ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Σύντομες σημειώσεις για Στερεό Σώμα

Απρίλιος 2026

1 Στερεό Σώμα – Στροφές

Η μελέτη της κίνησης ενός στερεού σώματος σε κάποιο πεδίο δυνάμεων κρύβει πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες οι οποίες την καθιστούν ιδιαίτερα πολύπλοκη και σε κάποιον βαθμό αντιδιαισθητική. Πολύ μεγάλοι φυσικοί επέδειξαν ιδιαίτερο ενθουσιασμό στην προσπάθειά τους να ανακαλύψουν τους νόμους που διέπουν την κίνηση ενός στερεού, όπως για παράδειγμα η παιδική σβούρα.

Τι ονομάζουμε στερεό σώμα; Το στερεό σώμα αποτελεί μια γεωμετρική εξιδανίκευση ενός πραγματικού στερεού σώματος (κατ' αναλογία με το μη εκτατό νήμα του εκκρεμούς), για το οποίο θεωρούμε ότι οποιοδήποτε ζεύγος σημείων Α, Β στο εσωτερικό (ή και στην επιφάνεια) αυτού διατηρεί την απόστασή του σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος. Πιο σωστά, για να αποφύγουμε την παγίδα να επιλέξουμε ένα ιδιαίτερο ζεύγος σημείων ενός παραμορφώσιμου υλικού που δεν αλλάζει μήκος (όπως για παράδειγμα ένα ζεύγος σημείων που ορίζουν ένα ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στον άξονα ενός κυλίνδρου του οποίου το ύψος είναι μεταβλητό), χρειαζόμαστε μια τετράδα τυχαίων μη συνεπίπεδων σημείων των οποίων οι αποστάσεις κάθε ζεύγους να είναι σταθερή. Προφανώς κανένα πραγματικό «στερεό» σώμα δεν είναι ακριβώς στερεό, αλλά όσο πιο σκληρό είναι το υλικό αυτού, τόσο πιο κοντά στην προαναφερθείσα γεωμετρική ιδιότητα του στερεού αντιστοιχεί το εν λόγω αντικείμενο.

Ένα θέση ενός στερεού σώματος χαρακτηρίζεται από 6 μεταβλητές. Κατάλληλη επιλογή αυτών θα μπορούσε να είναι η θέση X_c, Y_c, Z_c του κέντρου μάζας του, καθώς και 3 γωνίες που θα καθορίζουν τον προσανατολισμό του στερεού στο χώρο. Μπορεί κανείς να φανταστεί ένα καρτεσιανό τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων εντός του στερεού και συνδεδεμένο με το στερεό, έτσι ώστε όταν το στερεό περιστρέφεται να περιστρέφεται μαζί και το σύστημα των αξόνων. Το πλήθος των γωνιών που απαιτούνται είναι 3 αφού χρειαζόμαστε 2 σφαιρικές συντεταγμένες για να καθορίσουμε κάποιον άξονα περιστροφής του σώματος και μια γωνία για τον καθορισμό της στροφής του σώματος γύρω από αυτόν τον άξονα.[1] (Πάρτε στα χέρια σας ένα πραγματικό «στερεό» αντικείμενο και επαναπροσανατολίστε το διαφορετικά από τον αρχικό του προσανατολισμό. Ο ισχυρισμός είναι ότι την τελική θέση μπορείτε να την καθορίσετε επιλέγοντας κάποιον κατάλληλο άξονα και στρίβοντας το αντικείμενο κατά κάποια συγκεκριμένη γωνία γύρω από αυτόν τον άξονα.)

Μια επιλογή των 3 γωνιών στροφής, είναι οι 3 γωνές του Euler. Τα βήματα είναι τα ακόλουθα.

1. Επιλέγουμε ένα αρχικό τρισορθογώνιο σύστημα X, Y, Z με την αρχή του τοποθετημένη σε κάποιο σημείο του στερεού.

2. Εκτελούμε μια στροφή ϕ επί του επιπέδου X, Y με θετική φορά στροφής αυτή που στρέφει τον άξονα X προς τον Y.

3. Οι νέοι μας άξονες είναι οι X', Y', Z' με τον άξονα Z' να συμπίπτει με τον άξονα Z και τον X' να σχηματίζει γωνία ϕ με τον άξονα X (το ίδιο και για τον Y' σε σχέση με τον).

4. Εκτελούμε μια στροφή θ επί του επιπέδου Y', Z' με θετική φορά στροφής αυτή που στρέφει τον άξονα Y' προς τον Z'.

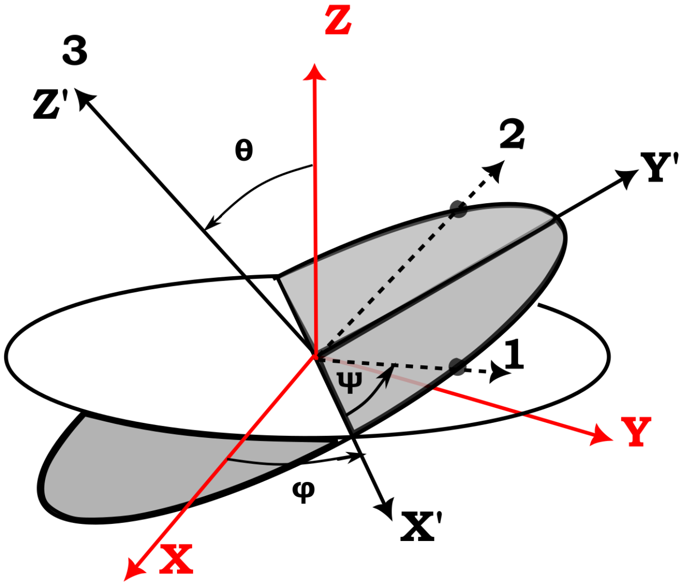
5. Οι νέοι μας άξονες είναι οι X'', Y'', Z'' με τον άξονα $''$ να συμπίπτει με τον άξονα $'$ και τον X'' να σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα X' (το ίδιο και για τον Z'' σε σχέση με τον Z').

6. Εκτελούμε μια στροφή ψ επί του επιπέδου X'', Y'' με θετική φορά στροφής αυτή που στρέφει τον άξονα X'' προς τον Y''.

7. Οι νέοι μας άξονες είναι οι X''', Y''', Z''' με τον άξονα Z''' να συμπίπτει με τον άξονα Z'' και τον X''' να σχηματίζει γωνία ψ με τον άξονα X'' (το ίδιο και για τον Y''' σε σχέση με τον Y'').

Η συγκεκριμένη επιλογή των 3 γωνιών στροφής έχει το πλεονέκτημα ότι οι 3 αντίστοιχοι πίνακες στροφής είναι τεχνικά πολύ απλοί στη γραφή τους (η στροφή γύρω από τον άξονα Y, που δεν συμπεριλαμβάνεται στην περίπτωσή μας, έχει μια ιδιαιτερότητα: η στροφή ακολουθεί την κατεύθυνση από τον Z προς τον X, με αποτέλεσμα τα πρόσημα του $\sin \alpha$ κάποιας αντίστοιχης α στροφής είναι ανάποδα από αυτά των άλλων στροφών). Επίσης η επιλογή αυτή είναι πιο φυσική καθώς καθορίζει τον άξονα περιστροφής του σώματος Z'' μέσω των κλασικών σφαιρικών συντεταγμένων ϕ, θ και στη συνέχεια η 3η στροφή υποδηλώνει την ιδιοπεριστροφή του σώματος. Το μειονέκτημα είναι ότι παρουσιάζεται κάποιος εκφυλισμός μεταξύ των γωνιών ϕ και ψ, όταν $\theta = 0$ ή π, αφού δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε ποια είναι ποια.

[1] Πιο σωστά οι στροφές ορίζονται σε κάποιο επίπεδο και όχι γύρω από κάποιον άξονα, αφού σε περίπτωση διαστάσης διαφορετικής του 3, θα είχαμε πρόβλημα να καθορίσουμε τον άξονα στροφής, ενώ σε ένα επίπεδο μπορούμε πάντα να εκτελέσουμε νια στροφή, όπως μάθαμε να κάνουμε στις 2 διαστάσεις.



Σχήμα 1: Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι άξονες X, Y, Z και X'', Y'', Z''. Οι τελικοί άξονες X''', Y''', Z''' έχουν σχεδιασθεί ως άξονες $1, 2, 3$ που θεωρούμε ότι αποτελούν τους κύριους άξονες αδρανείας (βλ. παρακάτω) που είναι προσδεδεμένοι στο σώμα.

2 Κύριοι άξονες αδράνειας στερεού

Ας γράψουμε την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής ενός σώματος στο σύστημα κέντρου μάζας, όταν αυτό θεωρούμε ότι έχει ως αρχή των αξόνων το ΚΜ του σώματος.

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} \int dm v^2$$

όπου η ολοκλήρωση λαμβάνεται σε ολόκληρο το χωρία που καταλαμβάνει το στερεό και v είναι το μέτρο της ταχύτητας της εκάστοτε στοιχειώδους μάζας dm του στερεού. Επειδή η κίνηση του στερεού θεωρούμε ότι προέρχεται αποκλειστικά από την περιστροφή αυτού, υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιος στιγμιαίος νοητός άξονας περιστροφής αυτού και κάποια γωνιακή ταχύτητα περιστροφής Ω γύρω από αυτόν.[2] Έτσι θα είναι

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

όπου $\vec{\Omega}$ θα είναι η κοινή γωνιακή ταχύτητα (με διεύθυνση αυτή του στιγμιαίου άξονα περιστροφής) περιστροφής ολόκληρου του σώματος και $\vec{r}$ η θέση της εκάστοτε στοιχειώδους μάζας $dm(\vec{r})$. Συνολικά λοιπόν θα έχουμε

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} \int dm(\vec{r})\ (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2.$$

Χρησιμοποιώντας δείκτες συντεταγμένων:

$$(\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 = (\epsilon_{ijk}\Omega_j r_k)(\epsilon_{ilm}\Omega_l r_m)$$

που με τη χρήση της ταυτότητας γινομένου δύο αντισυμμετρικών τανυστών ϵ_{abc} με έναν κοινό δείκτη λαμβάνει τη μορφή

$$(\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})(\Omega_j r_k \Omega_l r_m) = \Omega_j \Omega_j r_k r_k - \Omega_j r_j \Omega_k r_k = \Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{r})^2.$$

Βάσει της προτελευταίας έκφρασης (αυτής με τους δείκτες) μπορούμε να γράψουμε την κινητική ενέργεια περιστροφής του στερεού ως

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} \int dm(\vec{r})\ (\Omega_j \Omega_j r_k r_k - \Omega_j r_j \Omega_k r_k)$$

και λόγω της στιγμιαίας κοινής τιμής για ολόκληρο το στερεό των συντεταγμένων Ω_a αν βγάλουμε την ποσότητα $\Omega_j \Omega_k$ εκτός του ολοκληρώματος θα έχουμε

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2}(\Omega_j \Omega_k) \int dm(\vec{r})\ (\delta_{jk} r_l r_l - r_j r_k).$$

Προσέξτε ότι στην τελευταία γραφή ξαναγράψαμε ον όρο $r_k r_k$ ως $r_l r_l$ αφού πρόκειται για ζευγάρι εικονικών δεικτών που μπορούμε να τους αλλάξουμε το όνομα κατά βούληση για να αποφύγουμε την χρήση του δείκτη k που στο πρώτο γινόμενο εμφανίστηκε εκ νέου όταν γράψαμε $\Omega_j = \Omega_k \delta_{jk}$. Η ποσότητα που αντιπροσωπεύει στο τελευταίο ολοκλήρωμα αφορά αποκλειστικά το στερεό και δεν σχετίζεται καθόλου με την κίνηση αυτού, παρά μόνο με την κατανομή της ύλης σε αυτό. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται τανυστής ροπής αδράνειας του στερεού I_{jk} και αποτελεί έναν τανυστή 2ης τάξης (με 2 ελεύθερους δείκτες):

$$I_{jk} \equiv \int dm(\vec{r})\ (\delta_{jk} r_l r_l - r_j r_k).$$

Η δε κινητική ενέργεια του στερεού θα είναι

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2}\Omega_j I_{jk} \Omega_k.$$

[2] Ο άξονας περιστροφής μπορεί να κινείται σε σχέση με το στερεό.

Πρόκειται για μια διγραμμική μορφή ως το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας και θα μπορούσε να υπολογιστεί ως το γινόμενο των πινάκων

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^{\top}\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega}$$

όπου

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$$

και

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}.$$