt) \sin(t + \phi) f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi)), \quad n \geq 1. \quad (48)$$

236 Σε πρώτη τάξη η αργή εξέλιξη της ταλάντωσης θα διέπεται από το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon a_0(r, \psi), \\ \dot{\phi} &= \frac{\varepsilon}{r} c_0(r, \psi), \end{aligned}$$

237 όπου $c_0(r, \psi)$ είναι η μέση τιμή της $\cos(t + \phi) f(r \cos(t + \phi), -r \sin(t + \phi))$. Αυτές οι εξισώσεις περιγρά-
 238 φουν σε πρώτη τάξη την εξέλιξη της μέσης τιμής του $\bar{r} = \int_0^{2\pi} r dt / (2\pi), \bar{\phi} = \int_0^{2\pi} \phi dt / (2\pi)$. Περιγράφουν
 239 την αδρομερή εξέλιξη του δυναμικού συστήματος έχοντας εξαλείψει τις γρήγορες ταλαντώσεις. (βλ.
 240 άσκηση 7.6.25 (σελ. 242) σε Strogatz, έκδοση 2018)

241 Για την Παρασκευή 19/5

242 17. Σχεδιάστε τη ροή στο επίπεδο $(\theta, \dot{\theta})$ του δυναμικού συστήματος $\varepsilon \ddot{\theta} = r \sin \theta \cos \theta - \sin \theta - \dot{\theta}$, όταν
 243 $\varepsilon \gg 1$ για μία τιμή $r < 1$ και μία τιμή $r > 1$.

244 18. Δείξτε ότι αν

$$\bar{r}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} r(s) ds \quad (49)$$

245

τότε η πράξη της μέσης τιμής και της χρονικής παραγώγου μετατίθενται δηλαδή είναι:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \overline{\frac{dr}{dt}} \quad (50)$$

246

19. Λύστε την Άσκηση 7.6.17 (σελ. 240) Strogatz, έκδοση 2018 (προσεγγιστική λύση της $\ddot{x} + (1 + \varepsilon\gamma + \varepsilon \cos(2t))x = 0$, $\varepsilon \ll 1$). Συγκρίνατε την προσεγγιστική λύση με αριθμητική ολοκλήρωση σε μία περίπτωση που επιλέξετε.

247

248

249

Για την Τρίτη 23/5

250

20. (Συνέχεια του σημερινού μαθήματος Matlab) Σχεδιάστε μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης τις ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες (x, \dot{x}) του ταλαντωτή

251

$$\ddot{x} + x = -0.1\dot{x} + x^2, \quad (51)$$

252

του σημείου ισορροπίας $(1, 0)$, και στη συνέχεια σχεδιάστε τις διαφορετικές τροχιές που προκύπτουν.

253

254

21. Θεωρήστε τον ταλαντωτή στη διαταραγμένη μορφή:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(-\dot{x} + x^2), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (52)$$

255

με αρχικές τιμές $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$. Προσδιορίστε διαταρακτικά με την μέθοδο των μέσων τιμών (averaging) τη λύση του προβλήματος και συγκρίνατε την προσεγγιστική λύση με την αριθμητική λύση όταν $\varepsilon = 0.1$, $x_0 = 1$. Μπορείτε να προσδιορίσετε πότε η προσεγγιστική λύση οδηγεί σε ορθή περιγραφή της εξέλιξης του ταλαντωτή;

256

257

258

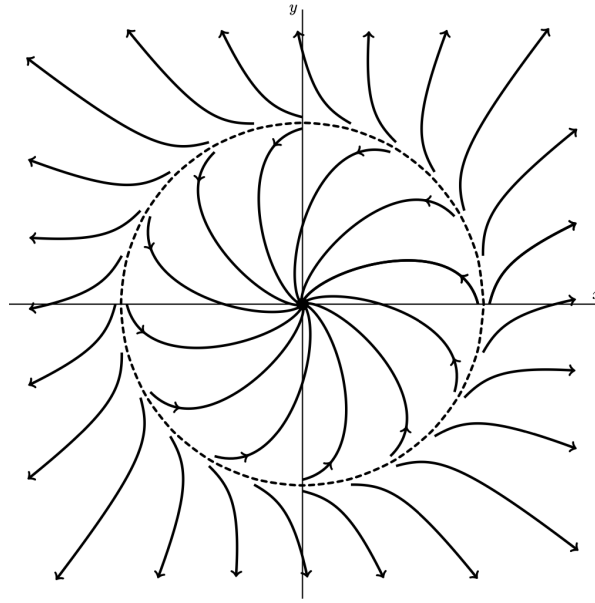
259

Για την Παρασκευή 02/6

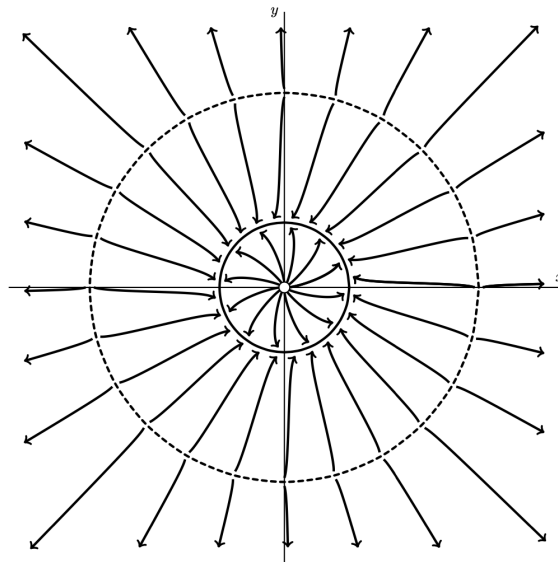
260

22. Λύστε την Άσκηση 6.5.20 (σελ. 191) και τις ασκήσεις 7.1.1, 7.1.2, 7.1.3, και 7.1.4 (σελ. 230) του Strogatz, έκδοση 2018

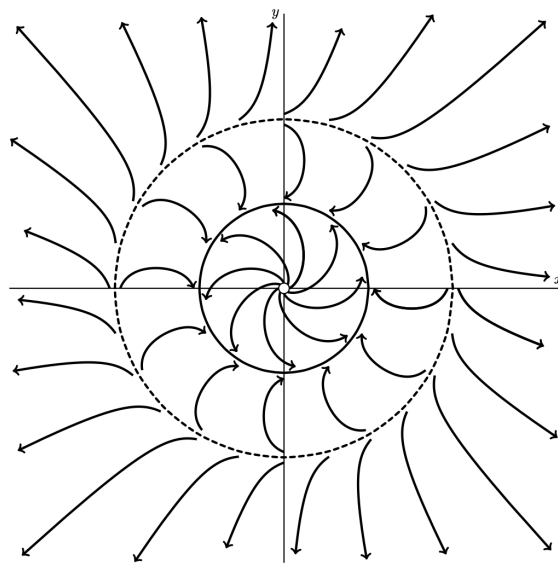
261



Σχήμα 6: Άσκηση 7.1.1. Η ροή του δυναμικού συστήματος $\dot{r} = r^3 - 4r$, $\dot{\theta} = 1$. Έχουμε ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας στο $r = 0$ με πεδίο έλξεως το $r < 2$ και ασταθή οριακό κύκλο στο $r = 2$.



Σχήμα 7: Άσκηση 7.1.2. Η ροή του δυναμικού συστήματος $\dot{r} = r(1 - r^2)(9 - r^2)$, $\dot{\theta} = 1$. Έχουμε ασταθές σημείο ισορροπίας στο $r = 0$, ευσταθή οριακό κύκλο στο $r = 1$ με πεδίο έλξεως τον δακτύλιο $0 < r < 3$ και ασταθή οριακό κύκλο στο $r = 3$.



Σχήμα 8: Ασκήση 7.1.3. Η ροή του δυναμικού συστήματος $\dot{r} = r(1 - r^2)(4 - r^2)$, $\dot{\theta} = 2 - r^2$. Έχουμε ασταθές σημείο ισορροπίας στο $r = 0$, ευσταθή οριακό κύκλο στο $r = 1$ με πεδίο έλξεως τον δακτύλιο $0 < r < 2$ και ασταθή οριακό κύκλο στο $r = 2$. Η φορά περιστροφής γίνεται από θετική σε αρνητική στην ακτίνα $r = \sqrt{2}$.

23. Δείξτε ότι η $V = x^2 + y^2$ είναι συνάρτηση Lyapunov για κατάλληλη περιοχή του σημείου ισορροπίας $(0,0)$ της

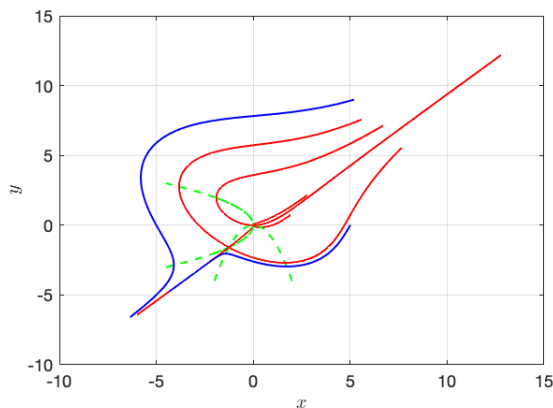
$$\dot{x} = -2x - y^2, \quad \dot{y} = -y - x^2,$$

και ότι το πεδίο έλξεως του $(0,0)$ περιλαμβάνει το χωρίο $x^2 + y^2 \leq 1$.

Είναι: $V(0) = 0$ και για $\forall x, y \neq 0$ είναι $V(x, y) > 0$. Αρκεί να προσδιορισθεί περιοχή στην οποία είναι $\dot{V} \leq 0$. Επειδή

$$\begin{aligned} \dot{V}/2 &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= -2x^2 - xy^2 - y^2 - yx^2 \\ &= -x^2(y+2) - y^2(x+1), \end{aligned}$$

τότε αν $y \geq -2$ και $x \geq -1$ τότε $\dot{V} \leq 0$. Συνεπώς το $(0,0)$ είναι ευσταθές κατά Lyapunov (μάλιστα και ασυμπτωτικά). Δεν συνάγεται όμως ότι όλη η περιοχή $y \geq -2$ και $x \geq -1$ είναι πεδίο έλξεως. Για να είναι πρέπει η περιοχή να είναι τέτοια ώστε όλες οι τροχιές να παραμένουν εντός αυτής πάντοτε. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει να είναι το εσωτερικό γινόμενο $(n, \dot{x}) < 0$, όπου n η προς τα έξω της επιφανείας κάθετος. Αυτό δεν συμβαίνει σε όλη την περιοχή $y \geq -2$ και $x \geq -1$, όπως φαίνεται με τις μπλε τροχιές στο Σχ. 9. Η περιοχή όμως $x^2 + y^2 < 1$ είναι όμως σίγουρα στο πεδίο έλξεως διότι σε όλα τα σημεία του συνόρου της είναι $\dot{V} < 0$ (που είναι το σωστό κριτήριο δεδομένου ότι η $x^2 + y^2 = 1$ είναι ισοϋψής της Lyapunov), που σημαίνει ότι όλες οι τροχές με αρχικές συνθήκες που βρίσκονται σε αυτήν την περιοχή θα είναι πάντα εντός του $x^2 + y^2 < 1$ και θα καταλήγουν στο ευσταθές σημείο ισορροπίας.



Σχήμα 9: Η ροή του δυναμικού συστήματος άσκησης 23. Με κόκκινο είναι οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες των σημείων ισορροπίας. Όλες τροχιές (εκτός από την ευσταθή πολλαπλότητα που εφάπτεται στον άξονα x) καταλήγουν στο $(0,0)$ εφάπτομενες στον άξονα y ! Αυτό για να φανεί χρειάζεται μεγέθυνση. Με πράσινη διάστιχη γραμμή οι καμπύλες μηδενικής κλίσης. Με μπλε μερικές ενδεικτικές τροχές. Στο σχήμα διαγράφεται ο ασκός που σχηματίζεται από το πεδίο έλξεως του ευσταθούς σημείου ισορροπίας $(0,0)$.

276
277

Σημείωση σχετικά με τις κυματικές λύσεις της KdV-B
Η εξίσωση του αντίστοιχου δυναμικού συστήματος είναι

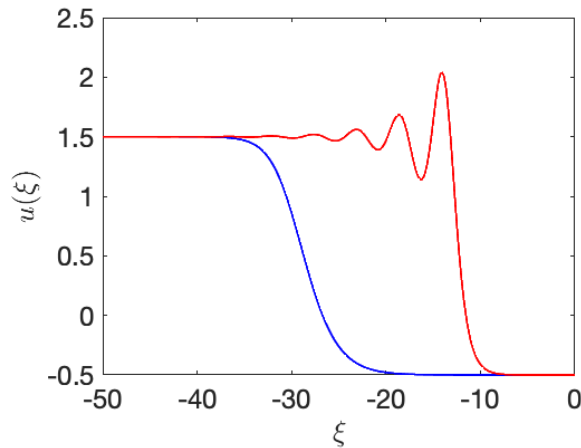
$$\mu \ddot{u} = cu - \frac{1}{2}u^2 + \nu \dot{u} + K. \quad (53)$$

278
279
280
281

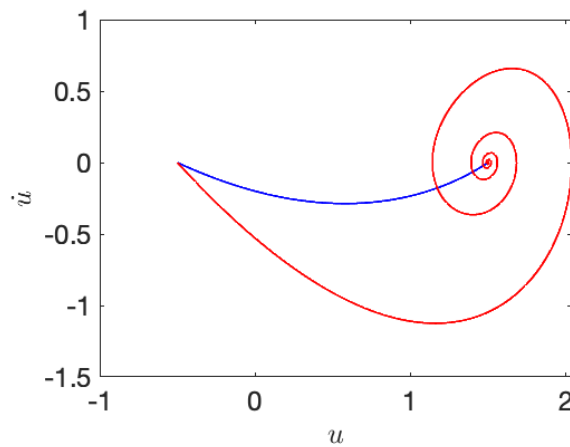
Επιλέξαμε να κατασκευάσουμε τις κυματομορφές για $\mu = 1/2$, $c = 1/2$ και $K = (1 - c^2)/2$ ώστε τα σημεία ισορροπίας του δυναμικού συστήματος στο επίπεδο (u, \dot{u}) να είναι τα $(-0.5, 0)$ και $(1.5, 0)$. Σχεδιάσαμε στο Σχ. 10 τις κυματομορφές που προκύπτουν για την περίπτωση $\nu = 1/4$ και την περίπτωση $\nu = \sqrt{3}$ καθώς και τις αντιστοιχούσες τροχιές στο επίπεδο (u, \dot{u}) στο Σχ. 11.

282
283
284
285
286

Η κατασκευή είναι ιδιαίτερος ευαίσθητη. Ο μόνος τρόπος για να κατασκευαστούν οι τροχιές ήταν ολοκλήρωση πίσω στον χρόνο από την προκείμενη προς το δεύτερο σημείο ισορροπίας ασταθή πολλαπλότητα. Οτιδήποτε άλλο, και με ιδιαίτερη αυξημένη ακρίβεια, οδηγούσε σε μη φραγμένες λύσεις. Αξίζει να δοκιμάσετε. Τα προγράμματα που χρησιμοποίησα έχουν αναρτηθεί στην ιστοσελίδα. Μπορείτε να κατασκευάσετε τώρα την σολιτονική λύση;



Σχήμα 10: Με μπλε όταν $\nu = \sqrt{3}$, με κόκκινο όταν $\nu = 1/4$.



Σχήμα 11: Οι αντιστοιχούσες του Σχ. 10 τροχιές στο επίπεδο u, \dot{u} .

287
288

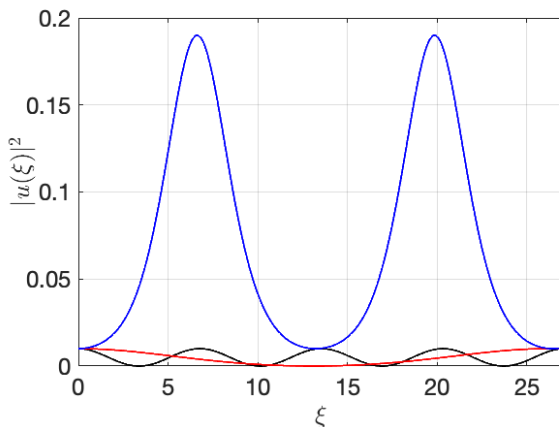
Η δομή των λύσεων κατά τη διακλάδωση στην εστιάζουσα NLS
Η εστιάζουσα NLS

$$i\psi_t = -\frac{1}{2}\psi_{xx} + g|\psi|^2\psi + \mu\psi, \quad g = -1, \quad (54)$$

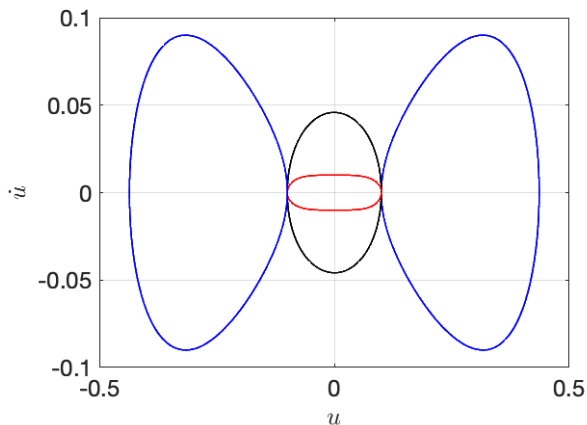
289 επιδέχεται λύσεις της μορφής $\psi = u(\xi)e^{i\theta(\xi)}$, $\xi = x - ct$, αν

$$\ddot{u} = 2u(a - u^2), \quad a = \mu - c^2/2. \quad (55)$$

290 Η (55) εμφανίζει μία υπερκρίσιμη δικρανική διακλάδωση όταν η παράμετρος a αλλάζει πρόσημο. Απο-
291 τυπώνουμε τη δομή των λύσεων πριν και μετά τη διακλάδωση στο Σχ. 12.



Σχήμα 12: Η μπλε γραμμές δείχνουν το πλάτος πιθανότητας όταν $a = 0.1$ για τις δύο αρχικές συνθήκες $(u(0), \dot{u}(0)) = (\pm 0.1, 0)$. Η καμπύλη αυτή δείχνει το πλάτος πιθανότητας όταν έχει γίνει η διακλάδωση, έχει σπάσει η συμμετρία, και το πλάτος πιθανότητας μετατοπίζεται. Τα ευσταθή σταθερά σημεία στην περίπτωση αυτή είναι τα $(u_e, \dot{u}_e) = (\pm\sqrt{0.1}, 0)$. Με κόκκινο το πλάτος πιθανότητας στη κρίσιμη τιμή της διακλάδωσης, $a = 0$. Με μαύρο όταν $a = -0.1$, πριν από τη διακλάδωση και το σταθερό σημείο είναι το $(u_e, \dot{u}_e) = (0, 0)$. Οι αρχικές συνθήκες παραμένουν $(u(0), \dot{u}(0)) = (\pm 0.1, 0)$ (εδώ και οι δύο αρχικές συνθήκες παράγουν τις ίδιες τροχιές).



Σχήμα 13: Οι αντιστοιχούσες του Σχ. 12 τροχιές στο επίπεδο u, \dot{u} .