



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

1ο σετ Ασκήσεων Μηχανικής II

Μάρτιος 2026

Πρόβλημα Α

Ένα σωματίδιο μάζας $m = 1$ κινείται σε μια διάσταση εντός κάποιου συντηρητικού πεδίου διαθέτοντας δυναμική ενέργεια

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Το σωματίδιο παρατηρούμε ότι μεταβαίνει από τη θέση x_1 (τη χρονική στιγμή 0) στη θέση x_2 (τη χρονική στιγμή T).

- 1 Ελέγξτε αν θα μπορούσαν οι 3 δοσμένες ποσότητες x_1, x_2, T να έχουν ότι τιμές θέλουμε.
- 2 Υπολογίστε τη δράση της φυσικής διαδρομής για $x_1 = 0, x_2 > 0, T = \pi/2$.
- 3 Υπολογίστε τη μεταβολή της δράσης για παρεκκλίνουσα διαδρομή που διαφοροποιείται από την προηγούμενη (του ερωτήματος 2) κατά $\epsilon \xi(t)$ με $\xi(0) = \xi(T) = 0$ και ϵ πολύ μικρός αριθμός. Υπάρχει όρος $\mathcal{O}(\epsilon)$;
- 4 Μπορείτε να διερευνήσετε το πρόσημο του όρου $\mathcal{O}(\epsilon^2)$; [Δοκιμάστε διάφορες κατάλληλες (με κατάλληλα σύνορα) συναρτήσεις $\xi(t)$.]
- 5 Κάθε συνάρτηση με $\xi(0) = \xi(T) = 0$ μπορεί να αναλυθεί κατά Fourier σύμφωνα με τη σχέση

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Xi_k \sin(k\pi t/T)$$

με Ξ_k κατάλληλους (σταθερούς) συντελεστές που χαρακτηρίζουν πλήρως της συνάρτηση. Χρησιμοποιήστε αυτή την ανάλυση για να βεβαιωθείτε για το πρόσημο του όρου $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ στη μεταβολή της δράσης.

- 6 Ξαναμελετήστε το πρόβλημα της δράσης της φυσικής διαδρομής και της μεταβολής αυτής για $T = 3\pi/2$. Υπάρχουν κατάλληλες παρεκκλίσεις από τη φυσική διαδρομή που μειώνουν τη δράση; Που αυξάνουν τη δράση; Που αφήνουν τη δράση ίδια;

Πρόβλημα Β

Έστω N αλληλεπιδρώντα σωματίδια με μάζες $m^{(i)}$. Ανά δύο τα σωματίδια αλληλεπιδρούν με δυναμική ενέργεια που δίνεται από την έκφραση

$$V_{ij} = \vec{a} \cdot (\vec{x}^{(i)} - \vec{x}^{(j)}).$$

Ελέγξτε κατά πόσον η Λαγκρανζιανή αυτή είναι συμμετρική (α) σε μεταθέσεις, (β) σε στροφές. Αν κάποιος από τους παραπάνω μετασχηματισμούς δεν είναι συμμετρία και, κατά συνέπεια, δεν υφίσταται η αντίστοιχη διατήρηση, εξηγήστε, με νευτώνειο συλλογισμό, γιατί δεν ισχύει σε αυτή την περίπτωση αλληλεπίδρασης η αντίστοιχη διατήρηση, αλλά εξακολουθεί να υφίσταται η άλλη διατήρηση.