



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ασκήσεις Μη Γραμμικής Δυναμικής

2022

1. Σωματίδιο κινείται εντός του διαστήματος $[0, a]$ ελεύθερα και ανακλάται ελαστικά στα άκρα του διαστήματος. Κατασκευάστε διάγραμμα της θέσης του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου και εξετάστε αν το πρόβλημα αυτό είναι γραμμικό.
2. Θεωρούμε δυναμική που διέπεται από τη αναδρομική σχέση $x_{n+1} = f(x_n)$. Για ποιές συναρτήσεις f η δυναμική είναι γραμμική. Στην περίπτωση γραμμικής δυναμικής προσδιορίστε τη γενική λύση αν η πρώτη τιμή είναι x_0 .
3. Προσδιορίστε τη λύση της $\dot{x} = x^\alpha$, $\alpha > 1$ και $x(0) = x_0 > 0$. Για πόσο χρόνο υπάρχει λύση σε αυτό το πρόβλημα;
4. Η δυναμική της σταγόνας στην οροφή μέσω της εξίσωσης της ενέργειας οδηγεί σε απροσδιόριστη εξέλιξη. Ενώ αν περιγραφεί με τις εξισώσεις του Νεύτωνα η απροσδιοριστία στην εξέλιξη αίρεται. Γιατί υπάρχει αυτή η διαφορά;

Για την Παρασκευή 11/3/2022

5. Δώστε παράδειγμα δυναμικού συστήματος $\dot{x} = v(x, \alpha)$, όπου α μία παράμετρος, του οποίου οι λύσεις του $x(t, \alpha)$ να παρουσιάζουν ασυμπτωτική ασυνέχεια:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} x(t, \alpha) \neq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, \alpha).$$

Είναι δυνατόν να είναι $\lim_{t \rightarrow T} \lim_{\alpha \rightarrow 0} x(t, \alpha) \neq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow T} x(t, \alpha)$;

6. Με την μέθοδο Picard προσδιορίστε τη λύση της $\dot{x} = x + 2$, $x(0) = 0$.
7. Σημείο ισορροπίας του αυτόνομου δυναμικού συστήματος $\dot{x} = f(x)$ είναι το σημείο x_e για το οποίο αν αρχικά βρεθούμε εκεί, είναι δηλαδή $x(0) = x_e$, τότε είναι $x(t) = x_e$, $\forall t$. Δείξτε ότι τα σημεία ισορροπίας είναι μόνο αυτά για τα οποία $f(x_e) = 0$.
8. Πόσα σημεία ισορροπίας μπορεί να έχει ένα γραμμικό δυναμικό σύστημα;
9. (Διορθωμένο) Ο διαδότης γραμμικής δυναμικής που προωθεί τις καταστάσεις από τον χρόνο t_1 στον χρόνο t_2 είναι $\Phi(t_2, t_1)$. Δείξτε ότι $\Phi(t_3, t_2)\Phi(t_2, t_1) = \Phi(t_3, t_1)$. Σε τι αρχή βασιστήκατε για να αποδείξετε αυτήν την πρόταση.
10. Η εξίσωση Gompertz για την εξέλιξη των πληθυσμών με $x \geq 0$ είναι:

$$\dot{x} = \begin{cases} -x \log(x) & , \quad x > 0, \\ 0 & , \quad x = 0, \end{cases}$$

- (α) Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας της.
 (β) Προσδιορίστε αν η $f(x) = -x \log(x)$ είναι Lipschitz στα σημεία ισορροπίας.
 (γ) Προσδιορίστε τη λύση για την αρχική τιμή $x(0) = x_0$ με $x_0 > 0$ και προσδιορίστε την ασυμπτωτική τιμή του x .
 (δ) Είναι η λύση μοναδική για $x(0) = 0$; Εάν ναι εξηγήστε τον λόγο.
 (ε) Με τη μέθοδο του Euler υπολογίστε αριθμητικά την εξέλιξη των πληθυσμών που συναπάγεται η Gompertz. Σχεδιάστε την αναλυτική λύση στο ίδιο διάγραμμα για να διαπιστώσετε την ακρίβεια της αριθμητικής λύσης σας.

Για την Παρασκευή 18/3/2022

11. Δείξτε ότι ο διαδότης ενός αυτόνομου δυναμικού συστήματος $\Phi(t_2, t_1)$ εξαρτάται από τη διαφορά των χρόνων, $t_2 - t_1$.
12. Επιλέγοντας δύο κατάλληλες αρχικές συνθήκες προσδιορίστε τον διαδότη του αρμονικού ταλαντωτή μάζας $m = 1$ που διέπεται από τη δυναμική:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

όπου x_1 η θέση του και x_2 η ταχύτητά του. Υπολογίστε τώρα τον διαδότη $\Phi(2\pi, 0)$ δυναμικού συστήματος από τον χρόνο $t = 0$ στον χρόνο $t = 2\pi$, που το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq \pi$ είναι ταλαντωτής με συχνότητα ω_1 ενώ το χρονικό διάστημα $\pi < t \leq 2\pi$ είναι ταλαντωτής με συχνότητα ω_2 .

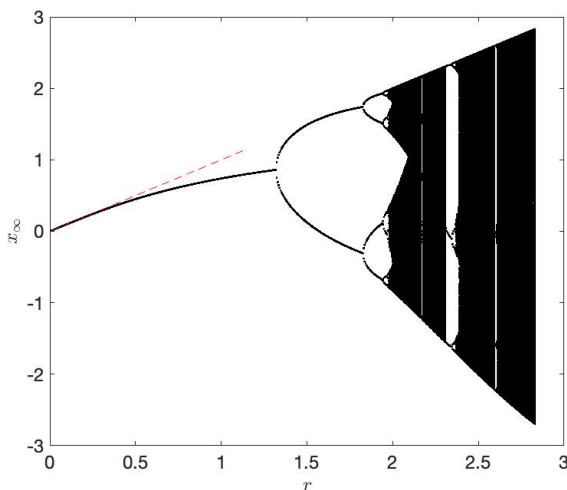
13. Θεωρήστε την αναδρομική σχέση που προκύπτει από τη αριθμητική λύση της εξίσωσης Gompertz

$$x_{n+1} = x_n - \delta x_n \log x_n, n \in \mathbb{N},$$

όπου δ το βήμα της χρονικής ολοκλήρωσης. Η αναδρομική σχέση έχει σταθερό σημείο το $x = 1$, που είναι και το σημείο ισορροπίας της Gompertz στο συνεχές όριο.

- (α) Προσδιορίστε για ποιές τιμές του δ το $x = 1$ είναι ευσταθές σταθερό σημείο.
 (β) Σχεδιάστε αριθμητικά τη συνάρτηση που συνδέει τις διαδοχικές τιμές της αναδρομικής σχέσης της Gompertz, $x_{n+1} = f(x_n)$, όπου $f(x) = x - \delta x \log x$ καθώς και στο ίδιο διάγραμμα τη συνάρτηση $y = x$ για $\delta = 1, 2, 2.2, 2.5$. Τα σταθερά σημεία είναι τα σημεία τομής της $y = f(x)$ και της $y = x$.
 (γ) Τώρα θεωρήστε την αναδρομική σχέση που συνδέει τιμές της αναδρομικής που απέχουν δύο βήματα δηλαδή το x_{n+2} με το x_n που διέπεται από την αναδρομική σχέση $x_{n+2} = f(f(x_n))$. Σχεδιάστε την $y = f(f(x))$ και την $y = x$ και δείξτε ότι υπάρχουν για ορισμένες τιμές του δ πέραν του ενός σταθερά σημεία αυτής της αναδρομικής σχέσης. Τι σημαίνουν τα σταθερά σημεία αυτά και προσδιορίστε την ευστάθεια τους συναρτήσει του δ . Τι συμπεραίνετε για τη συμπεριφορά της αναδρομικής του Gompertz?

14. Για το δυναμικό σύστημα $x_{n+1} = r \cos(x_n)$ σχεδιάστε τα στοιχεία του συνόλου στα οποία καταλήγουν οι αρχικές συνθήκες συναρτήσει της παραμέτρου r , δηλαδή τα στοιχεία του ελκυστή συναρτήσει του r (x_n μπορεί να είναι και αρνητικά).



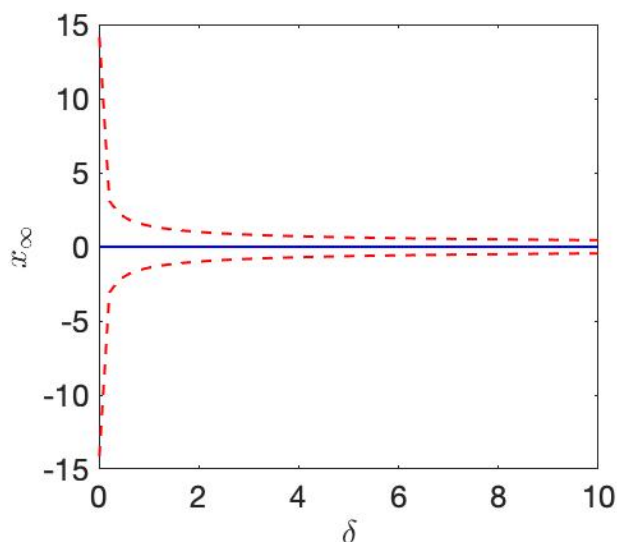
Σχήμα 1: Ο ελκυστής της $x_{n+1} = r \cos(x_n)$. Για μικρές τιμές r υπάρχει μόνο ένα σταθερό σημείο, που είναι $x \approx r$ (η διάστικτη κόκκινη γραμμή), που γεννά έναν κύκλο 2, και μετά από αλληπάλληλες γενέσεις κύκλων με 2^n στοιχεία, μεταβαίνουμε στο χάος, περίπου όταν $r = 2$. Για $r < 0$ έχουμε το κατοπτρικό διάγραμμα διότι αν (r, x) είναι σημείο του διαγράμματος θα ανήκει στο διάγραμμα και το $(-r, -x)$.

15. Το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = -x^3$, $t > 0$, έχει σημείο ισοροπίας $x = 0$ και όλες οι αρχικές καταστάσεις καταλήγουν στο σημείο αυτό, διότι είναι $\lim_{t \rightarrow 0} x(t, x_0) = 0$, $\forall x(0) = x_0$ δεδομένου ότι $x(t, x_0) = x_0 / \sqrt{1 + 2tx_0^2}$. Το μοναδικό σημείο $x = 0$ είναι δηλαδή το μόνο στοιχείο του ελκυστή αυτού του δυναμικού συστήματος. Θέλουμε να συγκρίνουμε τον ελκυστή του συνεχούς δυναμικού συστήματος με τον ελκυστή του διακριτοποιημένου κατά Euler δυναμικού συστήματος $x_{n+1} = f(x_n, \delta) = x_n - \delta x_n^3$ για διάφορες τιμές του βήματος $\delta > 0$. Δείξτε ότι το $x = 0$ είναι σταθερό σημείο του διακριτού δυναμικού συστήματος και ελκυστής μιας περιοχής περί το $x = 0$ (πρόσεξτε επειδή $f'(0, \delta) = 1$ η γραμμικοποίηση δεν κρίνει την ευστάθεια ή αστάθεια του σταθερού σημείου). Ποιά είναι η μέγιστη περιοχή που έλκεται στο 0; Δείξτε επίσης ότι τα $\{-(2/\delta)^{1/2}, (2/\delta)^{1/2}\}$ είναι περιοδικά σημεία περιόδου 2 και ότι αυτός ο κύκλος, που αποτελείται από τα σταθερά σημεία της $x_{n+2} = f(f(x_n, \delta))$, είναι ασταθής. Το δυναμικό σύστημα γίνεται χαοτικό για αρκούντως μεγάλες τιμές του δ ;

Απάντηση

Στη διακριτή περίπτωση το $x = 0$ είναι σταθερό σημείο. Επειδή, όμως, $f'(0) = 1$ η γραμμική ανάλυση δεν προσδιορίζει την ευστάθειά του, αν δηλαδή το σημείο αυτό έλκει τις καταστάσεις που βρίσκονται στην περιοχή του. Αλλά επειδή $x_{n+1} = x_n(1 - \delta x_n^2)$ αν $|1 - \delta x_1^2| < 1$, δηλαδή όταν $|x_1| < \sqrt{2/\delta}$, η ακολουθία φθίνει στο 0, και συνεπώς το 0 είναι ο ελκυστής όλων των σημείων στο

διάστημα $(-\sqrt{2/\delta}, \sqrt{2/\delta})$. Αν όμως $|x_1| > \sqrt{2/\delta}$ το $|x_n| \rightarrow \infty$, χωρίς άλλο. Τα σημεία $\pm\sqrt{2/\delta}$ στο σύνορο του διαστήματος είναι σημεία περιόδου 2, όπως αμέσως φαίνεται, διότι είναι σταθερά σημεία της $f(f(x))$, τα οποία είναι ασταθή (το έχουμε ήδη δείξει αλλά και η γραμμική ανάλυση αμέσως το επιβεβαιώνει διότι $f'(f(\pm\sqrt{2/\delta})) = 25$). Τα συμπεράσματα αυτά ισχύουν για κάθε δ και συνεπώς δεν μπορεί να έχουμε χάος με αυτήν τη δυναμική, ο ελκυστής για κάθε δ είναι το σύνολο $\{-\infty, -\sqrt{2/\delta}, 0, \sqrt{2/\delta}, \infty\}$.



Σχήμα 2: Ο ελκυστής της $x_{n+1} = x_n - \delta x_n^3$. Η μπλε γραμμή είναι το ευσταθές σταθερό σημείο $x = 0$ με πεδίο ελξέως το διάστημα με άκρα για κάθε δ τα αντιστοιχούντα σημεία της διάστιχτης γραμμής. Η κόκκινη διάστιχτη γραμμή σημειώνει τα ασταθή σημεία περιόδου 2.

Ασκήσεις από το βιβλίο του Strogatz.

2.2.8 (Working backwards, from flows to equations) Given an equation $\dot{x} = f(x)$, we know how to sketch the corresponding flow on the real line. Here you are asked to solve the opposite problem: For the phase portrait shown in Figure 1, find an equation that is consistent with it. (There are an infinite number of correct answers—and wrong ones too.)



Figure 1

2.2.9 (Backwards again, now from solutions to equations) Find an equation $\dot{x} = f(x)$ whose solutions $x(t)$ are consistent with those shown in Figure 2.

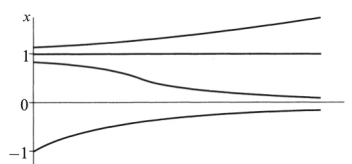


Figure 2

2.2.10 (Fixed points) For each of (a)–(e), find an equation $\dot{x} = f(x)$ with the stated properties, or if there are no examples, explain why not. (In all cases, assume that $f(x)$ is a smooth function.)

- Every real number is a fixed point.
- Every integer is a fixed point, and there are no others.
- There are precisely three fixed points, and all of them are stable.
- There are no fixed points.
- There are precisely 100 fixed points.

2.4.9 (Critical slowing down) In statistical mechanics, the phenomenon of “critical slowing down” is a signature of a second-order phase transition. At the transition, the system relaxes to equilibrium much more slowly than usual. Here’s a mathematical version of the effect:

- Obtain the analytical solution to $\dot{x} = -x^3$ for an arbitrary initial condition. Show that $x(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$, but that the decay is not exponential. (You should find that the decay is a much slower algebraic function of t .)
- To get some intuition about the slowness of the decay, make a numerically accurate plot of the solution for the initial condition $x_0 = 10$, for $0 \leq t \leq 10$. Then, on the same graph, plot the solution to $\dot{x} = -x$ for the same initial condition.

Για την Παρασκευή 15/4/2022

16. Προσδιορίστε τα διαγράμματα διακλάδωσης των παρακάτω δυναμικών συστημάτων επί της πραγματικής ευθείας όταν η παράμετρος r λαμβάνει όλες τις πραγματικές τιμές.

α) $\dot{x} = -rx + x^2$

β) $\dot{x} = -rx + x^3 - x^5$

γ) $\dot{x} = r - x + x^3$

17. Δείξτε ότι η γενική λύση της $\dot{x} = ax + f(t)$ είναι η

$$x = e^{at}x_0 + \int_0^t ds e^{a(t-s)}f(s).$$

Τώρα προσδιορίστε την απεικόνιση Poincaré που προωθεί το παραπάνω σύστημα κατά 2π όταν είναι $f(t) = \cos(t)$ και $a = 1$. Προσδιορίστε τα σταθερά σημεία της απεικόνισης, καθώς και την ευστάθειά τους. Ποιό είναι το φυσικό νόημα των σταθερών σημείων; Σχεδιάστε τη τροχιά που αντιστοιχεί στο σταθερό σημείο.

18. Προσδιορίστε αριθμητικά την απεικόνιση Poincaré μιας περιόδου του δυναμικού συστήματος $\dot{x} = x(1 - x) - 0.25(1 + 0.1 \sin(2\pi t))$ με $x \geq 0$ (αν προκύψουν αρνητικές τιμές να τις θέσετε ίσες με το 0), σχεδιάστε την απεικόνιση, και προσδιορίστε τα σταθερά της σημεία. Τι συμβαίνει στο αντίστοιχο αυτόνομο δυναμικό σύστημα $\dot{x} = x(1 - x) - 0.25$;

19. (Από εργασία του Euler του 1744)

Διακλάδωση λυγισμού της ράβδου του Euler στη γραμμική θεώρηση του σχήματος της ράβδου. Ο Euler ήταν ο πρώτος που υπολόγισε ποτέ μία στερεά ράβδος υπό την πίεση ενός βάρους θα καμφθεί. Θεωρήστε τη γραμμική εξίσωση που διέπει το σχήμα ισορροπίας απαχούς ράβδου στο κατακόρυφο επίπεδο στην οποία έχει τοποθετηθεί στην κορυφή της ένα βάρος που ασκεί δύναμη F :

$$D\ddot{\theta} + F\theta = 0 \quad , \quad (1)$$

με $\dot{\theta} \equiv d\theta/ds$ και συνοριακές συνθήκες:

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(L) = 0 \quad .$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει για μικρές παραμορφώσεις από την κατακόρυφο. Σε επόμενη άσκηση θα άρουμε αυτόν τον περιορισμό. Το s είναι το μήκος τόξου της ράβδου από το κατώτερο σημείο της, όπου $s = 0$, ενώ η ράβδος θεωρείται ότι έχει αναλλοίωτο σταθερό μήκος L , δηλαδή η ράβδος δεν συρρικνώνεται υπό το βάρος που έχει εναποτεθεί σε αυτήν, και συνεπώς η παραπάνω εξίσωση ορίζεται στο διάστημα $s \in [0, L]$. Η $D > 0$ είναι η ελαστική σταθερά της ράβδου. Η γωνία θ είναι η γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της καμπύλης της ράβδου με την κατακόρυφο. Προσδιορίστε για κάθε τιμή της F την $\theta(s)$. Αν χρησιμοποιήσουμε την $\theta_L \equiv \theta(L)$ ως ενδεικτική συντεταγμένη που ορίζει την κατάσταση ισορροπίας της ράβδου, για ποιές τιμές του F αναμένετε διακλάδωση; Σε διάγραμμα (F, θ_L) σχεδιάστε το διάγραμμα διακλάδωσης της γραμμικής εξίσωσης (1). Ποία είναι η πρώτη κρίσιμη τιμή της δύναμης F_c που οδηγεί στο λυγισμό της ράβδου; Σχεδιάστε το σχήμα της ράβδου στις διάφορες διακλαδώσεις.

20. Το δυναμικό σύστημα $\dot{\theta} = -r \sin(\theta) + \sin(t)$ με περιοδική διέγερση τι θα μπορούσε να περιγράψει; Προσδιορίστε την απεικόνιση Poincaré που προωθεί τις καταστάσεις κατά μία περίοδο και δείξτε ότι για ορισμένες τιμές του r υπάρχουν περιοδικές τροχιές. Κατασκευάστε διάγραμμα διακλάδωσης των περιοδικών τροχιών και προσδιορίστε το είδος της ευστάθειας των κλάδων.

- 21.

3.7.6 (Model of an epidemic) In pioneering work in epidemiology, Kermack and McKendrick (1927) proposed the following simple model for the evolution of an epidemic. Suppose that the population can be divided into three classes: $x(t)$ = number of healthy people; $y(t)$ = number of sick people; $z(t)$ = number of dead people. Assume that the total population remains constant in size, except for deaths due to the epidemic. (That is, the epidemic evolves so rapidly that we can ignore the slower changes in the populations due to births, emigration, or deaths by other causes.)

Then the model is

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -kxy \\ \dot{y} &= kxy - ly \\ \dot{z} &= ly\end{aligned}$$

where k and l are positive constants. The equations are based on two assumptions:

- (i) Healthy people get sick at a rate proportional to the product of x and y . This would be true if healthy and sick people encounter each other at a rate proportional to their numbers, and if there were a constant probability that each such encounter would lead to transmission of the disease.
- (ii) Sick people die at a constant rate l .

The goal of this exercise is to reduce the model, which is a *third-order system*, to a first-order system that can be analyzed by our methods. (In Chapter 6 we will see a simpler analysis.)

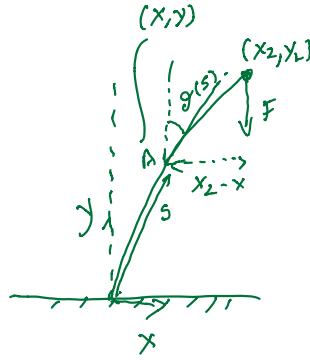
- a) Show that $x + y + z = N$, where N is constant.
- b) Use the \dot{x} and \dot{z} equation to show that $x(t) = x_0 \exp(-kz(t)/l)$, where $x_0 = x(0)$.
- c) Show that z satisfies the first-order equation $\dot{z} = l[N - z - x_0 \exp(-kz/l)]$.
- d) Show that this equation can be nondimensionalized to

$$\frac{du}{d\tau} = a - bu - e^{-u}$$

by an appropriate rescaling.

- e) Show that $a \geq 1$ and $b > 0$.
- f) Determine the number of fixed points u^* and classify their stability.
- g) Show that the maximum of $\dot{u}(t)$ occurs at the same time as the maximum of both $\dot{z}(t)$ and $y(t)$. (This time is called the *peak* of the epidemic, denoted t_{peak} . At this time, there are more sick people and a higher daily death rate than at any other time.)
- h) Show that if $b < 1$, then $\dot{u}(t)$ is increasing at $t = 0$ and reaches its maximum at some time $t_{\text{peak}} > 0$. Thus things get worse before they get better. (The term *epidemic* is reserved for this case.) Show that $\dot{u}(t)$ eventually decreases to 0.
- i) On the other hand, show that $t_{\text{peak}} = 0$ if $b > 1$. (Hence no epidemic occurs if $b > 1$.)
- j) The condition $b = 1$ is the *threshold* condition for an epidemic to occur. Can you give a biological interpretation of this condition?
- k) Kermack and McKendrick showed that their model gave a good fit to data from the Bombay plague of 1906. How would you improve the model to make it more appropriate for AIDS? Which assumptions need revising?

For an introduction to models of epidemics, see Murray (2002), Chapter 10, or Edelstein-Keshet (1988). Models of AIDS are discussed by Murray (2002) and May and Anderson (1987). An excellent review and commentary on the Kermack-McKendrick papers is given by Anderson (1991).



Σχήμα 3: Η ράβδος του Euler

22. α) Θεωρήστε το μη αυτόνομο μονοδιάστατο δυναμικό σύστημα $\dot{x} = v(x, t)$ επί της ευθείας, με $v(x, t)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς τα ορίσματά της και την $v(x, t)$ περιοδική συνάρτηση ως προς t με περίοδο T , $v(x, t) = v(x, t + T)$. (α) Αν υπάρχουν ξ και η με $\xi > \eta$ ώστε $\forall t$ να είναι $v(\xi, t) < 0$ και $v(\eta, t) > 0$, αποδείξτε ότι το δυναμικό σύστημα εκτελεί περιοδική κίνηση για κάποια αρχική κατάσταση x_0 , $\eta < x_0 < \xi$.
 (β) Υπάρχουν περιοδικές τροχιές στο δυναμικό σύστημα $\dot{x} = x^2 - 1 - \cos(t)$; Αν υπάρχουν προσδιορίστε πόσες και εντοπίστε τες αριθμητικά (σχεδιάστε τη χρονική τους εξέλιξη).
23. α) Μη γραμμική εξίσωση του σχήματος της ράβδου του Euler

Ακριβέστερα η εξίσωση που διέπει το σχήμα της ράβδου είναι η

$$D\ddot{\theta} + F \sin \theta = 0 \quad , \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(L) = 0 \quad . \quad (2)$$

Η τελεία συμβολίζει παραγωγή ως προς το μήκος τόξου επί της ράβδου, $\dot{\theta} \equiv d\theta/ds$. Αυτή η εξίσωση διέπει το σχήμα ισορροπίας της ράβδου όταν ασκείται δύναμη F στο άνω άκρο της. Εμείς θα θεωρήσουμε ότι $F > 0$, που αντιστοιχεί σε πιεστική δύναμη. Η εξίσωση ισορροπίας του σχήματος της ράβδου (2) προκύπτει από την απαίτηση να είναι ελάχιστο το συναρτησοειδές της συνολικής δυναμικής (ελαστικής και εξωτερικής δύναμης) ενέργειας

$$V[\theta] \equiv \int_0^L \frac{1}{2} D\dot{\theta}^2 ds + Fy_L = \int_0^L \left(\frac{1}{2} D\dot{\theta}^2 + F \cos \theta \right) ds \quad , \quad (3)$$

δεδομένου ότι, αν θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στη ράβδο με την κατακόρυφο y διεύθυνση (βλ. σχήμα 3), οι συντεταγμένες (x, y) της ράβδου προκύπτουν από τις εξισώσεις:

$$\dot{x} = \sin \theta \quad , \quad \dot{y} = \cos \theta \quad ,$$

και $y_L = \int_0^L \cos \theta ds$. Θυμίζουμε ότι x είναι η οριζόντια διεύθυνση, με $(x, y) = (0, 0)$ το κάτω πακτωμένο άκρο της ράβδου. Δείξτε από πρώτες αρχές, ορίζοντας προσεκτικά το είδος των μεταβολών, ότι στασιμοποίηση της (7) οδηγεί στην (2). Ποία η διαφορά με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για την κατασκευή των εξισώσεων Euler-Lagrange μέσω της αρχής του Χάμιλτον στη Μηχανική;

β) Υπολογισμός της διακλάδωσης λυγισμού της ράβδου του Euler στη μη γραμμική θεώρηση. Η εξίσωση κίνησης (2) είναι ίδια με αυτήν του επίπεδου εκκρεμούς και οι λύσεις διατηρούν την “ενέργεια”:

$$\frac{1}{2}D\dot{\theta}^2 - F \cos \theta = -F \cos \theta_L, \quad (4)$$

όπου $\theta_L = \theta(L)$. [Προσέξτε ότι το συναρτησοειδές της συνολικής δυναμικής ενέργειας (4) που ελαχιστοποιούμε προκειμένου να βρούμε το σχήμα της ράβδου, που διέπεται τελικά από την (3) δεν είναι η διατηρούμενη ποσότητα. Η $V(\theta)$ είναι το αντίστοιχο της δράσης με αλλαγμένο το πρόσημο της κλασικής δυναμικής ενέργειας από αυτήν που υπεισέρχεται στη διατηρούμενη ενέργεια.] Από τη διατήρηση αυτή, όπως υπολογίζουμε στο εκκρεμές την περίοδο συναρτήσει του πλάτους της ταλάντωσης, υπολογίζουμε εδώ το σχήμα της ράβδου προσδιορίζοντας το μήκος τόξου της ράβδου $s(\theta)$ και τις συντεταγμένες (x, y) της ράβδου, Από την (4) προκύπτει ότι

$$L = \sqrt{\frac{D}{2F}} \int_0^{\theta_L} \frac{d\theta}{\sqrt{-\cos \theta_L + \cos \theta}}. \quad (5)$$

Κάνοντας την κλασσική αντικατάσταση $\sin(\theta/2) = \sin(\theta_L/2) \sin \phi$ έχουμε

$$L = \sqrt{\frac{D}{F}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_L/2) \sin^2 \phi}}, \quad (6)$$

και για μικρά θ_L δείξτε ότι είναι:

$$L = \sqrt{\frac{D}{F}} \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2(\theta_L/2) + \frac{9}{64} \sin^4(\theta_L/2) + \dots \right),$$

και μέσω αυτής αποδείξτε ότι για μικρά θ_L ότι:

$$F = F_c \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2(\theta_L/2) + \frac{11}{32} \sin^4(\theta_L/2) + \dots \right),$$

όπου F_c η κρίσιμη τιμή της δύναμης που υπολογίσατε από τη γραμμική προσέγγιση. Εξ' αυτού αποδείξτε ότι η διακλάδωση στο κρίσιμο σημείο λυγισμού είναι υπερκρίσιμη δικρανική διακλάδωση (supercritical pitchfork bifurcation) και σχεδιάστε τους τρεις πρώτους κλάδους που εμφανίζονται στα $F_c, 9F_c$ και $25F_c$.

γ) Σχεδιάστε το σχήμα τις δοκού σε διαδοχικές τιμές ενέργειας μετά την πρώτη και δεύτερη διακλάδωση.

Για να προσδιορίσουμε την ευστάθεια υπολογίζουμε τη διαφορά της ενέργειας μεταξύ της λυγισμένης Η ενέργεια (7) στην κατάσταση ισορροπίας είναι κάνοντας χρήση την (5)

$$\begin{aligned} V_{eq} &= 2F \int_0^{\theta_L} \cos \theta \frac{ds}{d\theta} d\theta - FL \cos \theta_L \\ &= -FL \cos \theta_L + 2\sqrt{DF} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - 2 \sin^2(\theta_L/2) \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_L/2) \sin^2 \phi}} d\phi \end{aligned}$$

Με ενεργειακά επιχειρήματα προσδιορίστε την ευστάθεια των λύσεων (έστω για την πρώτη διακλάδωση).

24. Σύμφωνα με τη μοντελοποίηση των επιδημιών από τους Kermack & Mc Kendrick (βλ. Ασκ. 21) η τιμή της παραμέτρου $r = kx_0/l$ προσδιορίζει αν θα γίνει επιδημία. Το $1/l$ είναι ο μέσος χρόνος που κάποιος ασθενής μπορεί να μεταδώσει τη νόσο, ενώ $1/kx_0$ είναι ο τυπικός χρόνος που οι υγιείς ερχόμενοι σε επαφή με τους ασθενείς νοσούν. Οπότε αναμένουμε αν είναι $(1/l)/(1/kx_0) = r > 1$ να έχουμε επιδημία. Σχεδιάστε στο ίδιο διάγραμμα τη χρονική εξέλιξη των x/N , y/N , z/N για κάποιο r που οδηγεί σε επιδημία και σε μη.
25. Εξάσκηση στη Runge-Kutta (RK4)
- α) ολοκληρώστε πίσω στον χρόνο το δυναμικό σύστημα της 23β, από κατάλληλες αρχικές συνθήκες, για να προσδιορίσετε την ασταθή περιοδική τροχιά και επιδείξτε την τροχιά σχεδιάζοντας την $x(t)$ συναρτήσει του χρόνου.
- β) γράψτε τον ιδιόμορφο ταλαντωτή $\ddot{x} - \alpha\dot{x}(1 - x^2) + x = 0$ ως ένα σύστημα πρωτοταξίων εξισώσεων και ολοκληρώστε το από τις αρχικές συνθήκες $x(0) = 0.5$, $\dot{x}(0) = 0$ και $x(0) = 5$, $\dot{x}(0) = 0$, πρώτα για $\alpha = 0$, τροποποιώντας κατάλληλα τον κώδικα RK4 του μαθήματος, οπότε και μπορείτε να συγκρίνετε την αριθμητική σας λύση με την αναλυτική, και έπειτα για $\alpha = 1$. Τι παρατηρείτε;
26. Οι διαταραχές περί το σημείο ισορροπίας φυσικού συστήματος διέπονται από το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = \mathbf{A}x$, με $x = (x_1, x_2)^T$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ και

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 100 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ως μέτρο των διαταραχών θεωρούμε το Ευκλείδειο μέτρο: $\|x\|^2 = x^T x$.

- α) προσδιορίστε την ασυμπτωτική του ευστάθεια και τις αναλλοίωτες διευθύνσεις.
- β) Ποιά διαταραχή μοναδιαίου μέτρου διεγείρει μέγιστα την ιδιοκατάσταση με τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή.
- γ) Σχεδιάστε την εξέλιξη του μέτρου των διαταραχών αν η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι η ιδιοκατάσταση που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ιδιοτιμή με την εξέλιξη της διαταραχής που διεγείρει τα μέγιστα την ιδιοκατάσταση με τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή. Αρχικά και οι δύο διαταραχές έχουν μοναδιαίο μέτρο.
27. Επανέλθετε στην Ασκ. 25β. Σχεδιάστε σε διάγραμμα στον χώρο των φάσεων τις τροχιές όταν είναι $\alpha = 0$ για δέκα περιστροφές (δηλαδή μέχρι χρόνο 20π) και στο ίδιο διάγραμμα τις τροχιές όταν $\alpha = 0.5$.
28. α) Ασκ. 26 εκ νέου. Σχεδιάστε την εξέλιξη της “ενέργειας” $E = x_1^2 + x_2^2$ συναρτήσει του χρόνου με αρχικές συνθήκες τις ιδιοκαταστάσεις του δυναμικού συστήματος και έπειτα με αρχική κατάσταση τη μέτρου 1 διορθογώνια κατάσταση που διεγείρει περισσότερο τη λιγότερο ευσταθή ιδιοκατάσταση του συστήματος. Επιβεβαιώστε ότι η διέγερση της ιδιοκατάστασης αυτής είναι μεγαλύτερη σε ενέργεια κατά παράγοντα $1/\sin^2 \vartheta$, όπου ϑ η γωνία που σχηματίζουν οι ιδιοκαταστάσεις (είναι προτιμότερο ο άξονας της ενέργειας να είναι λογαριθμικός, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την

εντολή `semilogy` αντί της `plot` για να το πετύχετε αυτό).

β) Προσδιορίστε την κατάσταση που καθιστά τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας dE/dt στιγμιαία ελάχιστο. Με αυτήν ως αρχική διαταραχή σχεδιάστε την εξέλιξη της ενέργειας.

29. Σχεδιάστε τις τροχιές σημειώνοντας τα αναλλοίωτα σύνολα και το είδος ευστάθειας τους (αν είναι ασυμπτωτικά ευσταθή, Lyapunov ευσταθή ή ασταθή, ανοικτοί κύκλοι για σημεία ισορροπίας, διάστιχτες γραμμές για ασταθείς οριακούς κύκλους) των ακόλουθων δυναμικών συστημάτων στο επίπεδο που έχουν διατυπωθεί σε πολικές συντεταγμένες.

α) $\dot{r} = \varepsilon r - r^3$, $\dot{\vartheta} = 1$, για $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = -1$. Γράψτε το σύστημα αυτό σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

β) $\dot{r} = r(1 - r^2)$, $\dot{\vartheta} = \sin^2(\vartheta) + \varepsilon$, για $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 2$.

30. Καταστάσεις μέτρου $\|x\| = 1$ απεικονίζονται στις Ax όπου A κάποιος τυχαίος πίνακας. Δείξτε ότι το σχήμα που σχηματίζεται από τις Ax είναι ένα ελλειπσοειδές.

31. (Εργαστηριακή άσκηση) Οι τιμές του πεδίου

$$A(x, y) = \sin(2\pi x/100) \cos(2\pi y/100) + \varepsilon \xi(x, y)$$

στο πλέγμα $x = 0, 1, 2, \dots, 100$, $y = 0, 1, 2, \dots, 100$ μπορούν να διαταχθούν και να ορίσουν έναν 100×100 πίνακα A του οποίου το στοιχείο είναι $A_{ij} = A(x_i, y_j)$. Το ξ σε αυτό το πλέγμα είναι ένας τυχαίος 100×100 πίνακας τα στοιχεία του οποίου επιλέγονται από μία γκαουσιανή κατανομή μηδενικής μέσης τιμής και μοναδιαίας διασποράς, που παριστάνει ένα πεδίο θορύβου. Το ε προσδιορίζει την τιμή της διασποράς του τυχαίου θορύβου που μπορεί να παραχθεί με την εντολή `randn(size(A))`. Το πεδίο αυτό θα μπορούσε να αποτελεί αποτύπωση της έντασης του φωτός από φωτογράφιση κάποιου φαινομένου. Οι ισούψεις του πεδίου μπορούν να σχεδιαστούν με τις εξής εντολές:

```
clear all

x=[0:1:100];
y=[0:1:100];
% Ορίζει το πλεγμα
[xx, yy]=meshgrid(x, y);

epsilon=1;
A=sin(2*pi*xx/100).*sin(2*pi*yy/100)+epsilon*randn(size(xx));

figure(450)
contourf(xx, yy, A); colorbar; colormap jet
xlabel('$x$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 24);
ylabel('$y$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 24);
set(gca, 'FontSize', 24)
```

α) Σχεδιάστε το πεδίο για διάφορες τιμές του ε π.χ. $\varepsilon = 0, 0.5, 1, 10$.

β) Για $\varepsilon = 0$ κάντε ιδιάζουσα ανάλυση του πίνακα \mathbf{A} (singular value decomposition): $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\dagger$ ή ισοδύναμα $\mathbf{A} = \sum_i \sigma_i |\mathbf{u}_i\rangle \langle \mathbf{v}_i|$ όπου $\sigma_i \geq 0$ τα διαγώνια στοιχεία του $\mathbf{\Sigma}$ διατεταγμένα φθίνοντα ($\sigma_1 > \sigma_2 > \dots$). Οι κολώνες $|\mathbf{v}\rangle_i$ του \mathbf{V} είναι ιδιοκαταστάσεις του $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ με ιδιοτιμές σ_i^2 , ενώ οι κολώνες $|\mathbf{u}\rangle_i$ του \mathbf{U} είναι οι ιδιοκαταστάσεις του $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$ με τις ίδιες ιδιοτιμές σ_i^2 (γιατί οι ιδιοτιμές είναι ίδιες;). Η ιδιάζουσα ανάλυση μπορεί να προσδιορισθεί αμέσως μέσω των εντολών

```
[u, s, v]=svd(A);
sd=diag(s);
% και σχεδιάζονται οι πρώτες 10 ιδιάζουσες τιμές
figure(2)
plot([1:10], sd(1:10), '*r', 'Markersize',10)
xlabel('$mode~ number$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize',24);
ylabel('$\sigma$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize',24);
set(gca, 'FontSize',24)
```

Τι παρατηρείτε; Σχεδιάστε τώρα τις ισοϋψείς του πίνακα $A_1 = \sigma_1 |\mathbf{u}_1\rangle \langle \mathbf{v}_1|$.

```
v1=v(:,1);
u1=u(:,1);
A1=sd(1)*u1*v1';
figure(452)
contourf(xx,yy,A1);colorbar;colormap jet
xlabel('$x$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize',24);
ylabel('$y$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize',24);
%title(['$S/N = $', num2str(sd(1)^2/sum(sd(2:end).^2))], '
Interpreter', 'latex', 'FontSize',24)
set(gca, 'FontSize',24)
```

Επίσης, προσδιορίστε τι είναι οι καταστάσεις $|\mathbf{u}_1\rangle$ και $|\mathbf{v}_1\rangle$, τις οποίες και να σχεδιάσετε κατάλληλα.

γ) επαναλάβετε το β) για $\varepsilon = 0.5, 1, 10$.

32. α) Κάνοντας χρήση της Ασκ. 17 προσδιορίστε τον διαδότη του δυναμικού συστήματος $\dot{x} = \mathbf{A}x$, με $x = (x_1, x_2)^T$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ με

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & R \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

(Υπ. Προσδιορίστε την εξέλιξη πρώτα του x_2 και έπειτα του x_1).

β) Επαναλάβετε τον υπολογισμό τώρα αθροίζοντας τη σειρά $e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + t^2\mathbf{A}^2/2! + \dots$.

γ) Προσδιορίστε τώρα τον διαδότη όταν $\lambda_1 = \lambda_2$ και προσδιορίστε τις ιδιάζουσες τιμές του διαδότη $e^{t\mathbf{A}}$, καθώς και την ασυμπτωτική συμπεριφορά τους στο όριο $t \rightarrow \infty$.

δ) Μπορεί να γίνει ιδιοανάλυση του πίνακα \mathbf{A} όταν $\lambda_1 = \lambda_2$; Σχεδιάστε τη ροή του δυναμικού συστήματος σε αυτήν την περίπτωση σημειώνοντας την αναλλοίωτη διεύθυνση.

ε) Για την περίπτωση $\lambda = -0.1, R = 10$, σχεδιάστε τη μέγιστη αύξηση ενέργειας, $\|x(t)\|^2/\|x(0)\|^2$, που μπορεί να επιτευχθεί από τις διαταραχές συναρτήσεως του χρόνου. Στο ίδιο διάγραμμα σχεδιάστε την καμπύλη της ελάχιστης ενέργειας που μπορεί να επιτευχθεί, καθώς και την εξέλιξη της ενέργειας αν οι αρχικές καταστάσεις ήταν οι ιδιοκαταστάσεις του συστήματος.

Απ.

α) Αμέσως έχω ότι $x_2(t) = e^{\lambda_2 t} x_2(0)$ και από την πρώτη εξίσωση

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + R e^{\lambda_2 t} x_2(0),$$

έχω ότι

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\lambda_1 t} x_1(0) + R \int_0^t ds e^{\lambda_1(t-s)} e^{\lambda_2 s} x_2(0) \\ &= e^{\lambda_1 t} x_1(0) + R e^{\lambda_1 t} \int_0^t ds e^{(\lambda_2 - \lambda_1)s} x_2(0) \\ &= e^{\lambda_1 t} x_1(0) + R \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_2(0). \end{aligned}$$

Συνεπώς ο διαδότης είναι

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} R \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$$

Προσέξτε: δεν χρησιμοποίησα ιδιοανάλυση για να προσδιορίσω τον διαδοτή (είναι αφυσικό να χρησιμοποιήσεις αυτόν τον τρόπο έτσι και αλλιώς).

β) Θα φτάσω στο ίδιο αποτέλεσμα κάνοντας άθροιση της σειράς. Το ό,τι ξέρω το αποτέλεσμα βοηθά στο άθροισμα της σειράς. Είναι

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & R(\lambda_1 + \lambda_2) \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & R(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)/(\lambda_2 - \lambda_1) \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix},$$

και

$$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & R(\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2) \\ 0 & \lambda_2^3 \end{pmatrix},$$

Παρατηρούμε ότι πάλι $\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1^3 - \lambda_2^3)/(\lambda_2 - \lambda_1)$, και έτσι είναι

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & R(\lambda_2^n - \lambda_1^n)/(\lambda_2 - \lambda_1) \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix},$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{t^2}{2!} \mathbf{A}^2 + \dots \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} R \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

γ) Όταν $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ ο διαδότης είναι

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & Rt \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιάζουσες τιμές του διαδότη είναι τα τετράγωνα των ιδιοτιμών του $e^{\mathbf{A}^\dagger t} e^{\mathbf{A}t}$ δηλαδή του

$$e^{2\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & Rt \\ Rt & 1 + R^2 t^2 \end{pmatrix}$$

και οι ιδιάζουσες τιμές (μέγιστες και ελάχιστες ενέργειες που μπορεί να επιτευχθούν τη χρονική στιγμή t) είναι

$$\sigma_{1,2}^2 = e^{2\lambda t} \left(1 + \frac{R^2 t^2}{2} \pm \frac{R^2 t^2}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{R^2 t^2}} \right).$$

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά είναι

$$\sigma_1^2 \approx e^{2\lambda t} (1 + R^2 t^2) \quad , \quad \sigma_2^2 \approx \frac{e^{2\lambda t}}{R^2 t^2}.$$

δ) Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μόνο το ιδιοανυσμα $[1, 0]^T$ με ιδιοτιμή λ , που προφανώς καλύπτει χώρο μίας διάστασης και έτσι δεν υπάρχουν αρκετά γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα για να σχηματίσουν βάση του 2-διάστατου χώρου στον οποίο εξελίσσονται οι καταστάσεις του δυναμικού συστήματος και συνεπώς ο πίνακας \mathbf{A} σε αυτήν την περίπτωση δεν διαγωνοποιείται. Είναι πίνακας Jordan, όπως λέγεται.

33. Το δυναμικό σύστημα $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ή $d|\mathbf{x}\rangle/dt = \mathbf{A}|\mathbf{x}\rangle$, έχει πλήρη βάση ιδιοκαταστάσεων $|\mathbf{e}_i\rangle$, με αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_i και διορθωγώνιες καταστάσεις $|\mathbf{b}_i\rangle$, έτσι ώστε να αναλύεται στη μορφή $\mathbf{A} = \sum_i \lambda_i |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{b}_i|$. Δείξτε ότι αν το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x} = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, δηλαδή αν $\lambda_i + \lambda_i^* < 0, \forall i$, (* δηλώνει το συζυγές) τότε είναι Lyapunov ευσταθές με πεδίο έλξεως όλον το χώρο. Για να το αποδείξετε δείξτε ότι η $V(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | (\sum_i |\mathbf{b}_i\rangle \langle \mathbf{b}_i|) | \mathbf{x} \rangle$ είναι συνάρτηση Lyapunov $\forall \mathbf{x}$, δηλαδή δεδομένου ότι $V(0) = 0$ δείξτε ότι $V(\mathbf{x}) > 0$ και $dV/dt < 0, \forall \mathbf{x} \neq 0$. Αυτή η πρόταση αποδεικνύει ότι κάθε ασυμπτωτικά ευσταθές γραμμικό σύστημα πεπερασμένων διαστάσεων είναι και Lyapunov ευσταθές.

Απ.

Λαμβανουμε τις ιδιοκαταστάσεις $|\mathbf{e}_i\rangle$ κανονικοποιημένες ενώ οι διορθωγώνιες τους $|\mathbf{b}_i\rangle$ δεν είναι κανονικοποιημένες αλλά ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\langle \mathbf{b}_i | \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij},$$

ώστε έχουμε τα αναπτύγματα

$$|\mathbf{x}\rangle = \sum_i |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{b}_i | \mathbf{x} \rangle \quad , \quad \langle \mathbf{x} | = \sum_i \langle \mathbf{x} | \mathbf{b}_i \rangle \langle \mathbf{e}_i |.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{x} | \left(\sum_a |\mathbf{b}_a\rangle \langle \mathbf{b}_a| \right) | \mathbf{x} \rangle \\
 &= \sum_{i,a,j} \langle \mathbf{x} | \mathbf{b}_i \rangle \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{b}_a \rangle \langle \mathbf{b}_a | \mathbf{e}_j \rangle \langle \mathbf{b}_j | \mathbf{x} \rangle \\
 &= \sum_i |\langle \mathbf{x} | \mathbf{b}_i \rangle|^2
 \end{aligned} \tag{7}$$

που είναι μεγαλύτερο του 0 αν $\mathbf{x} \neq 0$, και μηδέν μόνον όταν $\mathbf{x} = 0$.

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί $dV/dt < 0$ όταν το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές δηλαδή όταν όλες οι ιδιοτιμές του \mathbf{A} έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, δηλαδή αν λ_i είναι i -οστή ιδιοτιμή, είναι $\lambda_i + \lambda_i^* < 0$, για κάθε i . (Μου έκανε εντύπωση ότι δεν είχε επικοινωνηθεί αυτή η πληροφορία ...έχουμε δρόμο ακόμα) Έχω επίσης

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{x}\rangle = \mathbf{A} \left(\sum_i |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{b}_i | \mathbf{x} \rangle \right) = \sum_i \lambda_i |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{b}_i | \mathbf{x} \rangle,$$

και συνεπώς

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} | = \sum_i \lambda_i^* \langle \mathbf{x} | \mathbf{b}_i \rangle \langle \mathbf{e}_i |.$$

Μπορώ να υπολογίζω τώρα το

$$\begin{aligned}
 \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} &= \langle \dot{\mathbf{x}} | \left(\sum_a |\mathbf{b}_a\rangle \langle \mathbf{b}_a| \right) | \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x} | \left(\sum_a |\mathbf{b}_a\rangle \langle \mathbf{b}_a| \right) | \dot{\mathbf{x}} \rangle \\
 &= \sum_i (\lambda_i^* + \lambda_i) |\langle \mathbf{x} | \mathbf{b}_i \rangle|^2 < 0
 \end{aligned}$$

εφόσον $\lambda_i + \lambda_i^* < 0$. Άρα ένα διαγωνοποιήσιμο γραμμικό σύστημα που είναι ασυμπτωτικά ευσταθές είναι και Lyapunov ευσταθές.

Ας κατασκευάσουμε την Lyapunov για την Ασκ. 32. είναι

$$\mathbf{e}_1 = [1, 0]^T, \quad \mathbf{e}_2 = [1, a]^T / \sqrt{1 + a^2}, \quad a = (\lambda_2 - \lambda_1) / R.$$

και συνεπώς

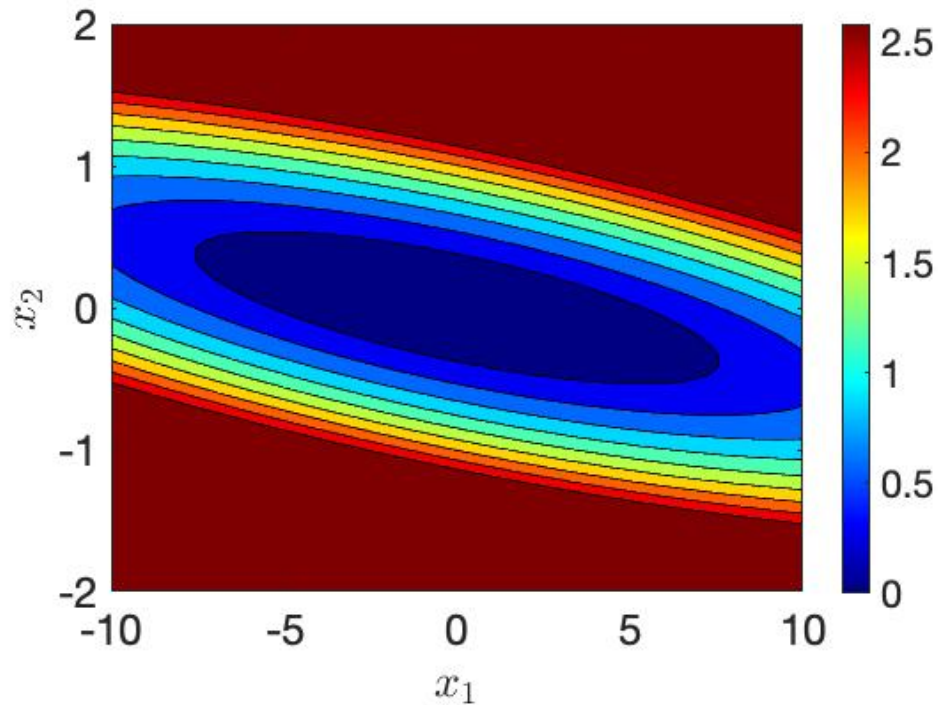
$$\mathbf{b}_1 = [-a, 1]^T / \sqrt{1 + a^2}, \quad \mathbf{b}_2 = [0, 1]^T.$$

Από την (7) έχουμε

$$V(x_1, x_2) = \frac{(ax_1 - x_2)^2}{1 + a^2} + x_2^2$$

την οποία και σχεδιάζω στο Σχ. 4.

Τι γίνεται όμως όταν το σύστημα δεν έχει πλήρη βάση ιδιοκαταστάσεων αλλά είναι ασυμπτωτικά ευσταθές όπως στην περίπτωση του προηγούμενου ερωτήματος. Η απάντηση και σε αυτή την



Σχήμα 4: Οι ισοϋψείς της συνάρτησης Lyapunov για το σύστημα της Ασκ. 32 για $\lambda_1 = -0.1$, $\lambda_2 = -0.2$ και $R = 1$,

περίπτωση είναι ότι είναι Lyapunov ευσταθές. Η κατασκευή της Lyapunov από τον Lyapunov είναι όμορφη και βασίζεται στην παρατήρηση ότι τότε το ολοκλήρωμα

$$\mathbf{C} = \int_0^{\infty} dt e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{A}^{\dagger}t} ,$$

συγκλίνει και η συνάρτηση Lyapunov είναι η

$$V = \langle \mathbf{x} | \mathbf{C} | \mathbf{x} \rangle .$$

Μάλιστα, δεν χρειάζεται να υπολογίσει κανείς το ολοκλήρωμα διότι η \mathbf{C} μπορεί να δει κανείς με πολύ λίγο κόπο ότι ικανοποιεί την αλγεβρική εξίσωση

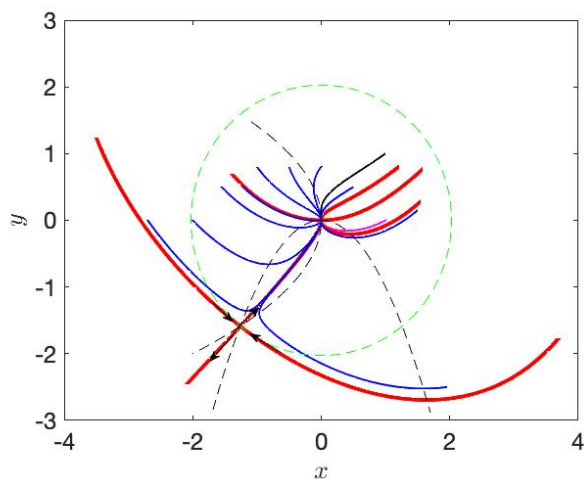
$$\mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{\dagger} + \mathbf{I} = 0 ,$$

η οποία έχει και κρυφή φυσική σημασία, όπως και το ολοκλήρωμα \mathbf{C} (μπορείτε να σκεφτείτε τι παριστάνει;) Αμέσως βρίσκουμε για το σύστημα Jordan της Ασκ. 32 ότι

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1/(2\lambda) - R^2/(4\lambda^3) & R/(4\lambda^2) \\ R/(4\lambda^2) & -1/(2\lambda) \end{pmatrix} .$$

και συνεπώς μία συνάρτηση Lyapunov σε αυτήν την περίπτωση είναι η

$$V(x_1, x_2) = - \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{R^2}{4\lambda^3} \right) x_1^2 + \frac{R}{2\lambda^2} x_1 x_2 - \frac{1}{2\lambda} x_2^2 .$$



Σχήμα 5: Τροχιές της Άσκησης 34. Σημειώνεται η ετεροκλιτική τροχιά.

34. Το δυναμικό σύστημα στο επίπεδο

$$\dot{x} = -2x - y^2, \quad \dot{y} = -y - x^2,$$

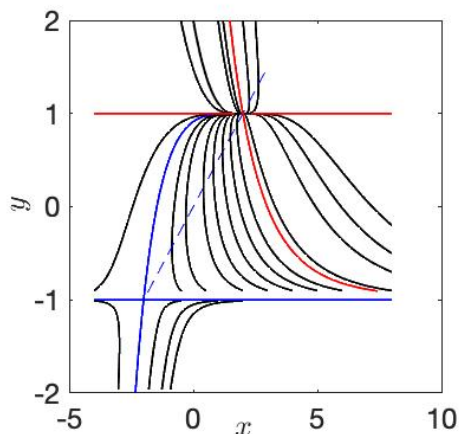
θα αποτελέσει αντικείμενο μελέτης μας και σε επόμενες ασκήσεις. Δύο αρχικά ερωτήματα:

- α) Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας του, την ευστάθειά τους και τις αναλλοίωτες διευθύνσεις της γραμμικοποιημένης δυναμικής και σχεδιάστε τη ροή στην περιοχή των σημείων ισορροπίας.
- β) Μπορεί να υπάρξει οριακός κύκλος στο δυναμικό σύστημα αυτό. Δηλαδή μπορεί να υπάρξουν περιοδικές λύσεις;

35. Σχεδιάστε τη δυναμική του συστήματος:

$$\dot{x} = -\frac{x}{2} + y, \quad \dot{y} = 1 - y^2,$$

Σημειώνοντας την εξέλιξη των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων.



Σχήμα 6: Τροχιές της Άσκησης 35. Με κόκκινο οι αναλλοίωτες πολλαπλότητες του σταθερού σημείου $(2, 1)$ και με μπλε οι αναλλοίωτες πολλαπλότητες του σαγματικού σημείου ισορροπίας $(-2, -1)$.

36. Ο ταλαντωτής

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \left(\dot{x} - \frac{\dot{x}^3}{3} \right), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 2a, \quad \varepsilon > 0$$

εμφανίζει οριακό κύκλο (καταλήγει σε περιοδική κίνηση κάποιου πλάτους).

α) Για μικρές τιμές του ε προσδιορίστε μία υποψήφια περιοδική τροχιά (κάντε χρήση φυσικής διαίσθησης και ενεργειακών επιχειρημάτων).

β) Λαμβάνοντας ως δεύτερη χρονική κλίμακα την $T = \varepsilon t$ και κάνοντας χρήση της διαταρακτικής μεθόδου δύο χρόνων προσδιορίστε σε πρώτη τάξη την εξέλιξη του ταλαντωτή από τις αρχικές τιμές και την προσέγγισή του στην περιοδική τροχιά.

γ) Συγκρίνατε το αναλυτικό σας αποτέλεσμα με την αριθμητική λύση για τις τιμές $a = 2, \varepsilon = 0.2$. Προσδιορίστε το χρονικό διάστημα που η προσέγγισή σας είναι καλή,

Απ.

α) Από την απαίτηση

$$\int_0^T dt \dot{x}(\ddot{x} + x) = \varepsilon \int_0^T dt \left(\dot{x}^2 - \frac{\dot{x}^4}{3} \right) = 0$$

επί του οριακού κύκλου, και αναμένοντας για μικρά ε η περιοδική κίνηση να είναι $x \approx A \cos t$ με περίοδο $T = 2\pi$, προκύπτει αμέσως ότι $A = 2$.

β) Λαμβάνω αργό χρόνο $T = \varepsilon t$ και αναπτύγμα

$$x(t) = x_0(t, T) + \varepsilon x_1(t, T) + \dots,$$

και αρχικές συνθήκες για την x_0

$$x_0(0, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial x_0}{\partial t} \right|_{(0,0)} = 2a .$$

Μηδενισμός του όρου ε^0 και ε^1 της διαταρακτικής σειράς οδηγεί στις εξισώσεις

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial t^2} + x_0 = 0 , \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial t \partial T} + \frac{\partial x_0}{\partial t} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial x_0}{\partial t} \right)^3 . \quad (9)$$

από τις οποίες έχουμε ότι

$$x_0 = A(T)e^{it} + A^*e^{-it} .$$

Στην (9) στο δεξιό μέλος εμφανίζονται όροι ανάλογοι των $e^{\pm it}$ και όροι ανάλογοι των $e^{\pm 3it}$. Οι πρώτοι οδηγούν σε συντονισμό και σε $x_1 \approx te^{\pm it}$ που οδηγεί τη σειρά να είναι χρήσιμη για χρόνους μέχρι και $t \approx 1/\varepsilon$. Αν επιλέξουμε όμως τη συνάρτηση του αργού χρόνου κατάλληλα ώστε να εξαφανίσουμε τον συντονισμό θα επεκτείνουμε την ισχύ της λύσης και μπορεί επίσης, αν είναι κατάλληλο το πρόβλημα, να επιτύχουμε προσέγγιση η οποία να έχει ομοιόμορφη ασυμπτωτική σύγκλιση στην ακριβή λύση όταν $\varepsilon \rightarrow 0$. Οι όροι συντονισμού, σε αυτήν την τάξη, απαλείφονται αν απαιτήσουμε

$$2 \frac{dA}{dT} = A(1 - |A|^2) .$$

Θέτοντας $A = re^{i\theta}$, η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με τις δύο πραγματικές εξισώσεις

$$2 \frac{dr}{dT} = r(1 - r^2) , \quad \frac{d\theta}{dT} = 0$$

που έχουν λύση

$$r(T) = \frac{r(0)}{\sqrt{e^{-T} + r^2(0)(1 - e^{-T})}} , \quad \theta(T) = \theta(0) .$$

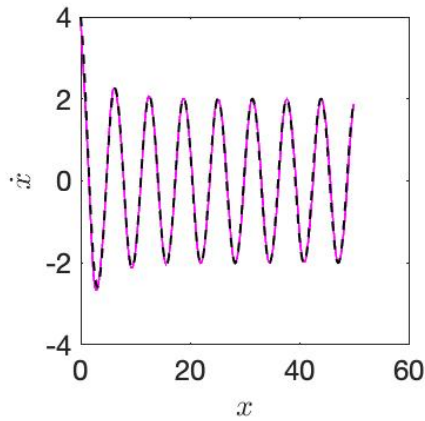
Συνεπώς έχουμε

$$x(t) \approx \frac{2r(0)}{\sqrt{e^{-\varepsilon t} + r^2(0)(1 - e^{-\varepsilon t})}} \cos(t + \theta(0)) ,$$

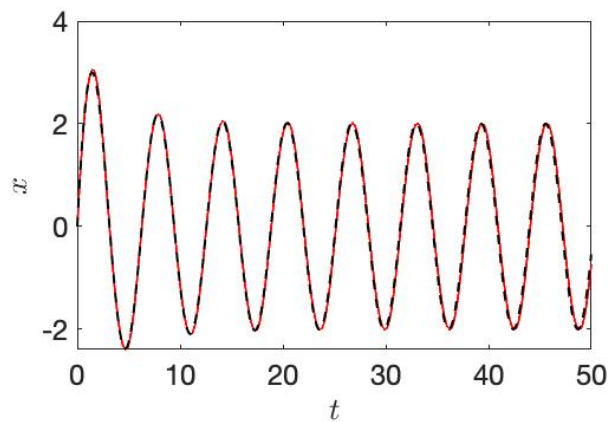
και από τις αρχικές συνθήκες $r(0) = a, \theta(0) = -\pi/2$ ώστε

$$x(t) \approx \frac{2a \sin t}{\sqrt{e^{-\varepsilon t} + a^2(1 - e^{-\varepsilon t})}} .$$

γ) Για τις τιμές που δόθηκαν η προσέγγιση πρέπει να ισχύει μέχρι και τον χρόνο $1/0.2^2 = 25$. Βλέπουμε ότι παρ' όλα αυτά ενώ η χρονική εξέλιξη φαίνεται καλή η τροχιά αρχικά περιγράφεται ατελώς.

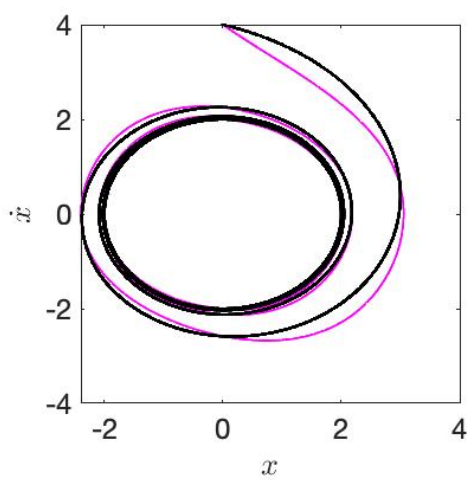


Σχήμα 7: Η εξέλιξη της x για τις τιμές $a = 2$ και $\varepsilon = 0.2$ προς τον οριακό κύκλο $x = 2 \sin t$. Με διάστιχη μαύρη γραμμή διαγράφεται η προσέγγιση.



Σχήμα 8: Η εξέλιξη της \dot{x} για τις τιμές $a = 2$ και $\varepsilon = 0.2$ προς τον οριακό κύκλο $x = 2 \sin t$. Με τη διάστιχη μαύρη γραμμή διαγράφεται η προσέγγιση.

37. (V. Arnold) Ένας περιοδικά μεταβαλλόμενος αρμονικός ταλαντωτής περιόδου 2π εναλλάσσεται μεταξύ δύο συχνοτήτων: το πρώτο μισό της περιόδου βρίσκεται στη συχνότητα $\omega(1 + \varepsilon)$, ικανοποιώντας την εξίσωση $\ddot{x} + \omega^2(1 + \varepsilon)^2 x = 0$, και το υπόλοιπο μισό βρίσκεται στη συχνότητα $\omega(1 - \varepsilon)$, ικανοποιώντας την εξίσωση $\ddot{x} + \omega^2(1 - \varepsilon)^2 x = 0$.
- α) Προσδιορίστε τον διαδότη μίας περιόδου $\Phi(2\pi, \omega, \varepsilon)$, τις ιδιοτιμές του και τον χαρακτηριστικό εκθέτη Lyapunov $\lambda(\omega, \varepsilon)$.
- β) Σχεδιάστε τις ισοϋψείς των ασταθών εκθετών Lyapunov $\lambda(\omega, \varepsilon)$ στο επίπεδο (ω, ε) , για $0.2 < \omega < 2, |\varepsilon| < 1/2$.



Σχήμα 9: Η τροχιά στο επίπεδο x, \dot{x} για τις τιμές $a = 2$ και $\varepsilon = 0.2$ προς τον οριακό κύκλο $x = 2 \sin t$. Με μιάρη γραμμή διαγράφεται η προσεγγιση.