



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Μηχανικής II
5 Μαΐου 2026

Απαντήστε στα ακόλουθα 4 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Σύνολο μονάδων 120.

Πρόβλημα Α [30 μονάδες]

Ένα σωματίδιο μάζας $m = 1$ και φορτίου Q κινείται στο χώρο υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου που περιγράφεται από ένα ανυσματικό δυναμικό της μορφής $\mathbf{A} = \hat{\phi} A_\phi(\rho, z)$. Η συγκεκριμένη συνάρτηση $A_\phi(\rho, z)$ έχει τη μορφή $B_0\rho/2 + \epsilon(\rho z^2)/2$. Ο στροβιλισμός ενός διανυσματικού μεγέθους $\mathbf{F}$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες υπολογίζεται μέσω της ακόλουθης έκφρασης:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\phi} & \hat{z} \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\phi & \partial/\partial z \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}$$

- (1) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του εν λόγω σωματιδίου σε κυλινδρικές συντεταγμένες, ως συνάρτηση των $\rho, \phi, z, \dot{\rho}, \dot{\phi}, \dot{z}$. Ελέγξτε αν υπάρχει κάποια κυκλική μεταβλητή και υπολογίστε την αντίστοιχη διατηρούμενη ορμή. **[5 μονάδες]**
- (2) Αν $\epsilon = 0$ ποιο είναι το μαγνητικό πεδίο μέσα στο οποίο κινείται το φορτισμένο σωματίδιο και τι κίνηση περιμένετε να εκτελέσει το εν λόγω σωματίδιο σε αυτό το πεδίο; (Περιγράψτε απλά την κίνηση χωρίς να λύσετε εξισώσεις.) **[5 μονάδες]**
- (3) Λύστε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για την παραπάνω περίπτωση ($\epsilon = 0$) και βρείτε κάποια λύση που να αντιστοιχεί σε ομαλή κυκλική κίνηση του σωματιδίου στο επίπεδο $z = 0$ αναζητώντας κατάλληλες αρχικές συνθήκες $\rho(0), \dot{\rho}(0), \phi(0), \dot{\phi}(0), z(0), \dot{z}(0)$. Στη συνέχεια, υπολογίστε την τιμή της δράσης της φυσικής διαδρομής ενός σωματιδίου που ξεκινάει από κάποιο σημείο αυτού του κύκλου και καταλήγει στο ίδιο σημείο μετά από τη διαγραφή ενός πλήρη κύκλου. **[10 μονάδες]**
- (4) Στην περίπτωση που $0 < \epsilon \ll 1$ (αλλά διάφορο του μηδενός) το σωματίδιο ξεκινάει από την αρχική θέση που βρήκατε στο (3) ερώτημα με μοναδική διαφορά ότι η αρχική θέση του σωματιδίου δεν είναι ακριβώς στο $z(0) = 0$ αλλά σε μια πολύ μικρή τιμή $z(0) > 0$. Το σωματίδιο θα έχει την τάση να παραμείνει στο ίδιο επίπεδο, θα αρχίσει να απομακρύνεται από το $z = 0$, ή θα εκτελεί ταλαντώσεις γύρω από το επίπεδο $z = 0$; **[10 μονάδες]**

Πρόβλημα Β [30 μονάδες]

Δύο ίδια κεκλιμένα επίπεδα με γωνία κλίσης $\phi = \pi/4$ τοποθετούνται αντικρυστά ώστε να σχηματίζουν ένα V. Δύο ίδια σωματίδια μάζας $m = 1$ κινούνται ελεύθερα, το καθένα πάνω στο εκάστοτε επίπεδο (π.χ. το 1 στο ανηφορικό επίπεδο και το 2 στο κατηφορικό). Ένα ελατήριο σταθεράς $k = g\sqrt{2}$ και φυσικού μήκους $L_0 = \sqrt{2}$ συνδέει τα δύο σωματίδια. Και τα δύο σωματίδια βρίσκονται εντός του βαρυτικού πεδίου της Γης έντασης g .

- (1) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος χρησιμοποιώντας ως συντεταγμένες τις αποστάσεις s_1, s_2 των σωματιδίων από την κοινή κάτω γωνία των κεκλιμένων επιπέδων. Βρείτε την θέση ισορροπίας του συστήματος. [Προσέξτε ότι οι δύο αποστάσεις s_1, s_2 είναι οι 2 κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου.] **[10 μονάδες]**

- (2) Αφού γραμμικοποιήσετε την Λαγκρανζιανή κατασκευάστε τους πίνακες κινητικής και δυναμικής ενέργειας του συστήματος γύρω από την κατάσταση ισορροπίας. [Υποδ.: Το ανάπτυγμα του $\sqrt{1 + 2(x_1 + x_2) + 2(x_1^2 + x_2^2)}$ για μικρά x_1, x_2 είναι μέχρι σε 2η τάξη ως προς τις μικρές ποσότητες ίσο με $1 + (x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)^2/2$.] **[10 μονάδες]**
- (3) Ποιες οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος και ποιοι οι αντίστοιχοι τρόποι ταλάντωσης γύρω από την κατάσταση ισορροπίας. Είναι ευσταθείς αυτοί οι τρόποι ταλάντωσης; Σχεδιάστε δύο διαδοχικές θέσεις των σωματιδίων που αφορούν τον εκάστοτε τρόπο ταλάντωσης σχεδιάζοντας μαζί και τον άξονα του ελατηρίου. **[10 μονάδες]**

Πρόβλημα Γ [30 μονάδες]

Ένα σωματίδιο μάζας $m = 1$ κινείται σε μία διάσταση στο συμμετρικό δυναμικό της μορφής $V(x) = (|x| - 2)^2/2$ για $|x| \geq 1$ και $V(x) = (2 - x^2)/2$ για $|x| < 1$. (Πρόκειται για έναν κεντρικό «λόφο» και 2 συμμετρικές «γούβες» εκατέρωθεν του λόφου.)

- (1) Γράψτε τη Χαμιλτονιανή του και σχεδιάστε την κίνηση στο χώρο των φάσεων που αντιστοιχεί σε τιμή της Χαμιλτονιανής $H = 1$, περιγράφοντάς την πλήρως. **[10 μονάδες]**
- (2) Το σωματίδιο ξεκινάει ($t = 0$) από τη θέση Α στο χώρο των φάσεων $x(0) = 1, p(0) = 1$, και φτάνει στο Β μετά από χρόνο T που έχει συντεταγμένες $0 < x(T) < 1$ και κάποια ορμή $p(T)$. Πόση είναι αυτή η ορμή; Σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο εν λόγω σημείο; [Προσέξτε ότι αν περάσει το σωματίδιο το σημείο με $x = 1$ αλλάζει η έκφραση του δυναμικού.] **[10 μονάδες]**
- (3) Υπολογίστε τον ρυθμό μεταβολής της $V(x)$ όταν η θέση στο χώρο των φάσεων είναι x_0, p_0 . (Δεν υποθέτουμε, όπως στα (1,2), ότι $H = 1$.) **[5 μονάδες]**
- (4) Σχεδιάστε ποιοτικά την εξέλιξη, μετά από κάποιον αρκετά μεγάλο χρόνο ενός πολύ μικρού κυκλικού χωρίου στο χώρο των φάσεων κεντραρισμένου γύρω από το σημείο $(0, 0)$ του χώρου των φάσεων. **[5 μονάδες]**

Πρόβλημα Δ [30 μονάδες]

Η Λαγκρανζιανή ενός φυσικού συστήματος με 4 βαθμούς ελευθερίας έχει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}a_{12}(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}a_{34}[\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 - (x_3 - x_4)^2] .$$

- (1) Βρείτε 2 ανεξάρτητους συνεχείς μετασχηματισμούς συντεταγμένων της μορφής $x_i \rightarrow x_i + \epsilon K_i(\mathbf{x})$ που αφήνουν αναλλοίωτη τη Λαγκρανζιανή. Στη συνέχεια για τον καθένα από αυτούς υπολογίστε την αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα. **[10 μονάδες]**
- (2) Οι τιμές των παραμέτρων a_{12}, a_{34} πώς καθορίζουν (αν καθορίζουν) την κίνηση του συστήματος; **[5 μονάδες]**
- (3) Δείξτε ότι η κίνηση $x_1(t) = \sigma x_2(t)$ με $\sigma = \text{σταθ}$, $x_2(t)$ αυθαίρετη συνάρτηση και $x_3(t) = x_4(t) = 0$ είναι συμβατή με τις εξισώσεις κίνησης. (Ίσως βοηθήσει αν γράψετε την ποσότητα $x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1$ ως $l(t)$.) Συσχετίστε το αποτέλεσμα σας με κάποια διατηρούμενη ποσότητα του (1). **[10 μονάδες]**
- (4) Αν στο αρχικό σύστημα επιβάλουμε και τον δεσμό $x_3 = x_4 + 1$ υπολογίστε τις δυνάμεις του δεσμού F_3, F_4 . Στην περίπτωση αυτή, τι κίνηση εκτελεί το σύστημα κατά μήκος του άξονα x_3 ; **[5 μονάδες]**

Λύσεις

Πρόβλημα Α

(1)

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + QA_\phi\rho\dot{\phi} \\ &= \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + Q[B_0\rho + \epsilon(\rho z^2)]\rho\dot{\phi}/2 \end{aligned}$$

Κυκλική μεταβλητή η ϕ , επομένως, διατηρείται η $p_\phi = \rho^2\dot{\phi} + Q[B_0\rho + \epsilon(\rho z^2)]\rho/2$, που απλοποιείται σε $p_\phi = \rho^2[2\dot{\phi} + Q(B_0 + \epsilon z^2)]/2$.

(2) Μετά από πράξεις με την δοθείσα έκφραση για τον στροβιλισμό

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}}(1/\rho)\frac{\partial(B_0\rho^2/2)}{\partial\rho} = \hat{\mathbf{z}}B_0.$$

Ομογενές μαγνητικό πεδίο που οδηγεί το φορτίο σε ελικοειδή κίνηση με άξονα τον z .

(3)

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} &= \rho\dot{\phi}(\dot{\phi} + QB_0) \\ p_\phi &= \rho^2[2\dot{\phi} + QB_0]/2 = \text{σταθ} \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

Αναζητώντας λύση ομαλής κυκλικής κίνησης $\rho = \rho(0)$, $\dot{\phi} = \text{σταθ}$, $z = 0$ βρίσκουμε από την πρώτη $\dot{\phi} = -QB_0$ και από την τελευταία $\dot{z}(0) = 0$. Οι $\phi(0)$, $z(0) = 0$ είναι αυθαίρετες, όπως και η $\rho(0) = R$. Η τελευταία δεν προκύπτει από πουθενά και ενδεχομένως οδηγεί σε σύγχυση αφού γνωρίζουμε πως η κίνηση σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έχει συγκεκριμένη ακτίνα. Αυτό όμως συμβαίνει για $\mathbf{v}(0) \perp \mathbf{B}$ δοσμένο. Στην περίπτωση μας η αρχική ταχύτητα κάθετα στο μαγνητικό πεδίο είναι $v(0) = \dot{\phi}R$, απομένως η γνώση της $\dot{\phi}$ ρυθμίζει και την ταχύτητα και την ακτίνα ομοιόμορφα.

$$S = \int Ldt = L \int dt = (\frac{1}{2}R^2\dot{\phi}^2 + QB_0R^2\dot{\phi}/2)(|2\pi/\dot{\phi}|) = \frac{1}{2}R^2\dot{\phi}(\dot{\phi} + QB_0)(|2\pi/\dot{\phi}|) = 0$$

(4) Από την εξίσωση Euler-Lagrange ως προς την z (στην πλήρη αρχική L) λαμβάνουμε

$$\ddot{z} = \epsilon Q\rho^2\dot{\phi}z$$

με μη σταθερά κατ' ανάγκη τα ρ , $\dot{\phi}$. Όμως αφού αρχικά $\dot{\phi}(0) = -QB_0$, ο συντελεστής του z είναι αρνητικός, οπότε αναμένουμε μια μικρή (λόγω μικρού ϵ τάση επιστροφής στο $z = 0$ (και επομένως ταλάντωσης γύρω από το $z = 0$). Μάλιστα και για μεγάλους χρόνους δεν περιμένουμε αλλαγή αυτής της τάσης αφού από τη διατήρηση της p_ϕ δεν αναμένεται αλλαγή πρόσημου της $\dot{\phi}$. Τα παραπάνω ισχύουν προφανώς για κάθε πρόσημο φορτίου αφού τελικά εμφανίζεται το Q^2 στην τελική έκφραση μετά την αντικατάσταση της $\dot{\phi}(0)$.

Πρόβλημα Β

(1)

$$L = \frac{1}{2}(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2) - gs_1\sqrt{2}/2 - gs_2\sqrt{2}/2 - \frac{1}{2}g\sqrt{2}(\sqrt{s_1^2 + s_2^2} - \sqrt{2})^2$$

Εύρεση θέσης ισορροπίας: $\partial V/\partial s_1 = \partial V/\partial s_2 = 0$ με

$$\begin{aligned} V &= \frac{g}{\sqrt{2}}[s_1 + s_2 + (\sqrt{s_1^2 + s_2^2} - \sqrt{2})^2] \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}}[s_1 + s_2 + [s_1^2 + s_2^2 + 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{s_1^2 + s_2^2}]] \end{aligned}$$

Επομένως:

$$1 + 2s_1 - 2\sqrt{2}\frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} = 0 = 1 + 2s_2 - 2\sqrt{2}\frac{s_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}$$

Από αυτές τις 2 σχέσεις καταλήγουμε ότι $s_1 = s_2 = s$, οπότε το τελευταίο κλάσμα παίρνει την τιμή $1/\sqrt{2}$ και έτσι

$$1 + 2s - 2 = 0 \Rightarrow s_1 = s_2 = s = 1/2.$$

(2) Έστω $s_1 = 1 + \xi_1$, $s_2 = 1 + \xi_2$:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) - \frac{g}{\sqrt{2}}[1/2 + \xi_1 + 1/2 + \xi_2 + \\ &\quad (1/2 + \xi_1)^2 + (1/2 + \xi_2)^2 + 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{(1/2 + \xi_1)^2 + (1/2 + \xi_2)^2}] \end{aligned}$$

και αναπτύσσοντας

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) - \frac{g}{\sqrt{2}}[1/2 + \xi_1 + 1/2 + \xi_2 + \\ &\quad (1/2 + \xi_1)^2 + (1/2 + \xi_2)^2 + 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{(1/2 + \xi_1)^2 + (1/2 + \xi_2)^2}] \\ &= \frac{1}{2}(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) - \frac{g}{\sqrt{2}} \times \\ &\quad \left[1/2 + 1/2 + 1/4 + 1/4 + 2 + 2\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\sqrt{1 + 2(\xi_1 + \xi_2) + 2(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \right] \\ &\simeq \frac{1}{2}(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) - \frac{g}{\sqrt{2}} \times \\ &\quad [3/2 + 0 \cdot (\xi_1 + \xi_2) + (\xi_1^2 + \xi_2^2) - (\xi_1 - \xi_2)^2] \\ &= \frac{1}{2}(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) - \frac{g}{\sqrt{2}} [3/2 + 2\xi_1\xi_2] = \frac{1}{2}(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) - \frac{1}{2}g2\sqrt{2}\xi_1\xi_2 \end{aligned}$$

Ο μηδενικός γραμμικός όρος στη δυναμική ενέργεια έχει τονιστεί για να βεβαιωθούμε ότι πράγματι γραμμικοποιήσαμε γύρω από την κατάσταση ισορροπίας. Ο θετικός σταθερός όρος αν και άνευ σημασίας υποδηλώνει ότι σε σχέση με την τοποθέτηση του ελατηρίου ώστε να έχει το φυσικό του μήκος με $s_1 = s_2 = 1$, βρισκόμαστε τώρα πιο βαθιά στο δυναμικό.]

(3) Οι πίνακες είναι

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = g\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$ βρίσκουμε $2g - \omega^4 = 0$, οπότε $\omega_{1,2}^2 = \pm\sqrt{2g}$, μία ευσταθής λύση με $\Xi_1 = (1, 1)^\top$ (ανεβοκατεβαίνουν μαζί τα 2 σώματα και το ελατήριο είναι οριζόντιο) και μία ασταθής $\Xi_2 = (1, -1)^\top$ (το ελατήριο γέρνει μια δεξιά και μια αριστερά).

Πρόβλημα Γ

(1) $H = p^2/2 + V(x)$:

$$1 = \frac{p^2}{2} + \frac{(|x| - 2)^2}{2}, \quad 1 = \frac{p^2}{2} + \frac{2 - x^2}{2}$$

Η πρώτη είναι εξίσωση κύκλων κεντραρισμένων στο $x = \pm 2$ και ακτίνας $\sqrt{2}$, ενώ η 2η απλοποιείται σε $p^2 = x^2 \Rightarrow p = \pm x$ (2 κάθετες ευθείες). Τα 3 σχήματα συνδέονται (συνεχώς) στο $x = \pm 1$. Το συνολικό διάγραμμα είναι σαν το ∞ . Στις 2 θηλιές του η φορά είναι ωρολογιακή.

(2) Η κίνηση που περιγράφεται από την 1η σχέση είναι αυτή ενός αρμονικού ταλαντωτή, ενώ η 2η (επί της ευθείας $p = -x$) είναι

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p = -x$$

με λύση $x(t) = e^{-t}$ αφού αρχικά (μετά την ταλάντωση) θα βρισκόμαστε στο $x = 1, p = -1$. Επομένως το 2ο κομμάτι της κίνησης (από $x = 1$ ως $0 < x(T) < 1$) θα διαρκέσει $t_2 = -\log(x(T))$. Όσο για το 1ο κομμάτι $x(t_1) = 2 + C \cos t_1 + S \sin t_1$ και $p(t_1) = -C \sin t_1 + S \cos t_1$ με αρχικές συνθήκες $C = -1$ και $S = 1$, οπότε λύνοντας για $x(t_1) = 1, p(t_1) = -1$ βρίσκουμε $t_1 = 3\pi/2$. Συνολικά $T = 3\pi/2 - \log(x(T))$.

(3)

$$\dot{V}(x) = \{V(x), H\} = \{V(x), p^2/2\} = [V'(x)p]_{(x_0, p_0)} = p_0(dV/dx)|_{x_0}$$

(4) Εξαιτίας του θεωρήματος Liouville το κυκλικό χωρίο θα εξελίχθει σε ένα ισεμβαδικό χωρίο. Η περιοχή έξω από την διαχωρίζουσα $H = 1$ θα τυλιχτεί ωρολογιακά γύρω από το ∞ , ενώ οι περιοχές ενός της διαχωρίζουσας θα τυλιχτούν εντός της εκάστοτε θηλειάς το καθένα. Το χωρίο θα παρουσιάζει συμμετρία κατοπτρισμού ως προς το $(0, 0)$. Οι περιοχές κοντά στην $p = -x$ θα πλησιάσουν πολύ το $(0, 0)$ και το χωρίο θα συμπιεστεί σε αυτή την κατεύθυνση.

Πρόβλημα Δ

(1) Η L μπορεί να «σπάσει» σε 2 ανεξάρτητες L_{12} και L_{34} . Επομένως μπορούμε να ψάξουμε για ανεξάρτητους μετασχηματισμούς-συμμετρίες.

Για την L_{34} η προφανής είναι $x_3 \rightarrow x_3 + \epsilon$, $x_4 \rightarrow x_4 + \epsilon$ ($K_3 = K_4 = 1$) που οδηγεί σε διατήρηση του $\dot{x}_3 + \dot{x}_4$.

(α) Για την L_{12} είναι $x_1 \rightarrow x_1 + \epsilon x_2$, $x_2 \rightarrow x_2 - \epsilon x_1$ (φαίνεται με απλή εφαρμογή) που οδηγεί σε διατήρηση του $-(x_1^2 + x_2^2)(\dot{x}_2 x_1 - \dot{x}_1 x_2)$.

(β) Μια άλλη διατήρηση της L_{12} είναι $x_1 \rightarrow x_1(1 + \epsilon)$, $x_2 \rightarrow x_2(1 - \epsilon)$ που αλλάζει την L_{12} σε 2η τάξη ως προς ϵ και οδηγεί σε διατήρηση του $-(x_1 x_2)(\dot{x}_2 x_1 - \dot{x}_1 x_2)$.

(γ) Μια άλλη διατήρηση της L_{12} είναι $x_1 \rightarrow x_1 + \epsilon x_2$, $x_2 \rightarrow x_2$ που δεν αλλάζει την L_{12} και οδηγεί σε διατήρηση του $-(x_2^2)(\dot{x}_2 x_1 - \dot{x}_1 x_2)$. Ομοίως διατηρείται και το $-(x_1^2)(\dot{x}_2 x_1 - \dot{x}_1 x_2)$.

(2) Όντας πολλαπλασιαστικές σταθερές στις 2 επί μέρους Λαγκρανζιανές δεν εισέρχονται στις εξισώσεις κίνησης και επομένως δεν καθορίζουν τίποτε.

(3) Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(l \frac{\partial l}{\partial \dot{x}_1}) &= l \frac{\partial l}{\partial x_1} \Rightarrow \dot{l}(-x_2) = l \dot{x}_2 \\ \frac{d}{dt}(l \frac{\partial l}{\partial \dot{x}_2}) &= l \frac{\partial l}{\partial x_2} \Rightarrow \dot{l}(x_1) = -l \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_3 &= -(x_3 - x_4) \\ \ddot{x}_4 &= (x_3 - x_4) \end{aligned}$$

Δοκιμάζοντας την υποτιθέμενη λύση βρίσκουμε $l = 0$ οπότε επαληθεύονται οι 2 πρώτες, ενώ οι 2 δεύτερες ισχύουν ταυτοτικά. Η συγκεκριμένη κεντρική κίνηση στον χώρο x_1, x_2 οδηγεί σε $l = 0$ και σύμφωνα με τη διατήρηση του 1(α) θα μπορούσε να εξαχθεί αυτή η κίνηση αυτομάτως από τη διατήρηση της ποσότητας $(x_1^2 + x_2^2)(\dot{x}_2 x_1 - \dot{x}_1 x_2) = 0$. Αυτή είναι και η μοναδική επιτρεπόμενη κίνηση στο επίπεδο x_1, x_2 αφού αν $l \neq 0$ θα πρέπει από 1(α) και 1(β) να διατηρείται και το $x_1^2 + x_2^2$ και το $x_1 x_2$ που οδηγεί σε x_1, x_2 σταθερά και εμπεριέχονται στην προηγούμενη λύση.

(4) Με πολ/στή Lagrange στην L_{34} :

$$L_{34} = a_{34}[\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 - (x_3 - x_4)^2] + \lambda(x_3 - x_4 - 1)$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} a_{34}\ddot{x}_3 &= -a_{34}(x_3 - x_4) + \lambda \\ a_{34}\ddot{x}_4 &= a_{34}(x_3 - x_4) - \lambda \\ x_3 &= x_4 + 1 \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας την τελευταία στις άλλες 2:

$$\begin{aligned} a_{34}\ddot{x}_3 &= -a_{34} + \lambda \\ a_{34}\ddot{x}_4 &= a_{34} - \lambda \end{aligned}$$

(1)

και αφαιρώντας τις ($\ddot{(x_3 - x_4)} = \ddot{1} = 0$):

$$0 = -2a_{34} + 2\lambda.$$

Επομένως $\lambda = a_{34}$. Οι δε δυνάμεις των δεσμών θα είναι $F_3 = \lambda \partial(x_3 - x_4 - 1)/\partial x_3 = \lambda = a_{34}$ και ομοίως $F_4 = -F_3$. Ο δεσμός καθιστά την άνευ νοήματος πολ/στική σταθερά a_{34} σημαντική. Από φυσικής ερμηνείας, η L_{34} περιγράφει 2 μάζες a_{34} που κινούνται σε μια ευθεία και συνδέονται με ελατήριο σταθερά a_{34} και μηδενικού φυσικού μήκους. Μόλις βάλουμε δεσμό που κρατά τα σωματίδια σε απόσταση 1 και επομένως το ελατήριο σε μήκος 1, η δύναμη του ελατηρίου κατά μέτρο είναι $k \cdot 1 = k = a_{34}$ (με αντίθετα πρόσημα στα 2 σώματα).