

## Κεφάλαιο 6

# Στροφές & Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας

*“Στο εξής ο χώρος και ο χρόνος ως ανεξάρτητες έννοιες είναι καταδικασμένοι να σβήσουν, καταντώντας απλές σκιές, και μόνο ένα είδος συνένωσής τους θα συνεχίσει να έχει μια ανεξάρτητη υπόσταση.”*

*Hermann Minkowski*

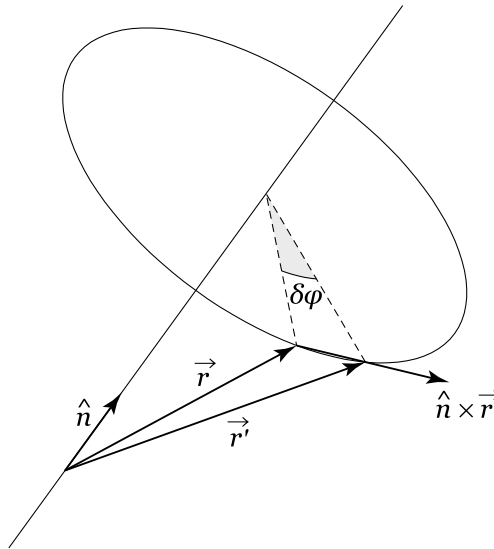
### 6.1 Απειροστές στροφές διανύσματος

Πολλές φορές παρουσιάζεται η ανάγκη να μελετήσουμε την επίδραση ενός μετασχηματισμού στροφής σε ένα φυσικό σύστημα, όπως για παράδειγμα όταν αναζητούμε τις κατά Noether αναλλοίωτες ποσότητες που υπαγορεύονται από τη συμμετρία των στροφών.<sup>1</sup> Σε τούτο το κεφάλαιο θα αρχίσουμε τη μελέτη μας, κατασκευάζοντας αρχικά το μετασχηματισμό μιας απειροστής στροφής.

Έστω ένα διάνυσμα  $\vec{r}$ , το οποίο θέλουμε να περιστρέψουμε κατά μία πολύ μικρή γωνία  $d\phi$  γύρω από έναν άξονα που έχει διεύθυνση  $\hat{n}$  και διέρχεται από την αρχή του διανύσματος  $\vec{r}$ . Η φορά περιστροφής καθορίζεται συμβατικά από την κατεύθυνση του  $\hat{n}$  μέσω του κανόνα του δεξιόστροφου κοχλίου ή του δεξιού χεριού. Το αρχικό διάνυσμα ύστερα από την περιστροφή του γύρω από τον άξονα  $\hat{n}$  μετατρέπεται στο διάνυσμα  $\vec{r}'$ , το οποίο έχει την ίδια αφετηρία με το  $\vec{r}$ , αλλά το άκρο του διαγράφει μια περιφέρεια κύκλου, το επίπεδο του οποίου είναι κάθετο στον άξονα  $\hat{n}$  (βλ. Σχήμα 6.1). Ο κύκλος αυτός έχει ακτίνα ίση με τη προβολή του  $\vec{r}$  πάνω στο κάθετο επίπεδο, δηλαδή  $|\hat{n} \times \vec{r}|$ , αφού το  $\hat{n}$  είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Επειδή η περιστροφή του διανύσματος  $\vec{r}$  είναι απειροστή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η στροφή αυτή επιτυγχάνεται, αν προσθέσουμε στο

Συστηματική  
κατασκευή  
απειροστής στροφής

<sup>1</sup>Στην κβαντομηχανική θεώρηση των φυσικών συστημάτων, όπου όλα τα κλασικά φυσικά μεγέθη εμφανίζονται ως τελεστές, η γνώση ενός τέτοιου μετασχηματισμού, ενός τελεστή δηλαδή που, επενεργώντας σε κυματοσυναρτήσεις, δίνει την καινούργια τους τιμή στη θέση που καθορίζεται από τη δράση της στροφής στο διάνυσμα της αρχικής θέσης, αποκτά ξεχωριστή σημασία.



Σχήμα 6.1: Στροφή του διανύσματος  $\vec{r}$  κατά απειροστή γωνία  $\delta\phi$  γύρω από τον άξονα  $\hat{n}$ . Η νέα θέση του διανύσματος είναι η  $\vec{r}'$ .

$\vec{r}'$  ένα διάνυσμα κατά μήκος του  $\hat{n} \times \vec{r}$ , δηλαδή ένα διάνυσμα που είναι κάθετο και στο  $\hat{n}$  και στο  $\vec{r}$ , με μήκος  $\delta\phi|\hat{n} \times \vec{r}|$ . Συνεπώς,

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\phi(\hat{n} \times \vec{r}). \quad (6.1)$$

Η παραπάνω σχέση προφανώς ισχύει μόνο για απειροστές στροφές και όχι για πεπερασμένες, αφού, αν ίσχυε, τότε το μέτρο του νέου διανύσματος δεν θα ήταν ίσο με εκείνο του αρχικού. Φυσικά μια πεπερασμένη στροφή μπορεί να επιτευχθεί με διαδοχικές απειροστές στροφές.

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 6.1.** Δείξτε ότι το μέτρο του  $\vec{r}'$  είναι ίσο με το μέτρο του  $\vec{r}$  σε πρώτη τάξη ως προς τη γωνία στροφής  $\delta\phi$ .

Οι απειροστές στροφές είναι διανύσματα

Ορίζοντας το απειροστό διάνυσμα

$$\vec{\delta n} \equiv \hat{n} \delta\phi,$$

καθορίζουμε πλήρως το μετασχηματισμό της στροφής. Αν εκτελέσουμε δύο διαδοχικές απειροστές στροφές, διαφορετικού μεγέθους και σε διαφορετικούς άξονες, για παράδειγμα  $\vec{\delta n}_1, \vec{\delta n}_2$ , το αρχικό διάνυσμα  $\vec{r}$  μετασχηματίζεται με τη πρώτη στροφή σε  $\vec{r}'$  και έπειτα με τη δεύτερη στροφή σε  $\vec{r}''$ , όπου

$$\begin{aligned} \vec{r}'' &= \vec{r}' + \vec{\delta n}_2 \times \vec{r}' \\ &= \left( \vec{r} + \vec{\delta n}_1 \times \vec{r} \right) + \vec{\delta n}_2 \times \left( \vec{r} + \vec{\delta n}_1 \times \vec{r} \right) \\ &= \vec{r} + (\vec{\delta n}_1 + \vec{\delta n}_2) \times \vec{r} + \mathcal{O}(\delta n^2). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι οι απειροστές στροφές συμπεριφέρονται ως διανύσματα, αφού δύο τέτοιες διαδοχικές στροφές επιτυγχάνονται μέσω του διανύσματος

$$\vec{\delta n}_{12} = \vec{\delta n}_1 + \vec{\delta n}_2 .$$

Ο όρος δεύτερης τάξης ως προς τα διανύσματα  $\vec{\delta n}$  είναι αμελητέος, αφού οι στροφές είναι απειροστές. Η σειρά μάλιστα με την οποία πραγματοποιούνται οι στροφές δεν έχει σημασία. Αυτά τα δύο χαρακτηριστικά γνωρίσματα των απειροστών στροφών, η διανυσματική συμπεριφορά και η μεταθετικότητα τους δεν επεκτείνονται στις πεπερασμένες στροφές, γεγονός το οποίο καθιστά πολύ πλούσιο το μενού των φαινομένων που αφορούν σε περιστροφές στερεών σωμάτων.

**Άσκηση 6.2.** Θεωρήστε έναν κύβο και εκτελέστε διαδοχικά τρεις ίσες απειροστές στροφές γύρω από τις τρεις ορθογώνιες ακμές του. Ποια είναι η μετατόπιση της κορυφής η οποία δρίζεται διαγωνίως της κορυφής όπου συναντώνται οι ακμές που όρισαν τους άξονες των στροφών; Γύρω από ποιον άξονα στρέφεται συνολικά ο κύβος;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Στη συνέχεια θα αναπαραστήσουμε υπό μορφή πίνακα το μετασχηματισμό μιας απειροστής στροφής. Γι' αυτόν το λόγο επαναδιατυπώνουμε τη σχέση (6.1) χρησιμοποιώντας δείκτες και φυσικά την αθροιστική σύμβαση ως

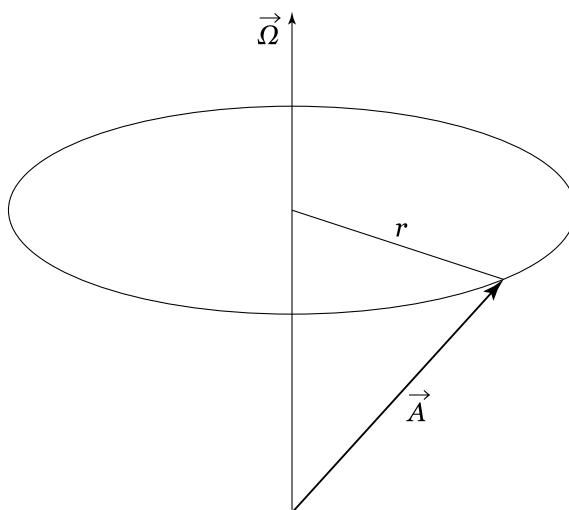
$$\begin{aligned} \vec{r}' &= r'_i \hat{e}_i \\ &= r_i \hat{e}_i + \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \delta\phi n_j r_k \\ &= \hat{e}_i (\delta_{ik} + \epsilon_{ijk} \delta\phi n_j) r_k , \end{aligned} \quad (6.3)$$

όπου  $\hat{e}_i$  τα μοναδιαία καρτεσιανά διανύσματα βάσης. Η απειροστή αυτή στροφή, λοιπόν, επιτυγχάνεται, αν πολλαπλασιάσουμε το αρχικό διάνυσμα, το οποίο ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε ως μονόστηλο πίνακα, με τον πίνακα

$$\mathbf{R}(\hat{n} \delta\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\phi n_3 & \delta\phi n_2 \\ \delta\phi n_3 & 1 & -\delta\phi n_1 \\ -\delta\phi n_2 & \delta\phi n_1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ο πίνακας μετασχηματισμού για μια απειροστή στροφή

Τέλος, τονίζουμε ότι τα όσα αναφέρθηκαν για το μετασχηματισμό στροφής ισχύουν όχι μόνο για τα διανύσματα θέσης αλλά και για κάθε άλλο διάνυσμα (ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη κλπ.), αφού ως διανύσματα ορίστηκαν οι τριάδες εκείνες των αριθμών που μετασχηματίζονται στις στροφές με τον ίδιο τρόπο που μετασχηματίζονται τα διανύσματα θέσης.



Σχήμα 6.2: Το διάνυσμα  $\vec{A}$  περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\vec{\Omega}$  διαγράφοντας κύκλο ακτίνας  $r$ .

## 6.2 Γωνιακή ταχύτητα

Από την απειροστή στροφή στη γωνιακή ταχύτητα

Όταν ένα διάνυσμα  $\vec{A}$  περιστρέφεται συνεχώς γύρω από τον άξονα  $\hat{n}$ , ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος είναι

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{A}' - \vec{A}}{\delta t} \\ &= \frac{d\phi}{dt} \hat{n} \times \vec{A} \\ &= \vec{\Omega} \times \vec{A}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

όπου

$$\vec{\Omega} \equiv \hat{n} \frac{d\phi}{dt},$$

είναι ένα διάνυσμα που ονομάζεται γωνιακή ταχύτητα και μετρά το ρυθμό περιστροφής του διανύσματος  $\vec{A}$ , ενώ η διεύθυνσή του καθορίζεται από τον άξονα γύρω από τον οποίο πραγματοποιείται η στροφή. Αξίζει να αναφέρουμε ότι το γεγονός ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι διάνυσμα οφείλεται στο διανυσματικό χαρακτήρα των απειροστών στροφών. Σημειώνουμε επίσης ότι, αν αναφερόμασταν σε ένα χώρο με περισσότερες από τρεις διαστάσεις, η γωνιακή ταχύτητα θα έπαινε να είναι διάνυσμα. Σκεφτείτε, για παράδειγμα, το πρόβλημα που θα αντιμετωπίζατε αν προσπαθούσατε να ορίσετε τον άξονα κάποιας στροφής σε ένα χώρο τεσσάρων διαστάσεων!

Σε αυτό το σημείο είναι εύκολο να δείξουμε ότι, αν ένα διάνυσμα μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{A},$$

με  $\vec{\Omega}$  κάποιο σταθερό διάνυσμα, τότε το άκρο του διανύσματος  $\vec{A}$  εκτελεί κυκλική κίνηση σε ένα επίπεδο κάθετο στο  $\vec{\Omega}$  (βλ. Σχήμα 6.2). Πράγματι

ισχύει

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d|\vec{A}|^2}{dt} &= \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{A} \\ &= (\vec{\Omega} \times \vec{A}) \cdot \vec{A} \\ &= 0\end{aligned}$$

και επομένως το μέτρο του  $\vec{A}$  είναι σταθερό. Επίσης

$$\begin{aligned}\frac{d(\vec{A} \cdot \vec{\Omega})}{dt} &= \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{\Omega} \\ &= (\vec{\Omega} \times \vec{A}) \cdot \vec{\Omega} \\ &= 0,\end{aligned}$$

και επομένως

$$\vec{A} \cdot \vec{\Omega} = \text{σταθερό}.$$

Το πρώτο συμπέρασμα δείχνει ότι το διάνυσμα  $\vec{A}$  κινείται στην επιφάνεια μιας σφαίρας, ενώ το δεύτερο αποδεικνύει ότι το διάνυσμα  $\vec{A}$  κείται σε ένα επίπεδο κάθετο στο  $\vec{\Omega}$ , αφού η προβολή του  $\vec{A}$  επί του  $\vec{\Omega}$  είναι σταθερή. Συνεπώς, το  $\vec{A}$  κινείται στην τομή μιας σφαίρας και ενός επιπέδου, δηλαδή επί της περιφέρειας ενός κύκλου. Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το διάνυσμα  $\vec{A}$  είναι

$$r = |\vec{A}| \sin(\widehat{\vec{A}\vec{\Omega}}) = \frac{|\vec{\Omega} \times \vec{A}|}{|\vec{\Omega}|},$$

ενώ ο ρυθμός με τον οποίο διαγράφεται η κυκλική αυτή τροχιά είναι σταθερός, αφού

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} &= (\vec{\Omega} \times \vec{A})^2 \\ &= r^2 \Omega^2 \\ &= \Omega^2 |\vec{A}|^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{A})^2.\end{aligned}$$

**Άσκηση 6.3.** Η οδογράφος είναι η καμπύλη που διαγράφει το άκρο του διανύσματος της ταχύτητας αν τα διανύσματα της ταχύτητας σχεδιαστούν να έχουν την ίδια αρχή. Προσδιορίστε την οδογράφο ενός φορτισμένου σωματιδίου που κινείται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### 6.3 Περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς

Πολλές φορές προβάλλει η ανάγκη να μελετήσουμε διάφορα φαινόμενα που παρατηρούνται από περιστρεφόμενα συστήματα, όπως αυτά που συμβαίνουν στην περιστρεφόμενη Γη. Σε αυτές τις περιπτώσεις ενδείκνυται η ανάλυση των φαινομένων αυτών στα πλαίσια του περιστρεφόμενου συστήματος αναφοράς. Επειδή οι μετρήσεις που πραγματοποιούμε αφορούν στις ταχύτητες και στις επιταχύνσεις στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς και επειδή οι νόμοι του Νεύτωνα ισχύουν μόνο σε αδρανειακά συστήματα, για να διατυπώσουμε τους δυναμικούς νόμους στο περιστρεφόμενο σύστημα, πρέπει να μεταφράσουμε τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις από το αδρανειακό στο περιστρεφόμενο σύστημα.

Έστω, λοιπόν,  $\hat{e}_i$  με  $i = 1, 2, 3$  μια ορθοκανονική βάση του περιστρεφόμενου συστήματος, η οποία περιστρέφεται μαζί με το σύστημα αυτό. Αν  $\vec{\Omega}$  είναι η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα του περιστρεφόμενου συστήματος, τότε τα διανύσματα βάσης του περιστρεφόμενου συστήματος, όπως και όλα τα διανύσματα σταθερού μέτρου, μεταβάλλονται σύμφωνα με τον αδρανειακό παρατηρητή βάσει του νόμου

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{e}_i . \quad (6.5)$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τώρα την εξέλιξη ενός διανυσματικού μεγέθους  $\vec{A}(t)$  στο περιστρεφόμενο και στο αδρανειακό σύστημα. Αν αναλύσουμε το διανυσματικό μέγεθος  $\vec{A}(t)$  στο περιστρεφόμενο σύστημα, θα έχουμε

$$\vec{A}(t) = A_i(t)\hat{e}_i ,$$

όπου  $A_i(t)$  είναι οι στιγμιαίες συνιστώσες του διανύσματος στη δεδομένη αυτή βάση. Σε αυτό το σύστημα η βάση είναι σταθερή και ως εκ τούτου δεν έχει καμία χρονική εξάρτηση· επομένως ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος στο περιστρεφόμενο σύστημα είναι

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\Pi} = \frac{dA_i}{dt} \hat{e}_i , \quad (6.6)$$

όπου ο δείκτης “Π” σημαίνει ότι η ανάλυση έχει γίνει στο περιστρεφόμενο σύστημα.

Αν υπολογίζαμε το ρυθμό αυτό στο αδρανειακό σύστημα, θα έπρεπε να λάβουμε υπόψη μας τη στροφή των διανυσμάτων βάσης. Έτσι για το αδρανειακό σύστημα, το οποίο θα συμβολίζουμε με τον δείκτη “Α”, ο ρυθμός αυτός, χρησιμοποιώντας την (6.5), θα είναι

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_A &= \frac{dA_i}{dt} \hat{e}_i + A_i \left. \frac{d\hat{e}_i}{dt} \right|_A \\ &= \frac{dA_i}{dt} \hat{e}_i + A_i (\vec{\Omega} \times \hat{e}_i) \\ &= \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\Pi} + \vec{\Omega} \times \vec{A} . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Βάσει της σχέσης (6.7) μπορούμε να διατυπώσουμε την ακόλουθη σχέση διαφορικών τελεστών που δρουν σε διανύσματα, όταν μεταβαίνουμε από ένα περιστρεφόμενο σε ένα αδρανειακό σύστημα:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_A = \left. \frac{d}{dt} \right|_{\Pi} + \vec{\Omega} \times . \quad (6.8)$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση αυτή για να συγκρίνουμε τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις που υπολογίζει ένας παρατηρητής που βρίσκεται σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, όπως αυτό της Γης, το οποίο έχει ως αρχή του το κέντρο της Γης και περιστρέφεται με τη γωνιακή ταχύτητα  $\vec{\Omega}$  της Γης, με τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις που υπολογίζει ένας παρατηρητής σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, όπως αυτό που έχει αρχή το κέντρο της Γης και είναι ακίνητο ως προς τους μακρινούς αστέρες. Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα θέσης είναι τα ίδια και στα δύο συστήματα αναφοράς, είτε αυτά μετρώνται στο ένα σύστημα, είτε στο άλλο, παρόλο που οι συνιστώσες τους είναι, εν γένει, διαφορετικές στα δύο συστήματα. Εάν ο παρατηρητής που βρίσκεται στην περιστρεφόμενη Γη υπολογίζει ότι κάποιο σωματίδιο που βρίσκεται στη θέση  $\vec{r}$  έχει ταχύτητα  $\vec{v}_{\Pi}$ , ο αδρανειακός παρατηρητής που βρίσκεται στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς θα πρέπει να μετράει ταχύτητα  $\vec{v}_A$  που δίνεται από τη σχέση

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{\Pi} + \vec{\Omega} \times \vec{r}. \quad (6.9)$$

Για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης που εκτιμούν οι δύο παρατηρητές χρειάζεται λίγο περισσότερη προσοχή. Η επιτάχυνση που υπολογίζει ο αδρανειακός παρατηρητής είναι

$$\left. \frac{d\vec{v}_A}{dt} \right|_A,$$

ενώ η επιτάχυνση που υπολογίζει ο παρατηρητής που βρίσκεται στη περιστρεφόμενη Γη είναι

$$\left. \frac{d\vec{v}_{\Pi}}{dt} \right|_{\Pi}.$$

Η σχέση μεταξύ των δύο ποσοτήτων δεν είναι άμεση. Αν χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα (6.8) παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \vec{a}_A &= \left. \frac{d\vec{v}_A}{dt} \right|_A \\ &= \left. \frac{d\vec{v}_A}{dt} \right|_{\Pi} + \vec{\Omega} \times \vec{v}_A \\ &= \left. \frac{d(\vec{v}_{\Pi} + \vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} \right|_{\Pi} + \vec{\Omega} \times (\vec{v}_{\Pi} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \left. \frac{d\vec{v}_{\Pi}}{dt} \right|_{\Pi} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\Pi} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \vec{a}_{\Pi} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\Pi} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Σχέση ρυθμού μεταβολής διανύσματος σε αδρανειακά και περιστρεφόμενα συστήματα

Η επιτάχυνση ενός σωματιδίου που κινείται επάνω στη Γη

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 6.4.** Δείξτε ότι, αν η γωνιακή ταχύτητα  $\vec{\Omega}$  δεν είναι σταθερή, τότε οι επιταχύνσεις στα δύο συστήματα (στο περιστρεφόμενο σύστημα και το αδρανειακό σύστημα) συνδέονται σύμφωνα με τη σχέση

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{\Pi} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\Pi} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}(\vec{\Omega} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{\Omega}) \times \vec{r}, \quad (6.11)$$

όπου  $\vec{\omega}$  είναι η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα με την οποία περιστρέφεται ο άξονας της γωνιακής ταχύτητας  $\vec{\Omega}$ . Οι δύο νέοι όροι που εμφανίζονται στην παραπάνω σχέση είναι η επιτάχυνση που οφείλεται στη γωνιακή επιτάχυνση του περιστρεφόμενου συστήματος και η μεταπτωτική επιτάχυνση αντίστοιχα.

Σύγκριση της επιτάχυνσης Coriolis με την κεντρομόλο επιτάχυνση

Ενώ ο όρος που συνδέει τις δύο ταχύτητες στα δύο συστήματα, μέσω της σχέσης (6.9), είναι διαισθητικά προφανής,<sup>2</sup> οι δύο αντίστοιχοι όροι που συνδέουν τις επιταχύνσεις, μέσω της σχέσης (6.10), δεν είναι τόσο προφανείς. Ο δεύτερος όρος  $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$  είναι η γνωστή μας κεντρομόλος επιτάχυνση, που μας είναι περισσότερο οικεία ως φυγόκεντρος επιτάχυνση με αντίθετο πρόσημο, αφού την αισθανόμαστε, όταν επιδιαίνουμε σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα, όπως για παράδειγμα σε ένα αυτοκίνητο που στρίβει. Ο όρος  $2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\Pi}$ , η επονομαζόμενη επιτάχυνση Coriolis,<sup>3</sup> αν και δεν είναι τόσο συνδεδεμένος με την καθημερινή μας εμπειρία, είναι υπεύθυνος για τη δημιουργία των κυκλωνικών και αντικυκλωνικών κινήσεων των αέριων μαζών της ατμόσφαιρας που με τη σειρά τους προκαλούν τα διάφορα καιρικά φαινόμενα.

Ενώ η επιτάχυνση Coriolis αντιστρέφεται, αν αντιστραφεί η γωνιακή ταχύτητα, η κεντρομόλος επιτάχυνση δεν αλλάζει φορά, αλλά κατευθύνεται πάντοτε προς τον άξονα περιστροφής εξαιτίας της ύπαρξης του όρου  $\vec{\Omega}$  εις διπλούν. Ο λόγος που η επιτάχυνση Coriolis δεν είναι τόσο έκδηλη στην καθημερινή μας ζωή, όσο είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση, είναι ότι οι κινήσεις στο περιστρεφόμενο σύστημα είναι συνήθως πολύ πιο αργές από την περιστροφική κίνηση του ίδιου του συστήματος.<sup>4</sup> Όπως μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει, τα μέτρα των δύο επιταχύνσεων έχουν λόγο τάξης

$$a_{\text{Cor}}/a_{\text{κεντρ}} \sim (\Omega v)/(\Omega^2 r) \sim v/(\Omega r) \sim v/v_{\text{περ}}, \quad (6.12)$$

όπου  $v$  η ταχύτητα του σώματος στο περιστρεφόμενο σύστημα και  $v_{\text{περ}}$  η ταχύτητα περιστροφής του συστήματος όπως φαίνεται από το μη περιστρεφόμενο σύστημα.

<sup>2</sup>Ο όρος αυτός μετρά τη γραμμική ταχύτητα με την οποία κινείται ως προς το αδρανειακό σύστημα το σημείο του περιστρεφόμενου συστήματος στο οποίο βρέθηκε στιγμιαία το κινούμενο σωματίδιο.

<sup>3</sup>Ο Gustav-Gaspard Coriolis [1792-1843], γάλλος φυσικομαθηματικός και μηχανικός, ήταν ο πρώτος που μελέτησε τις μη αδρανειακές δυνάμεις σε περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς.

<sup>4</sup>Ίσως αναρωτηθείτε για ποιο λόγο είναι τότε τόσο σημαντική η δύναμη Coriolis στη δημιουργία καιρικών φαινομένων; Θα δούμε παρακάτω ότι η φυγόκεντρος δύναμη εξισορροπείται από τη βαρυτική δύναμη και δεν έχει δυναμική σημασία στη διαμόρφωση του καιρού.

Είμαστε, τώρα, σε θέση να διατυπώσουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Η δύναμη που αποδίδει ένας περιστρεφόμενος παρατηρητής σε ένα κινούμενο σωματίδιο στο οποίο επιδρά η δύναμη  $\vec{F}$  είναι

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{περ}} &= m\vec{a}_{\text{περ}} \\ &= m(\vec{a}_{\text{αδρ}} - \vec{a}_{\text{Cor}} - \vec{a}_{\text{κεντρ}}) \\ &= \vec{F} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}).\end{aligned}\quad (6.13)$$

Ο περιστρεφόμενος παρατηρητής πρέπει να εισαγάγει πέραν της εξωτερικής δύναμης  $\vec{F}$  δύο ψευδο-δυνάμεις, τη δύναμη Coriolis  $-2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$  και τη φυγόκεντρο δύναμη  $-m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ , για να διατυπώσει το δυναμικό νόμο εξέλιξης του σωματιδίου στο περιστρεφόμενο σύστημα.

## 6.4 Φυγόκεντρος δύναμη και δύναμη Coriolis

Η φυγόκεντρος δύναμη

Περί της φυγόκεντρος

$$\vec{F}_{\text{φυγ}} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από δυναμική ενέργεια της μορφής

$$V_{\text{φυγ}}(\vec{r}) = -\frac{m}{2}\Omega^2\rho^2, \quad (6.14)$$

όπου  $\rho$  είναι η κάθετη απόσταση της θέσης του σωματιδίου από τον άξονα περιστροφής του συστήματος. Η απόδειξη ότι

$$-m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\vec{\nabla}V_{\text{φυγ}}(\vec{r}),$$

είναι εύκολη, αν καταφύγει κανείς σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(\rho, \theta, z)$ , με άξονα  $z$  τον άξονα περιστροφής, και δείξει ότι

$$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\Omega^2\vec{\rho}.$$

Το  $\vec{\rho}$  είναι η προβολή του διανύσματος  $\vec{r}$  στο επίπεδο το κάθετο στον άξονα  $z$  (βλ. Σχήμα 6.3).

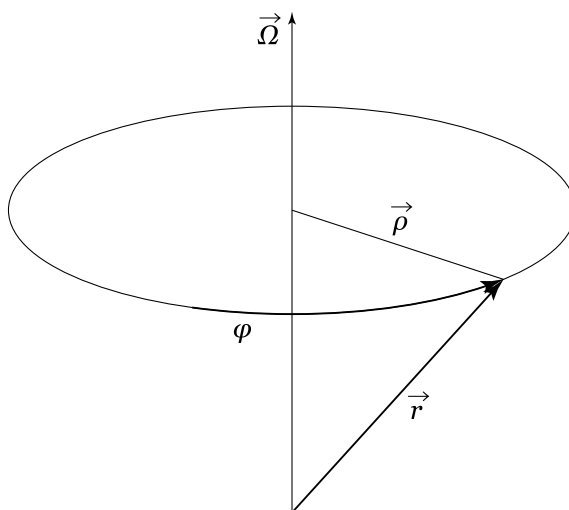
Όταν εκτελούμε πειράματα στο εργαστήριο με στόχο να προσδιορίσουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας αυτό που τελικά μετράμε δεν είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας  $\vec{g}$ , αλλά η επιτάχυνση

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}),$$

όπου  $\vec{\Omega}$  είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης. Η διόρθωση αυτή είναι της τάξεως των  $34 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$  στην επιφάνεια της Γης.<sup>5</sup> Το φυγόκεντρικό δυναμικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιοριστεί το γεωει-

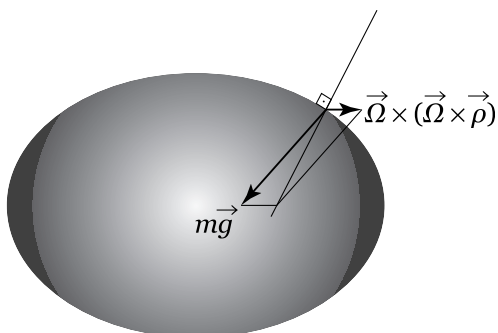
Προσδιορισμός του σχήματος της Γης

<sup>5</sup>Η τιμή αυτή αντιστοιχεί στη φυγόκεντρο επιτάχυνση στον Ισημερινό της Γης. Σε άλλα σημεία της Γης η τιμή αυτή αλλάζει λόγω διαφορετικής απόστασης των σημείων από τον άξονα της Γης.



Σχήμα 6.3: Σημειώνονται τα διανύσματα  $\vec{r}$  και  $\vec{\rho}$  σε σχέση με τον άξονα περιστροφής που καθορίζεται από το διάνυσμα  $\vec{\Omega}$ .

δές, το σχήμα δηλαδή που είχε αποκτήσει η επιφάνεια της Γης εξαιτίας της περιστροφής της στα πρώτα στάδια της γέννησής της, όταν ήταν ακόμη ρευστή, και το οποίο διατήρησε και ύστερα από την ψύξη της.<sup>6</sup> Ο προσδιορισμός αυτός επιτυγχάνεται, αν απαιτήσουμε το άθροισμα του βαρυτικού και του φυγοκεντρικού δυναμικού επάνω στην επιφάνεια της Γης να είναι σταθερό. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε σημείο της επιφάνειάς της η κάθετος έχει τη διεύθυνση της  $\vec{g}'$  (βλ. Σχήμα 6.4). Αν η επιφάνεια της Γης δεν ήταν μια ισοδυναμική επιφάνεια, αν δηλαδή το άθροισμα του βαρυτικού και του φυγοκεντρικού δυναμικού δεν ήταν σταθερό στην επιφάνεια της Γης, δεν θα υπήρχε ισορροπία και η ρευστή επιφάνειά της θα μεταβαλλόταν στην προσπάθειά της να αποκτήσει αυτό το σχήμα· τα θαλάσσια ύδατα θα έρρεαν προς χαμηλότερα δυναμικά, ενώ το ίδιο θα συνέβαινε και με τα χερσαία εδάφη μέσω πλαστικής παραμόρφωσής τους, με αποτέλεσμα την αλλαγή του σχήματος της επιφάνειας της Γης.



Σχήμα 6.4: Το σχήμα της Γης είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια. Η κάθετος σε αυτή την επιφάνεια έχει τη διεύθυνση της συνισταμένης της βαρυτικής και της φυγοκέντρου δύναμης.

<sup>6</sup>Ο ίδιος ο Νεύτωνας επιχείρησε να προσδιορίσει το πεπλατυσμένο σχήμα της Γης, το οποίο μετρήθηκε πολλά χρόνια αργότερα από τους Maupertuis και Clairaut με γεωδαιτικές μετρήσεις στη Λαπωνία.

**Άσκηση 6.5.** Εάν η Γη, παρά τη περιστροφική της κίνηση, είχε σφαιρικό σχήμα με τι επιτάχυνση θα κινούταν ένα σώμα στην επιφάνειά της προς τον Ισημερινό λόγω της φυγοκέντρου δύναμης; (Θεωρήστε ότι το σώμα ολισθαίνει στην επιφάνεια δίχως τριβές.) Με τι ταχύτητα θα έφτανε το σώμα στον Ισημερινό αν ήταν αρχικά ακίνητο κοντά σε κάποιον Πόλο; Σε πόσο χρόνο θα έφτανε στον Ισημερινό;

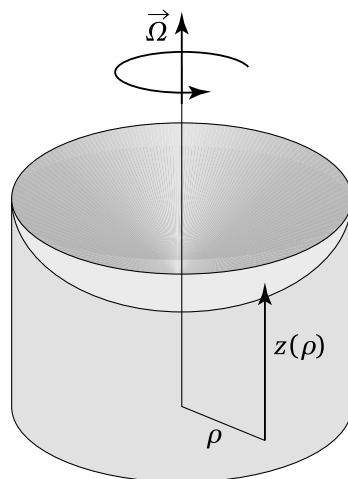
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μπορούμε ακόμη να εκμεταλλευτούμε το φυγοκεντρικό δυναμικό για να κατασκευάσουμε παραβολικά κατόπτρα τηλεσκοπίων μεγάλου μεγέθους. Η τεχνική είναι η ακόλουθη: γεμίζουμε ένα δοχείο που βρίσκεται σε περιβάλλον υψηλής θερμοκρασίας με γυαλί σε υγρή μορφή. Θέτουμε το δοχείο με το ρευστό γυαλί σε περιστροφική κίνηση. Καθώς το δοχείο περιστρέφεται, η επιφάνεια του γυαλιού που βρίσκεται μέσα σε αυτό αποκτά σχήμα του οποίου το συνολικό βαρυτικό και φυγοκεντρικό δυναμικό είναι σταθερό. Αν  $z(\rho)$  είναι το ύψος της επιφάνειας του ρευστού γυαλιού σε απόσταση  $\rho$  από τον άξονα περιστροφής, θα ισχύει

Κατασκευή παραβολικών κατόπτρων

$$g z(\rho) - \frac{1}{2} \Omega^2 \rho^2 = \text{σταθ} ,$$

δηλαδή το ρευστό γυαλί μέσα στο δοχείο θα αποκτήσει το σχήμα παραβολοειδούς. Για την κατασκευή του κατόπτρου αρκεί στη συνέχεια να μειώσουμε τη θερμοκρασία ώστε να στερεοποιηθεί το γυαλί στο επιθυμητό σχήμα.



Σχήμα 6.5: Το υγρό μέσα σε ένα δοχείο που περιστρέφεται αποκτά παραβολική επιφάνεια εξαιτίας της φυγοκέντρου δύναμης. Η επιφάνεια του υγρού είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια αντίστοιχη με την επιφάνεια ενός περιστρεφόμενου ρευστού πλανήτη.

Για να κατανοήσουμε τη δύναμη Coriolis, ας εξετάσουμε την ακόλουθη κίνηση, όπως αυτή περιγράφεται σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα: ένα σωματίδιο κινείται ακτινικά με σταθερή ταχύτητα  $v$ , απομακρυνόμενο από τον άξονα περιστροφής του. Στο αδρανειακό σύστημα το σωματίδιο

Περί της δύναμης Coriolis

ακολουθεί μια σπειροειδή τροχιά και όσο περισσότερο απομακρύνεται από τον άξονα περιστροφής τόσο αυξάνεται η περιστροφική του ταχύτητα  $\Omega r$ . Αντιλαμβανόμαστε ότι, για να συμβαίνει κάτι τέτοιο, θα πρέπει να ασκείται στο σωματίδιο μια δύναμη  $\vec{F}$ , η οποία έχει συνεχώς αζιμουθιακή κατεύθυνση. Από την άλλη πλευρά ο περιστρεφόμενος παρατηρητής στην προσπάθεια του να δικαιολογήσει την ευθύγραμμη κίνηση που παρατηρεί θα πρέπει να υποθέσει ότι στο σωματίδιο ασκείται μια ίση και αντίθετη δύναμη  $\vec{F} = -\vec{F}_{\text{Cor}}$ . Αυτή ακριβώς η υποθετική δύναμη είναι η δύναμη Coriolis, η οποία σύμφωνα με την ανάλυσή μας αλλάζει φορά, αν αλλάξει φορά η γωνιακή ταχύτητα. Το μέτρο αυτής της δύναμης μπορούμε εύκολα να το υπολογίσουμε, αν σκεφτούμε ότι μια δύναμη σαν την  $\vec{F}$  ασκεί ροπή  $\vec{\tau}$  που προκαλεί μεταβολή της στροφορμής,  $\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{\Omega} \times \vec{r})$ , του σωματιδίου. Έτσι,

$$\begin{aligned} |\vec{F}_{\text{Cor}}| &= |\vec{F}| = \frac{|\vec{\tau}|}{r} \\ &= \frac{1}{r} \frac{dL}{dt} \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(m\Omega r^2) \\ &= 2m\Omega \frac{dr}{dt} = 2m\Omega v, \end{aligned} \quad (6.15)$$

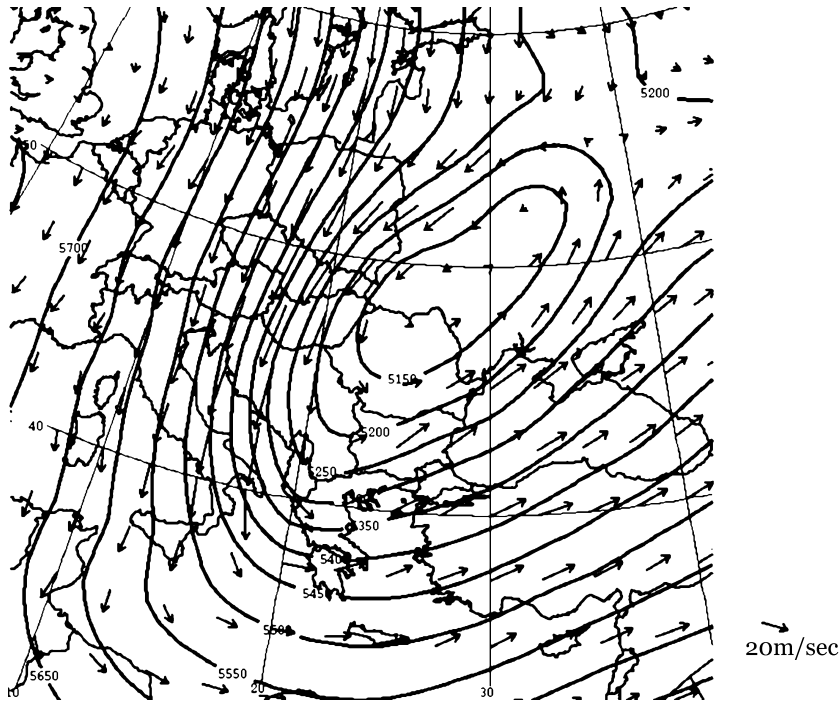
που είναι η συνιστώσα της δύναμης Coriolis που προβλέπεται από την (6.13).

Όπως προαναφέραμε η δύναμη Coriolis παίζει ουσιαστικό ρόλο στην κίνηση των αέριων και υδάτινων μαζών στον πλανήτη μας. Αν στην ατμόσφαιρα ενός μη περιστρεφόμενου πλανήτη αναπτυχθεί διαφορά πίεσης μεταξύ δύο περιοχών, η διαφορά αυτή θα εξομαλυνθεί ταχύτατα. Αν, όμως, ο πλανήτης περιστρέφεται, τότε μπορεί η διαφορά πίεσης να συντηρηθεί επ' άπειρον. Εξαιτίας της δύναμης Coriolis η οποία είναι κάθετη στην κίνηση της ατμόσφαιρας και έχει φορά προς τα δεξιά της κίνησης (στο βόρειο ημισφαίριο), η μετακίνηση αέριων ρευμάτων από υψηλά προς χαμηλά βαρομετρικά συστήματα ακολουθεί στροβιλώδη κίνηση (βλ. Σχήμα 6.6) με αποτέλεσμα τα βαρομετρικά συστήματα να ικανοποιούν με μεγάλη ακρίβεια τη συνθήκη γεωστροφικής ισορροπίας<sup>7</sup>

$$2\rho \vec{\Omega} \times \vec{v} = -\vec{\nabla} p,$$

όπου  $\vec{v}$  είναι η ταχύτητα του ατμοσφαιρικού ρευστού,  $\vec{\Omega}$  η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης,  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού, και  $-\vec{\nabla} p$  η δύναμη που προκαλείται από διαφορές της πίεσης και η οποία έχει διεύθυνση από

<sup>7</sup>Η γεωστροφική ισορροπία είναι δυνατή αν τηρούνται κάποιες προϋποθέσεις: αν η τριβή είναι αμελητέα και ο αριθμός Rossby  $R_o = U/L\Omega$  είναι μικρός, όπου  $U$  είναι το χαρακτηριστικό μέγεθος των ταχυτήτων των αέριων μαζών που παρατηρεί ένας παρατηρητής, ο οποίος περιστρέφεται μαζί με τον πλανήτη και  $L$  η χαρακτηριστική κλίμακα μήκους μεταβολής των ταχυτήτων. Για την κυκλοφορία στα μεσαία πλάτη της Γης αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται με αρκετά καλή προσέγγιση. Για παράδειγμα είναι  $U \approx 20$  m/s,  $L \approx 10^6$  m, και  $\Omega = 10^{-4}$  s<sup>-1</sup>, οπότε ο αριθμός Rossby είναι  $R_o = 0.2$ .



Σχήμα 6.6: Ο κυκλώνας της 13ης Φεβρουαρίου του 2004, ο οποίος προκάλεσε τις χαμηλότερες θερμοκρασίες των τελευταίων δεκαετιών σε πολλά μέρη της χώρας μας. Στο χάρτη σημειώνονται οι παρατηρούμενες τιμές του διανυσματικού πεδίου των ταχυτήτων επί της επιφάνειας σταθερής πίεσης 500 mb. Ο άνεμος είναι, σε πολύ καλή προσέγγιση, παράλληλος στις ισοϋψείς καμπύλες της επιφάνειας αυτής. Στη μετεωρολογία είναι συνηθής πρακτική να παρουσιάζονται τα πεδία ταχυτήτων επί επιφανειών σταθερής πίεσης, διότι επί των επιφανειών σταθερής πίεσης η συνιστώσα της δύναμης από την πίεση είναι μηδενική και η μόνη δύναμη που ασκείται στο ρευστό ανά μονάδα όγκου είναι η συνιστώσα της βαρύτητας επί της επιφάνειας σταθερής πίεσης  $-\rho g \vec{\nabla} z|_p$ , όπου  $z$  το ύψος σε κάθε σημείο της επιφάνειας σταθερής πίεσης  $p = p_e$  και  $\vec{\nabla} z|_p$  η κλίση της επιφάνειας αυτής. Επειδή η δύναμη Coriolis ανά μονάδα όγκου του ρευστού είναι ίση με  $2\rho \vec{\Omega} \times \vec{v}$  η γεωστροφική ισορροπία απαιτεί το πεδίο ταχυτήτων να ικανοποιεί την εξίσωση  $2\rho \vec{\Omega} \times \vec{v} = -\rho g \vec{\nabla} z|_p$ . Η σχέση αυτή της γεωστροφικής ισορροπίας συνεπάγεται ότι το διάνυσμα της ταχύτητας είναι παράλληλο στις ισοϋψείς της επιφάνειας σταθερής πίεσης, αφού από την εξίσωση αυτή συνάγεται ότι  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} z|_p = 0$ . Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι επίσης ανάλογο της κλίσης των ισοϋψών και συνεπώς η ταχύτητα του ανέμου είναι μεγαλύτερη στις περιοχές όπου η πυκνότητα των ισοϋψών είναι μεγάλη. Η παρουσίαση αυτή είναι συνηθής στη μετεωρολογία διότι, αν σχεδιαζόταν η ταχύτητα του ανέμου σε επιφάνειες σταθερού ύψους, αντί σε επιφάνειες σταθερής πίεσης, η γεωστροφική ισορροπία θα ήταν  $2\rho \vec{\Omega} \times \vec{v} = -\vec{\nabla} p|_z$  και η ταχύτητα, ενώ θα ήταν παράλληλη στις καμπύλες ίσης πίεσης, δεν θα ήταν ευθέως ανάλογη της βαθμίδας της πίεσης διότι, η γεωστροφική αυτή σχέση εξαρτάται από την πυκνότητα, η οποία μειώνεται σχεδόν εκθετικά με το ύψος.

υψηλές πιέσεις προς χαμηλές πιέσεις.<sup>8</sup> Λόγω της γεωστροφικής ισορροπίας η ατμοσφαιρική κυκλοφορία χαρακτηρίζεται από τις συνεκτικές δομές των κυκλώνων οι οποίοι συντηρούνται για αρκετά μεγάλα χρονικά διαστήματα, από τέσσερις έως επτά ημέρες· ουσιαστικά, όσο χρόνο δηλαδή χρειάζεται η τριβή με το έδαφος για να τους διαλύσει. Η παρουσία τέτοιων συνεκτικών δομών που αποτελούνται από χαμηλά και υψηλά βαρομετρικά συστήματα καθορίζει αυτό που αποκαλούμε καιρό, ενώ οι δομές αυτές αποτελούν τα κύρια συστατικά του κλίματος. Η μελέτη της κλίματος είναι στην ουσία η μελέτη της στατιστικής συμπεριφοράς των κυκλωνικών αυτών κινήσεων. Αν η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης ήταν πολύ μικρότερη, οι οποιοσδήποτε διακυμάνσεις της ατμοσφαιρικής πίεσης θα εξαφανίζονταν σε διάστημα μερικών ωρών<sup>9</sup> και ο καιρός θα ήταν εξαιρετικά πιο σταθερός. Επίσης εξαιτίας της δύναμης Coriolis είναι δυνατή η ύπαρξη διαφοράς θερμοκρασίας μεταξύ Ισημερινού και Πόλων. Αυτό ισχύει διότι, αν η Γη δεν περιστρεφόταν, η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ Ισημερινού και Πόλων, η οποία επιβάλλεται λόγω διαφοράς απορρόφησης της ηλιακής ακτινοβολίας και ανέρχεται στους 100° C περίπου, θα εξαλειφόταν ταχύτατα με διαταραχές που διαδίδονται σχεδόν με τη ταχύτητα του ήχου, όπως ακριβώς διαδίδονται οι διαταραχές της επιφάνειας του νερού μέσα σε μία λεκάνη όταν τη μετακινήσουμε. Η ατμοσφαιρική κυκλοφορία που δημιουργείται εξαιτίας της δύναμης Coriolis συντηρεί τελικά στη Γη τη διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ του Ισημερινού και των Πόλων στους 40° C. Αντιθέτως, στον πλανήτη Αφροδίτη, ο οποίος περιστρέφεται πολύ αργά γύρω από τον άξονά του, η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ του Ισημερινού και των Πόλων είναι μηδαμινή.

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 6.6.** *Ενώ ένας κυκλώνας διέρχεται από μία περιοχή, πραγματοποιούνται συγχρόνως επίγειες βαρομετρικές μετρήσεις σε δύο τοποθεσίες που βρίσκονται σε απόσταση 1000 km η μία από την άλλη. Η μία μέτρηση δίνει 980 mb και η άλλη 1000 mb. Υπολογίστε την οριζόντια δύναμη που προκαλείται από τη βαθμίδα της πίεσης και εκτιμήστε την ταχύτητα του ανέμου που απαιτείται για να εξισορροπήσει η δύναμη Coriolis τη δύναμη αυτή στο γεωγραφικό πλάτος των 45°. Δίνεται ότι 1 mb = 100 Nt/m<sup>2</sup>.*

<sup>8</sup>Η πίεση σε ένα ρευστό είναι η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας που δρα κάθετα σε κάθε επιφάνεια (νοητή ή πραγματική) του ρευστού. Εάν η πίεση είναι ομοιόμορφη, οι δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας του ρευστού βρίσκονται σε ισορροπία και η ολική δύναμη που ασκείται σε ένα στοιχείο του ρευστού είναι μηδενική. Αν, τώρα, θεωρήσουμε ένα κλειστό στοιχείο του ρευστού, όγκου  $V$ , η συνολική δύναμη που ασκείται από την πίεση στο στοιχείο αυτό είναι  $\vec{F} = -\int_S p \hat{n} dS$ , όπου  $S$  η εξωτερική κλειστή επιφάνεια του στοιχείου και  $\hat{n}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια που έχει κατεύθυνση προς το εξωτερικό της επιφάνειας. Από το θεώρημα του Gauss βρίσκουμε ότι η συνολική δύναμη που ασκείται στο στοιχείο είναι  $\vec{F} = -\int_V \vec{\nabla} p dV$ . Συνεπώς, η ολική δύναμη που ασκείται σε έναν απειροστό όγκο εξαιτίας της πίεσης, ανά μονάδα όγκου του ρευστού, είναι  $-\vec{\nabla} p$ .

<sup>9</sup>Αποδεικνύεται ότι σε αυτή την περίπτωση η ταχύτητα εξομάλυνσης της πίεσης είναι σχεδόν ίση με την ταχύτητα του ήχου, παρότι η εξομάλυνση αυτή δεν επιτυγχάνεται με ηχητικά κύματα αλλά με εσωτερικά κύματα βαρύτητας που διαδίδονται με ταχύτητα  $c \approx \sqrt{gH}$  όπου  $H \approx 10 \text{ km}$  το ύψος της τροπόσφαιρας.

Γενικά η δύναμη Coriolis που ασκείται σε ένα σώμα, εξαιτίας της περιστροφής της Γης, είναι, όπως είδαμε, μικρότερη σε μέτρο από τη φυγόκεντρο δύναμη που ασκείται σε αυτό κατά έναν παράγοντα της τάξης του

$$\frac{2v}{\Omega R} = \frac{v}{233 \text{ m/s}}.$$

Η φυγόκεντρος δύναμη, όμως, όπως ήδη εξηγήσαμε, εξισορροπείται από τη βαρυντική έλξη, καθορίζοντας έτσι το γεωειδές σχήμα της ατμόσφαιρας και οι ατμοσφαιρικές κινήσεις περιορίζονται κυρίως στις ισοδυναμικές επιφάνειες, οπότε η δύναμη Coriolis που δρα στο εφαπτόμενο επίπεδο του γεωειδούς είναι η δύναμη που κυριαρχεί στη διαμόρφωση των ατμοσφαιρικών κινήσεων.

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι η δύναμη Coriolis ήταν αυτή που προπάθησε να εκμεταλλευτεί ο Νεύτων για να αποδείξει ότι η Γη περιστρέφεται. Συγκεκριμένα, υπολόγισε την εκτροπή ενός σωματιδίου από την κατακόρυφο πορεία που ακολουθεί, όταν πέφτει ελεύθερα μέσα σε ένα βαθύ πηγάδι. Το πείραμα επιχείρησε ο σύγχρονος του Νεύτωνα, βρετανός φυσικός Hooke, ρίχνοντας μικρές σφαίρες μέσα σε ένα πηγάδι λατομείου. Δυστυχώς, όμως, μια υπολογιστική παγίδα που κρύβει η λύση αυτού του προβλήματος (βλ. Πρόβλημα 7) τον οδήγησε σε εσφαλμένο αποτέλεσμα, το οποίο έτσι κι αλλιώς υπερέβαινε τα πειραματικά σφάλματα μέτρησης εκείνης της εποχής.<sup>10</sup> Σήμερα η παρεκτροπή στην κίνηση των βλημάτων εξαιτίας της δύναμης Coriolis λαμβάνεται πολύ σοβαρά υπόψη στη σύγχρονη βαλλιστική. Προφανώς, στο Νότιο ημισφαίριο η δράση της δύναμης Coriolis είναι αντίθετη από τη δράση της δύναμης αυτής στο Βόρειο ημισφαίριο.

## 6.5 Κατασκευή της Λαγκρανζιανής σε περιστρεφόμενο σύστημα

Έχοντας αναλύσει σε νευτώνειο πλαίσιο πώς διαμορφώνονται οι δυνάμεις όταν μεταβαίνουμε από ένα αδρανειακό σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, θα κατασκευάσουμε στη συνέχεια τη δυναμική εξίσωση κίνησης ενός σωματιδίου σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα (ουσιαστικά θα κατασκευάσουμε πάλι τη σχέση (6.13)) ακολουθώντας αυτή τη φορά λαγκρανζιανό φορμαλισμό. Όπως έχουμε ήδη δείξει, οι εξισώσεις Euler - Lagrange ισχύουν σε όλα τα συστήματα αναφοράς –αδρανειακά ή μη– δεδομένου ότι οι εξισώσεις Euler - Lagrange είναι αναλλοίωτες σε σημειακούς μετασχηματισμούς. Στην περίπτωση μας ο εν λόγω σημειακός

Η Λαγκρανζιανή σωματιδίου για περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς

<sup>10</sup>Αδιαμφισβήτητη απόδειξη για την κίνηση της Γης δόθηκε μόλις το 1838 από το γερμανό αστρονόμο Friedrich Wilhelm Bessel [1784-1846], ο οποίος κατόρθωσε να υπολογίσει την παράλλαξη του αστέρα 61 Cygnus (υπολόγισε ότι η παράλλαξη ήταν 0.314", ενώ η σημερινή εκτίμηση για την παράλλαξη του εν λόγω αστέρα είναι 0.292"). Ένα από τα επιχειρήματα των Αριστοτελικών φιλοσόφων για την ακινησία της Γης ήταν ότι δεν είχε παρατηρηθεί καμία παράλλαξη των αστέρων και επομένως δεν μπορούσε να γίνει δεκτή καμία αναθεώρηση της Κοσμολογίας.

μετασηματισμός είναι αυτός που αντιστοιχίζει τα σημεία του αδρανειακού στα σημεία του περιστρεφόμενου συστήματος. Έχουμε λοιπόν

$$\vec{r}_A \rightarrow \vec{r}_\Pi = \vec{r}_A = \vec{r}$$

οπότε και

$$\dot{\vec{r}}_A \rightarrow \dot{\vec{r}}_\Pi + \vec{\Omega} \times \vec{r}.$$

Η Λαγκρανζιανή, επομένως, ενός σωματιδίου στο περιστρεφόμενο σύστημα θα είναι

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m \left( \vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right)^2 - V(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2}m \left( \vec{v}^2 + 2(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{v} + (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 \right) - V(\vec{r}), \end{aligned} \quad (6.16)$$

όπου  $\vec{v}$  η ταχύτητα του σωματιδίου στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Στις παραγωγίσεις των εξισώσεων Euler-Lagrange θα βοηθήσει η διανυσματική ταυτότητα

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Έτσι,

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m(\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r}),$$

και

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m \left( \vec{v} \times \vec{\Omega} + (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} \right) - \vec{\nabla} V(\vec{r}).$$

Στην τελευταία παραγωγή του τετραγώνου του εξωτερικού γινομένου χρησιμοποιήθηκε η προαναφερθείσα ταυτότητα εις διπλούν, μια φορά για το κάθε εξωτερικό γινόμενο. Η δυναμική εξίσωση, λοιπόν, λαμβάνει τη μορφή

$$m\dot{\vec{v}} + m\vec{\Omega} \times \vec{v} - m \left( \vec{v} \times \vec{\Omega} + (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} \right) + \vec{\nabla} V(\vec{r}) = 0$$

και επομένως

$$m\dot{\vec{v}} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) - m \left( 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \right). \quad (6.17)$$

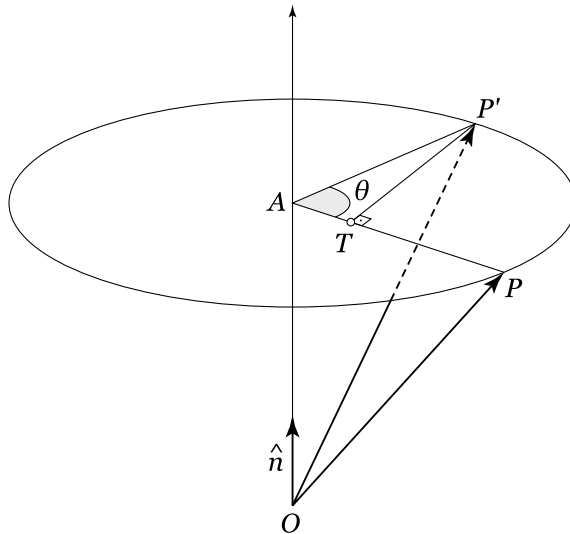
Αξίζει να σημειώσουμε την ομοιότητα της Λαγκρανζιανής της σχέσης (6.16) και της Λαγκρανζιανής φορτισμένου σωματιδίου σε μαγνητικό πεδίο, τουλάχιστον όσον αφορά στον όρο

$$m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{v}.$$

Οι υπόλοιποι όροι, σε αντίθεση με τον εν λόγω όρο, έχουν την κλασική μορφή των όρων κινητικής και δυναμικής ενέργειας.

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 6.7.** Κατασκευάστε την αναλογία μεταξύ των όρων της Λαγκρανζιανής ενός φορτισμένου σωματιδίου σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και ενός σωματιδίου σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Υποθέστε ότι γνωρίζετε επακριβώς την τροχιά ενός φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές μαγνητικό  $\vec{B}(\vec{r})$  και ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}(\vec{r})$ . Σε ποιο περιστρεφόμενο σύστημα και σε ποιο πεδίο δύναμης η κίνηση των σωματιδίων θα ήταν ακριβώς η ίδια;



Σχήμα 6.7: Το διάνυσμα  $\vec{OP}$  περιστρέφεται κατά μία πεπερασμένη γωνία  $\theta$  γύρω από τον άξονα  $OA$ . Η νέα θέση του διανύσματος είναι η  $OP'$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα περιστροφής είναι το  $\hat{n}$ . Το διάνυσμα  $\vec{OA}$  είναι η προβολή του διανύσματος  $\vec{OP}$  στον άξονα περιστροφής, οπότε το διάνυσμα  $\vec{OA}$  και το διάνυσμα  $\vec{AP}$  είναι κάθετα μεταξύ τους. Το  $\vec{TP}'$  είναι κάθετο στο  $\vec{AP}$ . Το  $\vec{AP}$  έχει μέτρο  $|\vec{AP}| = |\hat{n} \times \vec{OP}|$ , το οποίο είναι ίσο με το  $|\vec{AP}'|$ . Επομένως,  $|\vec{TP}'| = |\hat{n} \times \vec{OP}| \sin \theta$ .

## 6.6 Πεπερασμένες στροφές

Ας εξετάσουμε, τώρα, πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε τη δράση μιας μη απειροστής στροφής γύρω από κάποιον άξονα  $\hat{n}$ . Θέλουμε να στρέψουμε το διάνυσμα  $\vec{r} = \vec{OP}$  κατά γωνία  $\theta$  γύρω από τον άξονα  $OA$  που χαρακτηρίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{n}$  (βλ. Σχήμα 6.7). Η νέα θέση του διανύσματος  $\vec{r}' = \vec{OP}'$  θα είναι

Συστηματική κατασκευή μιας πεπερασμένης στροφής

$$\begin{aligned} \vec{OP}' &= \vec{OA} + \vec{AT} + \vec{TP}' \\ &= (\vec{r} \cdot \hat{n})\hat{n} + [\vec{r} - (\vec{r} \cdot \hat{n})\hat{n}] \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{r}) \sin \theta. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Προσέξτε ότι το διάνυσμα

$$\vec{AP} = \vec{r} - (\vec{r} \cdot \hat{n})\hat{n},$$

και το διάνυσμα

$$\hat{n} \times \vec{r},$$

που έχει τη διεύθυνση του  $\vec{TP}'$ , έχουν το ίδιο μέτρο –πρόκειται για την ακτίνα περιστροφής του άκρου του διανύσματος– αλλά κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις. Αλλάζοντας τη σειρά των όρων στην (6.18), μπορούμε να γράψουμε το τελικό στραμμένο διάνυσμα στη μορφή

$$\vec{r}' = \vec{r} \cos \theta + (\vec{r} \cdot \hat{n})\hat{n}(1 - \cos \theta) + (\hat{n} \times \vec{r}) \sin \theta. \quad (6.19)$$

Αν εφαρμόσουμε τη σχέση αυτή για απειροστές γωνίες, δηλαδή διατηρώντας στην (6.19) μόνο όρους πρώτης τάξης ως προς τη γωνία στροφής,

θέτοντας  $\cos \delta\theta = 1$  και  $\sin \delta\theta = \delta\theta$ , επιστρέφουμε στη σχέση (6.1) που γράψαμε για τις απειροστές στροφές.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 6.8.** Δείξτε ότι πράγματι η σχέση (6.19) για απειροστές γωνίες  $\delta\theta$  καταλήγει στη σχέση (6.1). Επιβεβαιώστε επίσης ότι η σχέση (6.19) ικανοποιεί τη βασική ιδιότητα των στροφών, δηλαδή ότι  $|\vec{r}'| = |\vec{r}|$ .

Ο πίνακας  
μετασχηματισμού  
πεπερασμένης στροφής

Όπως διαπιστώνει κανείς από τη σχέση (6.19), η στροφή γύρω από κάποιον άξονα είναι γραμμική ως προς το διάνυσμα  $\vec{r}$  και επομένως μπορεί να γραφεί ως ένας πίνακας που δρα στο διάνυσμα. Η μορφή αυτού του πίνακα καθορίζεται με απλό τρόπο, αν εκφράσουμε την (6.19) ως σχέση συντεταγμένων, χρησιμοποιώντας δείκτες

$$\begin{aligned} r'_i &= r_i \cos \theta + (n_j r_j) n_i (1 - \cos \theta) + \epsilon_{ikj} n_k r_j \sin \theta \\ &\equiv R_{ij}(\theta, \hat{n}) r_j, \end{aligned} \quad (6.20)$$

όπου  $\mathbf{R}(\theta, \hat{n})$  ο πίνακας με στοιχεία

$$R_{ij}(\theta, \hat{n}) = \delta_{ij} \cos \theta + n_i n_j (1 - \cos \theta) + \epsilon_{ikj} n_k \sin \theta, \quad (6.21)$$

που δρώντας σε ένα διάνυσμα το αναγκάζει να στραφεί γύρω από την κατεύθυνση  $\hat{n}$  κατά γωνία  $\theta$ . Μια στροφή, λοιπόν, προσδιορίζεται πλήρως από τον πίνακα  $\mathbf{R}(\theta, \hat{n})$ .

## 6.7 Οι στροφές ως ορθογώνιοι μετασχηματισμοί

Ο πίνακας των  
στροφών είναι  
ορθογώνιος

Επειδή οι στροφές αφήνουν αναλλοίωτο το μέτρο των διανυσμάτων, ο πίνακας της στροφής είναι ένας ορθογώνιος πίνακας. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: το μέτρο του μετασχηματισμένου διανύσματος  $r'_i$

$$r'_i r'_i = R_{ik} r_k R_{il} r_l = r_k (R^T)_{ki} R_{il} r_l, \quad (6.22)$$

όπου το  $^T$  συμβολίζει τον ανάστροφο πίνακα, πρέπει να ισούται με το μέτρο  $r_i r_i$  του αρχικού διανύσματος για κάθε διάνυσμα  $r_i$ . Για να ισχύει αυτό θα πρέπει ο πίνακας  $\mathbf{R}$  να ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \quad (6.23)$$

δηλαδή ο πίνακας στροφής πρέπει να είναι ορθογώνιος.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 6.9.** Επιλέγοντας κατάλληλα διανύσματα  $r_i$ , δείξτε ότι αν η (6.22) ισχύει για κάθε διάνυσμα  $r_i$ , ο πίνακας στροφής πρέπει να ικανοποιεί την (6.23), δηλαδή ο πίνακας στροφής πρέπει να είναι ορθογώνιος πίνακας.

**Άσκηση 6.10.** Επιβεβαιώστε ότι ο πίνακας (6.21) είναι πράγματι ορθογώνιος.

**Άσκηση 6.11.** Επιβεβαιώστε ότι ο πίνακας μετασχηματισμού των στροφών (6.21) έχει ορίζουσα +1.

Ισχύει όμως και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε ορθογώνιος  $3 \times 3$  πίνακας με ορίζουσα +1 είναι πίνακας στροφής. Οι ορθογώνιοι πίνακες, όμως, έχουν γενικά ορίζουσα  $\pm 1$ , διότι, δεδομένων των ιδιοτήτων των οριζουσών

$$\det(\mathbf{R}^T) = \det(\mathbf{R}) \text{ και } \det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$$

(βλ. Μαθηματικό Παράρτημα), από την (6.23) βρίσκουμε ότι

$$(\det(\mathbf{R}))^2 = \det(\mathbf{I}) = 1 .$$

Οι στροφές, όπως διαπιστώσαμε, είναι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί οι οποίοι έχουν ορίζουσα πάντα ίση με +1. Τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς με ορίζουσα -1 δεν μπορούμε, λοιπόν, να τους αντιστοιχίσουμε σε στροφές. Αυτοί οι μετασχηματισμοί είναι σύνθεση ενός *κατοπτρισμού*, δηλαδή του μετασχηματισμού  $\vec{r}' = -\vec{r}$  που αντιστοιχεί στον πίνακα μετασχηματισμού

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

και μίας στροφής. Ο κατοπτρισμός οποιουδήποτε διανύσματος  $\vec{r}' = -\vec{r}$  δεν μπορεί να επιτευχθεί με μία στροφή,<sup>11</sup> διότι η ορίζουσα του κατοπτρισμού είναι -1, ενώ η ορίζουσα της οποιασδήποτε στροφής είναι +1.

Για να προσδιορίσουμε για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό με ορίζουσα +1 τη στροφή που του αντιστοιχεί θεωρούμε τον τυχαίο ορθογώνιο μετασχηματισμό

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

και προσδιορίζουμε τις ιδιοτιμές του  $\lambda$ , δηλαδή τις τιμές για τις οποίες ισχύει

$$\mathbf{A}\hat{e} = \lambda\hat{e}, \quad (6.24)$$

<sup>11</sup> Ίσως σκεφτείτε ότι η αναστροφή ενός διανύσματος μπορεί να επιτευχθεί με μια στροφή κατά  $\pi$  γύρω από έναν άξονα κάθετο στο διάνυσμα. Όμως η στροφή αυτή σχετίζεται με το συγκεκριμένο διάνυσμα και αν εφαρμοστεί σε κάποιο άλλο διάνυσμα δεν θα το αναστρέψει κατ' ανάγκην. Για παράδειγμα, η στροφή αυτή θα αφήσει ίδιο ένα διάνυσμα που είναι κάθετο στο αρχικό διάνυσμα και παράλληλο στον άξονα στροφής. Αξίζει επίσης να παρατηρήσουμε ότι ο κατοπτρισμός σε δύο διαστάσεις δεν είναι ο  $\vec{r}' = -\vec{r}$ , ο οποίος είναι καθαρή στροφή, αλλά ο  $(x', y') = (-x, y)$  ή ο  $(x', y') = (x, -y)$  που προκαλεί ανάκλαση του αρχικού διανύσματος ως προς τον άξονα  $y$  ή  $x$  αντίστοιχα. Έτσι ο γενικός κανόνας είναι ότι κατοπτρισμό σε οποιεσδήποτε διαστάσεις πετυχαίνουμε κάθε φορά που το πλήθος των -1 στα διαγώνια στοιχεία του πίνακα μετασχηματισμού είναι περιττό.

Ένας ορθογώνιος πίνακας με ορίζουσα +1 είναι πίνακας στροφής

Κατοπτρισμός

όπου  $\hat{e}$  τα ιδιοανύσματα του  $\mathbf{A}$ . Οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του τριτοβάθμιου πολυωνύμου

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 ,$$

που προκύπτει από τη συνθήκη ύπαρξης μη τετριμμένης λύσης της (6.24)

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Οι τρεις ιδιοτιμές που προκύπτουν αφενός θα έχουν την ιδιότητα

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det(\mathbf{A}) = 1 ,$$

επειδή το γινόμενο των ιδιοτιμών ισούται με την ορίζουσα του πίνακα, και αφετέρου η κάθε μία από αυτές θα έχει αναγκαστικά μέτρο +1

$$\lambda\lambda^* = 1 ,$$

όπου το  $*$  συμβολίζει το μιγαδικό συζυγές. Η τελευταία αυτή ιδιότητα ισχύει επειδή το μέτρο των διανυσμάτων παραμένει αναλλοίωτο σε ένα ορθογώνιο μετασχηματισμό, οπότε

$$|\hat{e}| = |\mathbf{A}\hat{e}| = |\lambda\hat{e}| ,$$

που συνεπάγεται ότι  $|\lambda| = 1$ . Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα μπορεί βέβαια να είναι μιγαδικά οπότε το μέτρο ενός μιγαδικού διανύσματος λαμβάνεται ως

$$|\hat{e}|^2 = \hat{e}_i^* \hat{e}_i ,$$

όπου  $\hat{e}_i, \hat{e}_i^*$  είναι οι συνιστώσες και οι συζυγείς συνιστώσες του  $\hat{e}$  αντίστοιχα. Τέλος, επειδή οι ιδιοτιμές προκύπτουν ως ρίζες ενός πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές, αν μία ιδιοτιμή είναι μιγαδική, η συζυγής της θα είναι και αυτή ιδιοτιμή. Σε αυτή την περίπτωση, λαμβάνοντας το συζυγές της εξίσωσης (6.24), επειδή ο πίνακας  $\mathbf{A}$  έχει ληφθεί πραγματικός, συνάγουμε ότι

$$\mathbf{A}\hat{e}^* = \lambda^*\hat{e}^* ,$$

οπότε και το  $\hat{e}^*$  είναι ιδιοάνυσμα του  $\mathbf{A}$ .

Ύστερα από αυτές τις παρατηρήσεις προκύπτει ότι αναγκαστικά οι ιδιοτιμές ενός γενικού ορθογώνιου μετασχηματισμού είναι οι

$$1, e^{i\theta}, e^{-i\theta} .$$

Οι  $e^{i\theta}$  επελέγησαν διότι έχουν μοναδιαίο μέτρο. Ειδική μορφή του μετασχηματισμού προκύπτει για  $\theta = 0$ , όπου όλες οι ιδιοτιμές είναι μοναδιαίες, και  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$  αφού τότε κάθε διάνυσμα μετασχηματίζεται στον εαυτό του ( $\vec{r}' = \vec{r}$ ). Μια άλλη ειδική περίπτωση έχουμε όταν  $\theta = \pi$ , όπου οι ιδιοτιμές είναι οι 1, -1, -1, και λαμβάνουμε στροφή γύρω από τον άξονα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1 κατά γωνία  $\theta = \pi$ .

Μπορούμε τώρα να συσχετίσουμε το γενικό ορθογώνιο μετασχηματισμό  $\mathbf{A}$  με κάποιο πίνακα στροφής (6.21). Το ιδιοάνυσμα που αντιστοιχεί

στην ιδιοτιμή 1 είναι η διεύθυνση στροφής  $\hat{n}$ . Μετασχηματίζουμε τον πίνακα  $\mathbf{A}$  σε ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο ο πρώτος άξονας μετασχηματίζεται στον άξονα  $\hat{n}$  και οι άλλοι δύο άξονες στα μοναδιαία πραγματικά διανύσματα  $\hat{u}$  και  $\hat{v} = \hat{n} \times \hat{u}$  έτσι ώστε τα  $\hat{n}$ ,  $\hat{u}$  και  $\hat{v}$  να σχηματίζουν μία ορθοκανονική βάση. Αν σχηματίσουμε τον πίνακα

$$\mathbf{U} = [\hat{n}, \hat{u}, \hat{v}]$$

που έχει ως στήλες τα στοιχεία των αντίστοιχων διανυσμάτων, ο πίνακας αυτός  $\mathbf{U}$  είναι ορθογώνιος και επομένως, ο πίνακας  $\mathbf{A}' = \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U}$  παραμένει ορθογώνιος και έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον  $\mathbf{A}$ : συνεπώς έχει το ίδιο ίχνος και την ίδια ορίζουσα. Επειδή το ίχνος ενός πίνακα ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών του (βλ. Μαθηματικό Παράρτημα), το ίχνος του πίνακα  $\mathbf{A}'$  είναι

$$\text{trace}(\mathbf{A}') = \text{trace}(\mathbf{A}) = 1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 1 + 2 \cos \theta ,$$

το οποίο ισούται με το ίχνος του (6.21), υπό την προϋπόθεση ότι η  $\theta$  αναπαριστά τη γωνία στροφής του μετασχηματισμού στροφής. Συνεπώς η γωνία στροφής είναι

$$\cos \theta = \frac{\text{trace}(\mathbf{A}) - 1}{2}$$

και ο ορθογώνιος πίνακας  $\mathbf{A}'$  λαμβάνει τη μορφή

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix} .$$

Ο υποπίνακας τώρα

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

πρέπει να είναι και αυτός ορθογώνιος με μοναδιαία ορίζουσα και, όπως θα δούμε αναλυτικά στο εδάφιο 6.11, έχει αναγκαστικά τη μορφή

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} ,$$

που αποτελεί τον πίνακα στροφής στο επίπεδο το κάθετο στον πρώτο άξονα κατά γωνία  $\theta$ .

**Άσκηση 6.12.** Δείξτε ότι, εάν ο  $\mathbf{A}'$  είναι ορθογώνιος με μοναδιαία ορίζουσα, τότε και ο υποπίνακας  $\mathbf{O}$  πρέπει να είναι ορθογώνιος με μοναδιαία ορίζουσα. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## 6.8 Οι στροφές σχηματίζουν μια μη μεταθετική ομάδα

Εάν μετά από κάποια στροφή  $\mathbf{R}(\hat{n}_1, \theta_1)$  ακολουθήσει μια άλλη στροφή ως προς έναν άλλο, εν γένει, άξονα  $\mathbf{R}(\hat{n}_2, \theta_2)$ , τότε ο συνολικός μετασχηματισμός θα παράγεται από το γινόμενο των πινάκων

$$\mathbf{R}(\hat{n}_2, \theta_2)\mathbf{R}(\hat{n}_1, \theta_1) .$$

Εκτελώντας τις πράξεις μεταξύ των στοιχείων των δύο πινάκων, δεν είναι προφανές τι μετασχηματισμός προκύπτει. Το γεγονός, όμως, ότι κάθε φορά που δρα ένας τέτοιος πίνακας αφήνει αναλλοίωτο το μέτρο του διανύσματος μάς υποδεικνύει ότι το γινόμενο δύο στροφών πρέπει να είναι και πάλι στροφή, δηλαδή υπάρχει πάντοτε κάποια κατεύθυνση  $\hat{n}_3$  ως προς την οποία αν στραφεί ένα οποιοδήποτε διάνυσμα κατά μια συγκεκριμένη γωνία  $\theta_3$ , θα καταλήξει στην ίδια θέση που θα κατέληγε αν ακολουθούσε τη διαδοχή των δύο προηγούμενων στροφών. Η βεβαιότητά μας όσον αφορά στην ισχύ της παραπάνω πρότασης προκύπτει από το γεγονός ότι το γινόμενο δύο στροφών είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός και, όπως δείξαμε στο προηγούμενο εδάφιο, κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός μοναδιαίας ορίζουσας είναι στροφή. Το σύνολο των στροφών, λοιπόν, είναι κλειστό στην πράξη της σύνθεσης ή ισοδυνάμως στην πράξη του πολλαπλασιασμού των αντίστοιχων πινάκων.

Ταυτόχρονα, αφού το γινόμενο δύο στροφών κατά γωνίες  $\theta$  και  $-\theta$  αντίστοιχα γύρω από κάποιο κοινό άξονα (ή ισοδύναμα κατά ίσες γωνίες γύρω από αντίθετες κατευθύνσεις  $\pm\hat{n}$ ) παράγει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό, δηλαδή, αφού

$$\mathbf{R}(\theta, \hat{n})\mathbf{R}(-\theta, \hat{n}) = \mathbf{I} ,$$

ο αντίστροφος πίνακας μιας στροφής  $\mathbf{R}^{-1}(\theta, \hat{n})$  είναι και αυτός μία στροφή και συγκεκριμένα είναι η στροφή κατά την αντίθετη γωνία, δηλαδή

$$\mathbf{R}^{-1}(\theta, \hat{n}) = \mathbf{R}(-\theta, \hat{n}) = \mathbf{R}(\theta, -\hat{n}) .$$

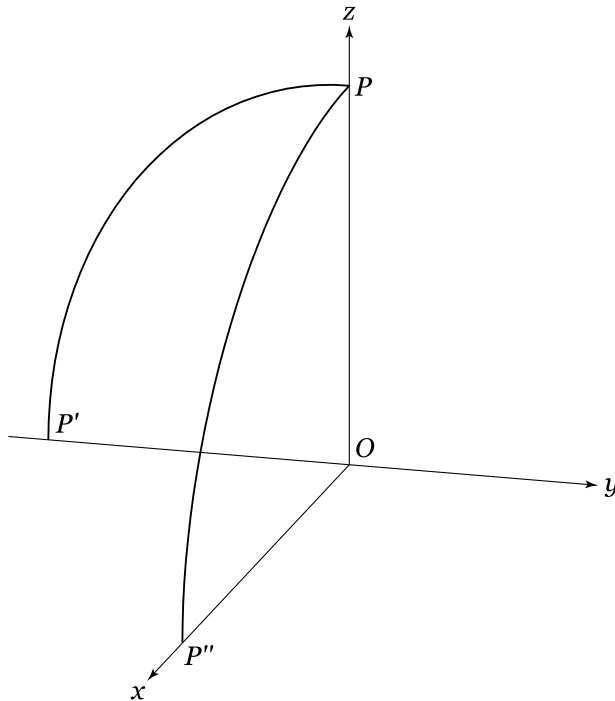
Για κάθε πίνακα, λοιπόν, στροφής υπάρχει ο αντίστροφός του πίνακας, ο οποίος είναι και αυτός πίνακας στροφής.

Οι στροφές αποτελούν ομάδα

Συνεπώς, το σύνολο των στροφών σχηματίζει μια ομάδα, την επονομαζόμενη ομάδα  $SO(3)$ . Το γράμμα  $O$  (orthogonal) δηλώνει τον ορθογώνιο χαρακτήρα των στροφών που διατηρεί αναλλοίωτο το μέτρο των διανυσμάτων, ενώ το γράμμα  $S$  (special) το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των πινάκων των στροφών, ότι δηλαδή έχουν ορίζουσα  $+1$ , ενώ τέλος το  $3$  αναφέρεται στις διαστάσεις του χώρου μέσα στον οποίο εκτελούνται οι στροφές.

Οι στροφές δεν μετατίθενται

Το ιδιαίτερο και ταυτόχρονα εντυπωσιακό χαρακτηριστικό των στροφών είναι ότι δύο στροφές που εκτελούνται γύρω από διαφορετικούς άξονες δεν καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα, αν αλλάξει η σειρά με την οποία



Σχήμα 6.8: Οι στροφές γύρω από τους άξονες  $x$  και  $y$  κατά γωνία  $\theta = \pi/2$  δεν μετατίθενται.

αυτές εκτελούνται. Επομένως, οι στροφές δεν λειτουργούν ως διανύσματα. Οι στροφές δεν μετατίθενται, όπως λέγεται στη γλώσσα των μαθηματικών. Συμβολικά, αν  $\mathbf{R}(\theta_1, \hat{n}_1)$  και  $\mathbf{R}(\theta_2, \hat{n}_2)$  είναι δύο στροφές γύρω από διαφορετικούς άξονες τότε

$$\mathbf{R}(\theta_1, \hat{n}_1)\mathbf{R}(\theta_2, \hat{n}_2) \neq \mathbf{R}(\theta_2, \hat{n}_2)\mathbf{R}(\theta_1, \hat{n}_1) .$$

Ή, με κάπως διαφορετικό συμβολισμό, ο μεταθέτης δύο στροφών

$$[\mathbf{R}(\theta_1, \hat{n}_1), \mathbf{R}(\theta_2, \hat{n}_2)] \equiv \mathbf{R}(\theta_1, \hat{n}_1)\mathbf{R}(\theta_2, \hat{n}_2) - \mathbf{R}(\theta_2, \hat{n}_2)\mathbf{R}(\theta_1, \hat{n}_1) , \quad (6.25)$$

δεν είναι μηδενικός. Το συμπέρασμα είναι ότι, όταν συνθέτουμε στροφές, θα πρέπει να προσέχουμε τη σειρά με την οποία αυτές πραγματοποιούνται.

Για να πειστείτε για τη μη μεταθετικότητα των στροφών, αρκεί να θεωρήσετε το απλούστατο παράδειγμα του Σχήματος 6.8 στο οποίο έχει σχεδιαστεί η δράση της στροφής του μοναδιαίου διάνυσματος  $\vec{OP} = \hat{z}$  γύρω από τον άξονα  $x$  κατά γωνία  $\pi/2$  και γύρω από τον άξονα  $y$  κατά γωνία  $\pi/2$ . Η δράση της σύνθεσης

$$\mathbf{R}(\pi/2, \hat{y})\mathbf{R}(\pi/2, \hat{x})$$

μετασχηματίζει το  $\vec{OP}$  στο

$$\vec{OP}' = -\hat{y} ,$$

διότι η στροφή  $\mathbf{R}(\pi/2, \hat{x})$  στρέφει το  $\hat{z}$  στο  $-\hat{y}$  και η στροφή που ακολουθεί

$$\mathbf{R}(\pi/2, \hat{y})$$

το αφήνει στη ίδια θέση. Η σύνθεση, όμως,

$$\mathbf{R}(\pi/2, \hat{x})\mathbf{R}(\pi/2, \hat{y})$$

μετασχηματίζει το  $\vec{OP}$  στο

$$\vec{OP}'' = \hat{x},$$

διότι η στροφή

$$\mathbf{R}(\pi/2, \hat{y})$$

στρέφει το  $\hat{z}$  στο  $\hat{x}$  και η  $\mathbf{R}(\pi/2, \hat{x})$  το αφήνει στην ίδια θέση. Είναι εμφανές ότι το αποτέλεσμα της σύνθεσης στροφών εξαρτάται από τη σειρά που ακολουθήθηκε. Αυτό θα φανεί σαφέστερα στο εδάφιο που ακολουθεί, όπου θα προσπαθήσουμε να εμβαθύνουμε περισσότερο στη δομή των στροφών.

Παρ' όλα αυτά οι στροφές που πραγματοποιούνται γύρω από έναν κοινό άξονα μετατίθενται. Σε αυτή την περίπτωση δύο διαδοχικές στροφές κατά γωνίες  $\theta_1$  και  $\theta_2$  αντίστοιχα είναι ισοδύναμες με μία στροφή κατά  $\theta_1 + \theta_2$  όπως θα περίμενε κανείς, εφόσον και οι δύο πραγματοποιούνται γύρω από τον ίδιο άξονα.

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 6.13.** Στροφές που έχουν κοινό άξονα περιστροφής μετατίθενται. Δείξτε μέσω της (6.19) και των ιδιοτήτων που γνωρίζετε για το γινόμενο δύο  $\epsilon_{ijk}$  (βλ. Μαθηματικό Παράρτημα) ότι

$$\mathbf{R}(\theta_1, \hat{n})\mathbf{R}(\theta_2, \hat{n}) = \mathbf{R}(\theta_2, \hat{n})\mathbf{R}(\theta_1, \hat{n}) = \mathbf{R}(\theta_1 + \theta_2, \hat{n}).$$

**Άσκηση 6.14.** Γράψτε τα στοιχεία των πινάκων  $\mathbf{R}(\pi/2, \hat{x})$  και  $\mathbf{R}(\pi/2, \hat{y})$  και με απευθείας υπολογισμό του γινομένου των πινάκων δείξτε ότι οι δύο αυτές στροφές δεν μετατίθενται.

**Άσκηση 6.15.** Τοποθετήστε το παρόν βιβλίο πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια. Στρέψτε το γύρω από τον άξονα της συρραφής των σελίδων του βιβλίου κατά  $\pi/2$  και στη συνέχεια γύρω από τον κατακόρυφο άξονα και πάλι κατά  $\pi/2$ . Σημειώστε την τελική θέση του βιβλίου και επαναλάβετε τις ίδιες στροφές γύρω από τους ίδιους άξονες, με αντίθετη σειρά αυτή τη φορά, ξεκινώντας από την ίδια αρχική θέση του βιβλίου. Καταλήγει στην ίδια τελική θέση το βιβλίο; Κατασκευάστε τους  $3 \times 3$  πίνακες στροφής που εκτελέσατε και δείξτε ότι η πράξη του πολλαπλασιασμού αυτών δεν είναι μεταθετική. [Υπόδειξη: Η γραμμή και η στήλη που αντιστοιχούν στον άξονα στροφής έχουν μόνο το διαγώνιο στοιχείο ίσο με ένα, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδέν. Τα τέσσερα στοιχεία που απομένουν είναι τα αντίστοιχα τέσσερα στοιχεία ενός πίνακα επίπεδης στροφής.]

## 6.9 Κατασκευή πεπερασμένης στροφής από τους γεννήτορές της

Κατά την απόδειξη του θεωρήματος της Noether προσδιορίσαμε τους μετασχηματισμούς από την απειροστή δράση τους μέσω των γεννητόρων τους. Σε τούτο το εδάφιο θα προσδιορίσουμε τους γεννήτορες των στροφών και θα δείξουμε πώς αυτοί παράγουν μία πεπερασμένη στροφή γύρω από κάποιον άξονα.

Προς τούτο ας υπολογίσουμε την παράγωγο

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}(\theta, \hat{n})}{d\theta} &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(\theta + \delta\theta, \hat{n}) - \mathbf{R}(\theta, \hat{n})}{\delta\theta} \\ &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(\delta\theta, \hat{n})\mathbf{R}(\theta, \hat{n}) - \mathbf{R}(\theta, \hat{n})}{\delta\theta} \\ &= \left( \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(\delta\theta, \hat{n}) - \mathbf{I}}{\delta\theta} \right) \mathbf{R}(\theta, \hat{n}), \end{aligned} \quad (6.26)$$

όπου  $\mathbf{I}$  ο ταυτοτικός πίνακας  $I_{ij} = \delta_{ij}$ . Επειδή, όμως, μια απειροστή στροφή  $\mathbf{R}(\delta\theta, \hat{n})$  υπό μορφή πίνακα έχει συνιστώσες

$$R_{ij}(\delta\theta, \hat{n}) = \delta_{ij} + \delta\theta \epsilon_{ikj} n_k,$$

θα έχουμε

$$\lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{R_{ij}(\delta\theta, \hat{n}) - \delta_{ij}}{\delta\theta} = \epsilon_{ikj} n_k.$$

Αν τώρα ορίσουμε την τριάδα των  $3 \times 3$  πινάκων

$$\begin{aligned} (S_1)_{ij} &= \epsilon_{i1j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (S_2)_{ij} &= \epsilon_{i2j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (S_3)_{ij} &= \epsilon_{i3j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.27)$$

το  $\epsilon_{ikj} n_k$  μπορεί να γραφεί συμβολικά ως  $(\hat{n} \cdot \vec{S})_{ij}$ , όπου με το εσωτερικό γινόμενο εννοούμε το γραμμικό συνδυασμό των τριών πινάκων  $n_k \mathbf{S}_k$ , ενώ το τελικό αντικείμενο είναι πίνακας, γεγονός το οποίο υποδηλώνεται από τους ελεύθερους δείκτες  $(ij)$ . Με αυτόν το συμβολισμό ο πίνακας μιας απειροστής στροφής (6.9) μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{R}(d\theta, \hat{n}) = \mathbf{I} + d\theta (\hat{n} \cdot \vec{S}), \quad (6.28)$$

ενώ η σχέση (6.26) θα λάβει τη μορφή

$$\frac{d\mathbf{R}(\theta, \hat{n})}{d\theta} = (\hat{n} \cdot \vec{S}) \mathbf{R}(\theta, \hat{n}). \quad (6.29)$$

Οι πίνακες  $\mathbf{S}_i$  ονομάζονται *γεννήτορες* των στροφών, διότι ο καθένας από αυτούς “γεννά” τη μεταβολή ενός διανύσματος, όταν αυτό στραφεί κατά γωνία  $d\theta$  γύρω από τον αντίστοιχο άξονα. Για παράδειγμα, ο πίνακας  $\mathbf{S}_1$  είναι ο γεννήτορας των στροφών γύρω από τον άξονα  $x$ . Γενικότερα, αρκεί η γνώση των γεννητόρων ενός μετασχηματισμού για τον προσδιορισμό ολόκληρου του μετασχηματισμού, αφού η συνεχής δράση απειροστών μετασχηματισμών μπορεί να οικοδομήσει οποιονδήποτε πεπερασμένο μετασχηματισμό. Ισοδυνάμως, επειδή η διαφορική εξίσωση (6.29) χαρακτηρίζει το μετασχηματισμό, ο μετασχηματισμός καθορίζεται πλήρως από το

Γεννήτορες των στροφών

Κατασκευή των πεπερασμένων στροφών από τους γεννήτορές τους

γεννήτορά του και δίνεται από το ολοκλήρωμα της εν λόγω διαφορικής εξίσωσης. Το ολοκλήρωμα αυτό θα το υπολογίσουμε στη συνέχεια για την περίπτωση που ο άξονας περιστροφής είναι σταθερός.

Εάν ο άξονας της στροφής είναι σταθερός, η διαφορική εξίσωση (6.29) ολοκληρώνεται αμέσως (βλ. Πλαίσιο 6.1) και δίνει τον πίνακα της πεπερασμένης στροφής γύρω από τον άξονα αυτό

$$\mathbf{R}(\theta, \hat{n}) = \exp \left( \left( \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{S}} \right) \theta \right) . \quad (6.30)$$

### Πλαίσιο 6.1. ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΝΑΚΑ

Η έκφραση  $e^{\mathbf{A}t}$  ή  $\exp(\mathbf{A}t)$ , όπου  $\mathbf{A}$  κάποιος πίνακας, ορίζεται ως

$$e^{\mathbf{A}t} \equiv \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots . \quad (6.31)$$

Είναι εύκολο να δείξετε απευθείας ότι η εκθετική αυτή συνάρτηση αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης πινάκων

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} .$$

Η λύση αυτή αποτελεί γενίκευση της λύσης της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης  $dx/dt = ax$ .

Θα δείξουμε ότι η εκθετική συνάρτηση (6.30) παράγει τον πίνακα μετασχηματισμού μιας πεπερασμένης στροφής (6.21). Ορίζουμε τον πίνακα

$$\mathbf{A} = \left( \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{S}} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (6.32)$$

Τα στοιχεία του πίνακα αυτού γράφονται συνοπτικά ως

$$A_{ij} = \epsilon_{ikj} n_k , \quad (6.33)$$

και είναι εύκολο να δείξουμε ότι οι περιττές δυνάμεις του  $\mathbf{A}$  ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^5 = \dots , \quad (6.34)$$

ενώ οι άρτιες δυνάμεις ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\mathbf{A}^2 = -\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^6 = \dots , \quad (6.35)$$

όπου το τετράγωνο του  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^2$ , έχει στοιχεία

$$\left( \mathbf{A}^2 \right)_{ij} = n_i n_j - \delta_{ij} . \quad (6.36)$$

Εξαιτίας των σχέσεων (6.34), (6.35) η στροφή (6.30) γράφεται διαδοχικά ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\theta, \hat{n}) &= \mathbf{I} + \mathbf{A}\theta + \mathbf{A}^2 \frac{\theta^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{\theta^3}{3!} + \mathbf{A}^4 \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A}\theta + \mathbf{A}^2 \frac{\theta^2}{2!} - \mathbf{A} \frac{\theta^3}{3!} - \mathbf{A}^2 \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right) - \mathbf{A}^2 \left( 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A}^2(1 - \cos \theta) + \mathbf{A} \sin \theta . \end{aligned}$$

Ο πίνακας αυτός, βάσει των (6.33) και (6.36), έχει τις ακόλουθες συνιστώσες:

$$R_{ij}(\theta, \hat{n}) = \delta_{ij} \cos \theta + n_i n_j (1 - \cos \theta) + \epsilon_{ikj} n_k . \quad (6.37)$$

Επιβεβαιώνουμε, λοιπόν, ότι ο γεννήτορας  $\mathbf{A} = (\vec{\mathbf{S}} \cdot \hat{n})$  παράγει το μετασχηματισμό πεπερασμένης στροφής (6.21).

**Άσκηση 6.16.** Αποδείξτε τις ταυτότητες (6.34), (6.35) και (6.36).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 6.17.** Δείξτε ότι ο πίνακας που ορίζεται από την (6.30) είναι ορθογώνιος και έχει μοναδιαία ορίζουσα. Για να αποδείξετε το πρώτο, αποδείξτε από το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης που δίνεται στο Πλαίσιο 6.1 ότι, αν δύο πίνακες  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  μετατίθενται, δηλαδή αν  $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1$ , τότε

$$\exp(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = \exp(\mathbf{A}_1) \exp(\mathbf{A}_2) = \exp(\mathbf{A}_2) \exp(\mathbf{A}_1) .$$

Έπειτα δείξτε ότι  $\exp(\mathbf{A}^T) = (\exp(\mathbf{A}))^T$  και ότι ο πίνακας (6.32) έχει την ιδιότητα  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ . Τέλος, για να υπολογίσετε την ορίζουσα του (6.30), χρησιμοποιήστε την ταυτότητα που ισχύει για κάθε πίνακα (βλ. Μαθηματικό Παράρτημα)

$$\det(\exp(\mathbf{A})) = \exp(\text{trace}(\mathbf{A})) .$$

## 6.10 Σύνθεση στροφών

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει όταν ο άξονας της στροφής αλλάζει συνεχώς. Παρατηρούμε ότι οι γεννήτορες των στροφών δεν μετατίθενται μεταξύ τους, γεγονός από το οποίο πηγάζει η ιδιότητα της μη μεταθετικότητας των ίδιων των στροφών. Ο μεταθέτης οποιουδήποτε ζεύγους γεννητόρων ικανοποιεί τη σχέση

$$[\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{S}_k . \quad (6.38)$$

Η σχέση (6.29) μπορεί ισοδυνάμως να γραφεί και ως

$$\frac{d\mathbf{R}(\theta, \hat{n})}{dt} = (\vec{\Omega} \cdot \vec{\mathbf{S}}) \mathbf{R}(\theta, \hat{n}) , \quad (6.39)$$

αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το χρόνο ως παράμετρο που καθορίζει την εξέλιξη της συνολικής στροφής. Ως  $\vec{\Omega}$  έχουμε ορίσει τη στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής

$$\vec{\Omega} = \hat{n} \frac{d\theta}{dt}.$$

Εάν η γωνιακή ταχύτητα αλλάζει διεύθυνση, τότε η συνολική στροφή του διανύσματος θα είναι η σύνθεση των στροφών που πραγματοποιήθηκαν στα ενδιάμεσα χρονικά διαστήματα με τη σωστή, όμως, χρονολογική σειρά που πραγματοποιήθηκαν αυτές. Ο συνολικός μετασχηματισμός στροφής μπορεί να γραφεί ως

Πεπερασμένη στροφή  
= γινόμενο διαδοχικών  
απειροστών στροφών

$$\mathbf{R}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} [\mathbf{R}(t, t_k) \mathbf{R}(t_k, t_{k-1}) \cdots \mathbf{R}(t_2, t_1) \mathbf{R}(t_1, 0)] , \quad (6.40)$$

όπου  $0, t_1, t_2, \dots, t_k, t$  μια αυθαίρετη διαμέριση του χρονικού διαστήματος  $[0, t]$  σε ενδιάμεσα υποδιαστήματα. Εάν ο αριθμός των υποδιαρρέσεων του χρονικού διαστήματος αυξηθεί έτσι ώστε  $t_i - t_{i-1} \rightarrow 0$  για κάθε τιμή του  $i \in 1, 2, \dots, k, k+1$ ,<sup>12</sup> τότε η ολική στροφή μπορεί να θεωρηθεί ως γινόμενο των διαφορικών στροφών

$$\mathbf{R}(t_i, t_{i-1}) = \exp \left[ \left( \vec{\Omega}(t_i) \cdot \vec{\mathbf{S}} \right) (t_i - t_{i-1}) \right] .$$

Ο υπολογισμός του παραπάνω γινομένου είναι δυσχερής και συνήθως γίνεται αριθμητικά. Η σειρά, όμως, με την οποία πραγματοποιούνται οι διαδοχικές στροφές πρέπει να τηρηθεί αυστηρά στον υπολογισμό της συνολικής στροφής, διότι οι γεννήτορες  $\mathbf{S}_i$  δεν μετατίθενται. Αυτό είναι αποτέλεσμα του ότι για δύο πίνακες  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  που δεν μετατίθενται, δηλαδή  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \neq 0$ , ισχύει ότι

$$e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t} \neq e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} ,$$

οπότε η σειρά του πολλαπλασιασμού έχει σημασία. Για αυτό, εάν

$$[\vec{\Omega}(t_i) \cdot \vec{\mathbf{S}}, \vec{\Omega}(t_i - 1) \cdot \vec{\mathbf{S}}] \neq 0 ,$$

πράγμα που συμβαίνει όταν η γωνιακή ταχύτητα αλλάζει διεύθυνση με το χρόνο, η έκφραση (6.40) δεν είναι ίση με την

$$\exp \left( \int_0^t \vec{\Omega}(s) \cdot \vec{\mathbf{S}} ds \right) .$$

Εξαίρεση, βεβαίως, αποτελεί η περίπτωση κατά την οποία η περιστροφή εκτελείται γύρω από σταθερό άξονα  $\hat{n}$ , οπότε πράγματι ισχύει

$$\mathbf{R}(t) = \exp \left( \int_0^t \vec{\Omega}(s) \cdot \vec{\mathbf{S}} ds \right) = \exp \left( \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{S}} \int_0^t \Omega(s) ds \right) .$$

Η έκφραση (6.40) της συνολικής στροφής, όταν ο άξονας περιστροφής αλλάζει, μπορεί να γραφεί συμβολικά ως

$$\mathbf{R}(t) = \mathcal{T} \left[ \exp \left( \int_0^t \vec{\Omega}(s) \cdot \vec{\mathbf{S}} ds \right) \right] , \quad (6.41)$$

<sup>12</sup>Θεωρήσαμε για ευκολία ότι  $t_0 = 0$  και  $t_{k+1} = t$ .

όπου ο  $\mathcal{T}$  είναι ο επονομαζόμενος *τελεστής χρονολογικής διάταξης* που δηλώνει ότι στο ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης οι παράγοντες οποιοδήποτε γινομένου πινάκων πρέπει να διαταχθούν σε χρονολογική σειρά. Για παράδειγμα, εάν  $t_1 < t_2 < t_3$ , τότε

$$\mathcal{T}[\vec{\Omega}(t_1) \cdot \vec{\mathbf{S}}\vec{\Omega}(t_3) \cdot \vec{\mathbf{S}}\vec{\Omega}(t_2) \cdot \vec{\mathbf{S}}] = [\vec{\Omega}(t_3) \cdot \vec{\mathbf{S}}\vec{\Omega}(t_2) \cdot \vec{\mathbf{S}}\vec{\Omega}(t_1) \cdot \vec{\mathbf{S}}] .$$

Το ίδιο συμβαίνει και όταν έχουμε μεγαλύτερο αριθμό παραγόντων. Πρακτικά, βέβαια, για να υπολογίσουμε την έκφραση (6.41), πρέπει να διαιρέσουμε το χρονικό διάστημα σε μικρά υποδιαστήματα σεβόμενοι τη χρονολογική τους σειρά.

Ισοδυνάμως, η συνολική στροφή ενός διανύσματος μπορεί να βρεθεί με σύνθεση απειροστών στροφών. Η στοιχειώδης μεταβολή του διανύσματος από μία απειροστή στροφή είναι

$$d\vec{r} = (d\theta)(\hat{n} \cdot \vec{\mathbf{S}})\vec{r} = \left(\vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\mathbf{S}}\right) \vec{r} dt , \quad (6.42)$$

όπου η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα είναι αυτή που ορίσαμε παραπάνω. Έτσι το τελικό διάνυσμα θα δίνεται από την ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \mathcal{T} \left[ \int_0^t \left(\vec{\Omega}(s) \cdot \vec{\mathbf{S}}\right) \vec{r}(s) ds \right] . \quad (6.43)$$

Το σύμβολο  $\mathcal{T}$  έχει εισαχθεί στη παραπάνω σχέση για να μας θυμίζει ότι κατά την ολοκλήρωση η δράση των τελεστών  $\mathbf{S}_i$  πρέπει να λαμβάνεται με χρονολογική σειρά, δηλαδή πάντοτε δρα πρώτα ο προγενέστερος χρονολογικά τελεστής και μετά ο μεταγενέστερος. Από πρακτικής άποψης ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος είναι εν γένει δύσκολος, ακριβώς εξαιτίας αυτής της χρονολογικής τάξης που πρέπει να τηρηθεί. Η δυσκολία αυτή συναντάται συχνότατα σε προβλήματα κβαντομηχανικής καθώς και σε προβλήματα εξέλιξης των διαταραχών σε χρονοεξαρτώμενες ροές, όπως αυτές που συναντώνται στις ατμόσφαιρες των ουράνιων σωμάτων, όπου η μη μεταθετικότητα των τελεστών είναι γενικό χαρακτηριστικό. Ειδικά, οι πίνακες  $\mathbf{S}_i$  που γράψαμε παραπάνω βρίσκονται σε πλήρη αντιστοιχία (έχουν τις ίδιες μεταθετικές ιδιότητες) με τους πίνακες του Wolfgang Pauli [1900-1958] που περιγράφουν την κβαντομηχανική συμπεριφορά του σπιν των ηλεκτρονίων.

**Άσκηση 6.18.** Υπολογίστε το άθροισμα  $\mathbf{S}_i \mathbf{S}_i$ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 6.19.** Θεωρήστε τη μετάθεση ενός διανύσματος  $\vec{r}$  κατά  $\alpha$  μονάδες μήκους στη κατεύθυνση  $\hat{n}$ :  $\vec{r}' = \vec{r} + \alpha \hat{n}$ . Δείξτε ότι ο γεννήτορας αυτών των μεταθέσεων είναι ο τελεστής  $\hat{n} \cdot \vec{\nabla}$ .

## 6.11 Στροφές και ορθογώνιοι μετασχηματισμοί στο επίπεδο

Στα προηγούμενα εδάφια του παρόντος κεφαλαίου μάθαμε πώς να κατασκευάζουμε τους πίνακες που προκαλούν στροφές ενός διανύσματος. Θέλουμε, τώρα, να κατασκευάσουμε το μετασχηματισμό των συνιστωσών ενός διανύσματος του επιπέδου σε στροφή του συστήματος των συντεταγμένων κατά γωνία  $\phi$ . Ο εν λόγω μετασχηματισμός είναι ισοδύναμος με τη στροφή ενός οποιουδήποτε διανύσματος στο επίπεδο κατά γωνία  $-\phi$  και επιτυγχάνεται με τον πολλαπλασιασμό των πινάκων

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (6.44)$$

Εύκολα μπορούμε να κατασκευάσουμε αυτό τον πίνακα στροφής με γεωμετρικό τρόπο, προβάλλοντας ένα διάνυσμα σε δύο συστήματα συντεταγμένων στραμμένα το ένα σε σχέση με το άλλο.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 6.20.** Στις δύο διαστάσεις θεωρήστε δύο ορθογώνια συστήματα αξόνων που αν και έχουν την ίδια αρχή το ένα προκύπτει από το άλλο με μία στροφή κατά γωνία  $\phi$ . Τα διανύσματα βάσης του ενός συστήματος είναι  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  ενώ του άλλου  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2$  και ικανοποιούν τις σχέσεις ορθογωνιότητας  $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \delta_{ij}$ . Σχεδιάστε τα δύο αυτά συστήματα και επαληθεύστε τις σχέσεις  $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_1 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_2 = \cos \phi$ ,  $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_2 = \cos(\pi/2 + \phi) = -\sin \phi$  και  $\hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_2 = \cos(\pi/2 - \phi) = \sin \phi$ . Αν γράψουμε τις συντεταγμένες κάποιου διανύσματος  $\vec{X}$  και στα δύο συστήματα αξόνων θα ισχύει η ισότητα

$$\vec{X} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 = x'\hat{e}'_1 + y'\hat{e}'_2.$$

Λαμβάνοντας, τώρα, διαδοχικά το εσωτερικό γινόμενο της παραπάνω σχέσης με το  $\hat{e}'_1$  και το  $\hat{e}'_2$  αποδείξτε ότι οι συντεταγμένες ενός διανύσματος μετασχηματίζονται με το μετασχηματισμό (6.44).

Οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί διατηρούν το μέτρο

Ο πίνακας στροφής είναι ένας πίνακας που έχει την ιδιότητα να μετασχηματίζει γραμμικά ένα διάνυσμα χωρίς να μεταβάλλει το μήκος του. Οι πίνακες αυτοί, όπως μάθαμε, ονομάζονται ορθογώνιοι. Με αφετηρία αυτή την ιδιότητα, θα λέγαμε ότι η γενικότερη μορφή ενός ορθογώνιου πίνακα θα ήταν

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

με παραμέτρους  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  τέτοιες ώστε, αν πολλαπλασιάσαμε με αυτόν τον πίνακα ένα οποιοδήποτε διάνυσμα, να μην αλλάξει το μέτρο του διανύσματος. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε διάνυσμα  $\vec{r}$  θα ισχύει

$$|\vec{r}|^2 = |\vec{r}'|^2,$$

ή ισοδυνάμως

$$x^2 + y^2 = (\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2. \quad (6.45)$$

Αναπτύσσοντας την (6.45) συνάγουμε ότι για κάθε  $x$  και  $y$  θα πρέπει να ισχύει

$$x^2 + y^2 = (\alpha^2 + \gamma^2)x^2 + (\beta^2 + \delta^2)y^2 + 2(\alpha\gamma + \beta\delta)xy$$

και για να ισχύει αυτή η σχέση για κάθε διάνυσμα, θα πρέπει τα στοιχεία του μετασχηματισμού να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \gamma^2 &= 1, \\ \beta^2 + \delta^2 &= 1, \\ \alpha\beta + \gamma\delta &= 0.\end{aligned}\tag{6.46}$$

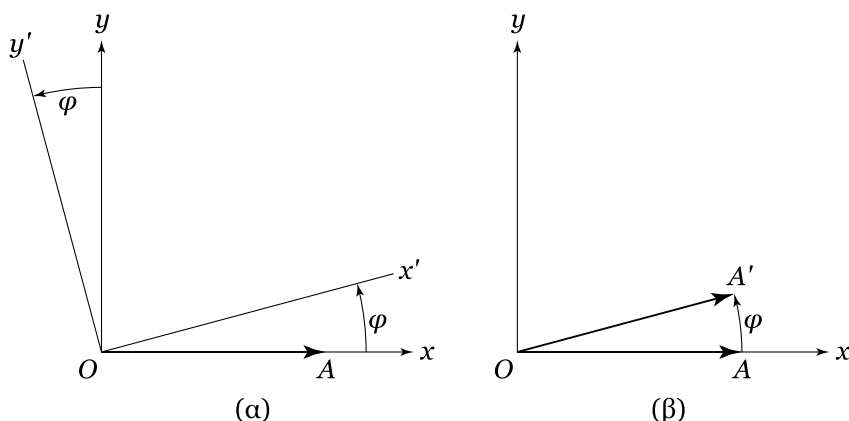
Οι τρεις<sup>13</sup> αυτές σχέσεις περιορίζουν τις ανεξάρτητες παραμέτρους του πίνακα από τέσσερις σε μία. Χωρίς έλλειψη της γενικότητας θεωρούμε ότι  $\alpha = \cos \phi$ ,<sup>14</sup> οπότε υπάρχουν τέσσερις πίνακες που μπορούμε να κατασκευάσουμε και ικανοποιούν τις σχέσεις (6.46), οι ακόλουθοι:

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_1 &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}, & \mathbf{O}_2 &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ -\sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}, \\ \mathbf{O}_3 &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, & \mathbf{O}_4 &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{6.47}$$

Από τους τέσσερις αυτούς πίνακες οι δύο τελευταίοι προκαλούν μία στροφή του διανύσματος κατά γωνία  $\phi$  είτε με ενεργητικό τρόπο (πίνακας  $\mathbf{O}_4$ ) στρίβοντας το διάνυσμα αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού αλλά αφήνοντας τους άξονες του συστήματος αναφοράς ίδιους, είτε παθητικά (πίνακας  $\mathbf{O}_3$ ) αφήνοντας απείραχτο το διάνυσμα αλλά στρέφοντας τους άξονες κατά γωνία  $\phi$  με την ίδια φορά. Προφανώς οι δύο αυτοί πίνακες μετατρέπονται ο ένας στον άλλο, αν η γωνία  $\phi$  αλλάξει πρόσημο, αφού η ενεργητική και η παθητική στροφή έχουν αντίθετο αποτέλεσμα σε σχέση με την κίνηση του διανύσματος ως προς το σύστημα των αξόνων. Οι δύο άλλοι πίνακες έχουν πολύ πιο περίεργη συμπεριφορά: εκτελούν κατοπτρισμούς του διανύσματος ως προς τον άξονα  $y$  και στη συνέχεια στρίβουν το διάνυσμα κατά γωνία  $\phi$ , είτε ενεργητικά (πίνακας  $\mathbf{O}_1$ ), είτε παθητικά (πίνακας  $\mathbf{O}_2$ ). Ο κατοπτρισμός είναι ένας άλλος τρόπος, διαφορετικός από τη στροφή, που επιτρέπει να παραμείνει το μήκος του διανύσματος αναλλοίωτο. Κοιτώντας τον εαυτό μας σε ένα καθρέφτη διαπιστώνουμε ότι, αν και το το είδωλό μας είναι τέλει αντίγραφο του εαυτού μας, η καρδιά του βρίσκεται πάντοτε στη δεξιά πλευρά. Ειδικότερα, οι δύο αυτοί πίνακες, σε αντίθεση με τους άλλους δύο, έχουν την ιδιότητα να

<sup>13</sup>Γενικότερα, σε ένα χώρο  $N$  διαστάσεων, το πλήθος των σχέσεων που σχετίζονται με την αναλλοιότητα του μήκους του διανύσματος είναι  $N$  από τα τετράγωνα των συνιστωσών και  $\binom{N}{2}$  από τα δυνατά μικτά γινόμενα των συνιστωσών. Έτσι από τις  $N^2$  παραμέτρους του πίνακα, ανεξάρτητες είναι μόνο οι  $N^2 - N - \binom{N}{2} = N(N-1)/2$ . Στην ειδική περίπτωση του διδιάστατου χώρου υπάρχει μόνο μία ανεξάρτητη παράμετρος, στον τρισδιάστατο είναι τρεις, οι τρεις γωνίες Euler που χαρακτηρίζουν την πιο γενική στροφή, ενώ για τον τετραδιάστατο χώρο χρειάζονται 6 αντίστοιχες γωνίες.

<sup>14</sup>Αν ήταν  $\alpha = \cos(\phi + \phi_0)$ , η επιπλέον φάση  $\phi_0$  θα εμφανιζόταν σε όλα τα στοιχεία των πινάκων χωρίς όμως να αλλάζει τη μορφή τους. Η ύπαρξη μιας τέτοιας γωνίας  $\phi_0$  θα σήμαινε άλλη αρχή μέτρησης της γωνίας στροφής.



Σχήμα 6.9: (α) Παθητικός τρόπος στροφής. Το σύστημα αξόνων στρέφεται (στο σχήμα αριστερόστροφα, κατά γωνία  $\phi$ ), ενώ το διάνυσμα  $\vec{OA}$  παραμένει στη θέση του. Οι συντεταγμένες του  $\vec{OA}$  στο νέο σύστημα αναφοράς  $(x', y')$  βρίσκονται, αν πολλαπλασιαστούν οι συντεταγμένες του  $\vec{OA}$  στο αρχικό σύστημα αναφοράς  $(x, y)$  με τον πίνακα  $\mathbf{O}_3$ . (β) Ενεργητικός τρόπος στροφής. Το σύστημα των αξόνων παραμένει το ίδιο, αλλά τώρα στρέφουμε το διάνυσμα  $\vec{OA}$  κατά γωνία  $\phi$ . Οι συντεταγμένες του στραμμένου διανύσματος  $\vec{OA}'$  προσδιορίζονται, αν πολλαπλασιαστούν οι συντεταγμένες του  $\vec{OA}$  με τον πίνακα  $\mathbf{O}_4$ .

μην εμπεριέχουν το μοναδιαίο πίνακα. Οι πίνακες τύπου  $\mathbf{O}_3$  ή  $\mathbf{O}_4$  αποτελούν μια υποομάδα της ομάδας  $O(2)$  των ορθογώνιων πινάκων στις δύο διαστάσεις, ενώ οι  $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$  δεν αποτελούν υποομάδα, αφού δεν εμπεριέχουν το ουδέτερο στοιχείο του μετασχηματισμού, το μοναδιαίο μετασχηματισμό. Η υποομάδα των  $\mathbf{O}_3, \mathbf{O}_4$  αποτελείται από πίνακες με ορίζουσα  $+1$ <sup>15</sup> και καλείται  $SO(2)$ , ή απλώς ομάδα των στροφών στις δύο διαστάσεις.

Η ομάδα των στροφών στις δύο διαστάσεις είναι *αβελιανή*, δηλαδή η σειρά με την οποία εκτελούνται οι στροφές δεν έχει σημασία. Αυτό, όμως, δεν ισχύει σε περισσότερες διαστάσεις. Για παράδειγμα στις τρεις διαστάσεις, όπως είδαμε, δύο διαδοχικές στροφές γύρω από μη κοινούς άξονες δεν καταλήγουν σε ίδιο αποτέλεσμα, αν εκτελεστούν με διαφορετική σειρά. Από μαθηματική σκοπιά η ιδιότητα της μη μεταθετικότητας των στροφών είναι ο λόγος για τον οποίο μια περιστρεφόμενη σβούρα δεν πέφτει, όταν ο άξονάς της είναι κεκλιμένος, αλλά εκτελεί μετάπτωση γύρω από κατακόρυφο άξονα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 6.21.** Δείξτε ότι  $\mathbf{O}_3(\phi_1)\mathbf{O}_3(\phi_2) = \mathbf{O}_3(\phi_2)\mathbf{O}_3(\phi_1)$ .

**Άσκηση 6.22.** Σχεδιάστε τη δράση των πινάκων  $\mathbf{O}_1$  και  $\mathbf{O}_2$  και επιβεβαιώστε ότι αυτοί μπορούν να ερμηνευθούν αντίστοιχα ως ενεργητικοί και παθητικοί μετασχηματισμοί στροφής κατόπιν κατοπτρισμού.

<sup>15</sup>Οι άλλοι πίνακες έχουν ορίζουσα  $-1$  και γι' αυτό δεν μπορούν να γίνουν ποτέ ίσοι με το μοναδιαίο πίνακα, ο οποίος έχει ορίζουσα  $+1$ .

## 6.12 Από τις στροφές στο χώρο στις στροφές στο χωρόχρονο

Η μορφή των ορθογώνιων πινάκων που είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο είναι άμεσα συνδεδεμένη με το είδος του μέτρου που έχουμε ορίσει για τα διανύσματα του ευκλείδειου επιπέδου. Ας δοκιμάσουμε, λοιπόν, ωθούμενοι από μαθηματική περιέργεια προς το παρόν, να κατασκευάσουμε ένα άλλο είδος μέτρου για τα διανύσματα του επιπέδου  $(T, x)$ <sup>16</sup> ακολουθώντας την εξής διγραμμική συνταγή:

$$\|\vec{r}\|^2 = -T^2 + x^2. \quad (6.48)$$

Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε το νέο συμβολισμό  $\|\dots\|$  για να υποδηλώσουμε το νέο αυτό είδος μέτρου. Το μέτρο αυτό έχει μια ιδιότητα που δεν έχει το κλασικό ευκλείδειο μέτρο. Συγκεκριμένα, το νέο μέτρο ενδέχεται να είναι μηδέν ακόμη και για μη μηδενικά διανύσματα, όπως για παράδειγμα το διάνυσμα  $(1, 1)$ .

Στο χώρο με το περίεργο αυτό μέτρο ποιοι θα ήταν άραγε οι πίνακες στροφής, οι πίνακες δηλαδή που δρώντας γραμμικά στα διανύσματα αυτού του χώρου θα άφηναν αναλλοίωτο το μήκος αυτών; Δοκιμάζοντας την προηγούμενη μέθοδο κατασκευής των ορθογώνιων πινάκων, θα καθορίσουμε τις τέσσερις παραμέτρους του πίνακα

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

για τον οποίο θα ισχύει επίσης ότι για κάθε διάνυσμα

$$\|\vec{r}\|^2 = \|\vec{r}'\|^2, \quad (6.49)$$

δηλαδή,

$$\begin{aligned} -T^2 + x^2 &= -(\alpha T + \beta x)^2 + (\gamma T + \delta x)^2 \\ &= (-\alpha^2 + \gamma^2)T^2 + (-\beta^2 + \delta^2)x^2 + 2(-\alpha\beta + \gamma\delta)Tx, \end{aligned}$$

οπότε τα στοιχεία του μετασχηματισμού πρέπει να ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} -\alpha^2 + \gamma^2 &= 1, \\ -\beta^2 + \delta^2 &= 1, \\ -\alpha\beta + \gamma\delta &= 0. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν τέσσερα είδη πινάκων, οι οποίοι είναι παρόμοιοι με τους  $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2, \mathbf{O}_3, \mathbf{O}_4$  και οι παράμετροί τους ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις. Η μόνη διαφορά είναι ότι τα συνημίτονα και τα ημίτονα πρέπει να αντικατασταθούν από υπερβολικά συνημίτονα και ημίτονα και τα πρόσημά τους είναι ελαφρώς παραλλαγμένα<sup>17</sup>. Οι πίνακες αυτοί είναι οι εξής:

<sup>16</sup>Αλλάξαμε την ονομασία των συντεταγμένων αφενός επειδή θέλουμε να αποφύγουμε τη σύγχυση με τα διανύσματα του ευκλείδειου επιπέδου και αφετέρου επειδή, όταν αργότερα αναφερθούμε στο χωρόχρονο του Minkowski, οι συντεταγμένες αυτές θα αποκτήσουν φυσικό νόημα, η μία θα παίξει το ρόλο του χρόνου και η άλλη του χώρου.

<sup>17</sup>Αν η διαφορά των τετραγώνων δύο πραγματικών αριθμών ισούται με 1, τότε μπορούμε να γράψουμε τον ένα ως  $\cosh \theta$  και τον άλλο ως  $\sinh \theta$ .

Ένα περίεργο μέτρο

Οι “ορθογώνιοι” μετασχηματισμοί του νέου χώρου

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ -\sinh \phi & -\cosh \phi \end{pmatrix}, \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ \sinh \phi & -\cosh \phi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_3 = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix}, \mathbf{L}_4 = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix}. \quad (6.51)$$

Όπως και με τους ορθογώνιους πίνακες  $\mathbf{O}$ , οι  $\mathbf{L}_3, \mathbf{L}_4$  αντιστοιχούν σε “στροφές” αντίθετης μεταξύ τους φοράς, ενώ οι  $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$  που έχουν ορίζουσα  $-1$  αντιστοιχούν σε ίδιου τύπου στροφές όπως οι  $\mathbf{L}_3, \mathbf{L}_4$  αλλά με κατοπτρισμό στη δεύτερη συντεταγμένη των διανυσμάτων  $x$ . Και στην περίπτωση αυτή οι “στροφές” τύπου  $\mathbf{L}_3$  ή  $\mathbf{L}_4$  με ορίζουσα  $+1$  αποτελούν υποομάδα των γενικότερων “στροφών” του νέου αυτού χώρου. Στο εξής θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τον πίνακα  $\mathbf{L}_4$  (ενεργητικός μετασχηματισμός), αφού ο  $\mathbf{L}_3$  αντιστοιχεί σε αντίθετη γωνία (παθητικός μετασχηματισμός), ενώ οι  $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$  δεν περιλαμβάνουν το μοναδιαίο πίνακα που αφήνει τα διανύσματα απείραχτα.<sup>18</sup> Για να αποφύγουμε την άσκοπη χρήση δεικτών, που ίσως μας μπερδέψει με τους δείκτες των στοιχείων του πίνακα, θα ονομάζουμε στο εξής αυτόν τον πίνακα απλώς  $\mathbf{L}$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 6.23.** Αποδείξτε ότι οι πίνακες τύπου  $\mathbf{L}_3$  αποτελούν αβελιανή ομάδα. Δηλαδή δείξτε ότι: (α)  $\mathbf{L}_3(\theta_1)\mathbf{L}_3(\theta_2) = \mathbf{L}_3(\theta_2)\mathbf{L}_3(\theta_1) = \mathbf{L}_3(\theta_1 + \theta_2)$ . (β) Υπάρχει ένας ουδέτερος πίνακας  $\mathbf{L}_3(\theta_0)$  ώστε για κάθε  $\mathbf{L}_3(\theta)$ ,  $\mathbf{L}_3(\theta)\mathbf{L}_3(\theta_0) = \mathbf{L}_3(\theta_0)\mathbf{L}_3(\theta) = \mathbf{L}_3(\theta)$ . Ποιο είναι το  $\theta_0$ ; (γ) Για κάθε  $\mathbf{L}_3(\theta)$  υπάρχει ένα  $\mathbf{L}_3(\theta')$  τέτοιο ώστε  $\mathbf{L}_3(\theta)\mathbf{L}_3(\theta') = \mathbf{L}_3(\theta')\mathbf{L}_3(\theta) = \mathbf{L}_3(\theta_0)$ . Ποιο είναι το αντίστοιχο  $\theta'$  για το κάθε  $\theta$ ;

Το γεγονός ότι οι συναρτήσεις  $\cosh \phi$  και  $\sinh \phi$  δεν είναι φραγμένες, αλλά συμπεριφέρονται, τουλάχιστον για μεγάλα ορίσματα, όπως η εκθετική συνάρτηση έχει ως αποτέλεσμα το “μήκος” του διανύσματος, σχεδιασμένο στο χαρτί, σε ένα ευκλείδειο δηλαδή επίπεδο, ύστερα από το μετασχηματισμό που επιφέρει ο  $\mathbf{L}$  όχι απλώς να μην είναι σταθερό αλλά και να μεγαλώνει με εκθετικό μάλιστα τρόπο καθώς αυξάνεται η γωνία  $\theta$ . Σύμφωνα, όμως, με το μέτρο που εμείς έχουμε ορίσει γι' αυτόν το χώρο, το μήκος του διανύσματος δεν μεταβάλλεται. Το “μήκος” που μετρούμε εμείς στο χαρτί  $(T^2 + x^2)^{1/2}$  δεν είναι αυτό που θεωρήσαμε ως μήκος του διανύσματος.

Στη μορφή των πινάκων της (6.51) θα μπορούσαμε να είχαμε καταλήξει χρησιμοποιώντας τους ορθογώνιους πίνακες της (6.47), αν εμμέναμε στο ευκλείδειο μέτρο και αλλάζαμε τις συνιστώσες του διανύσματος από  $(T, x)$  σε  $(iT, x)$ . Σε αυτή την περίπτωση, όμως, η γωνία που υπεισέρχεται στα  $\cos \phi$  και  $\sin \phi$  των ορθογώνιων πινάκων πρέπει να είναι καθαρά φανταστική. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί ακριβώς στους πίνακες  $\mathbf{L}$  που ορίσαμε παραπάνω (βλ. Άσκηση 6.24).

<sup>18</sup>Ο λόγος που θέλουμε να εμπεριέχεται ο ταυτοτικός πίνακας στους πίνακες που χρησιμοποιούμε είναι για να μπορούμε με συνεχή τρόπο να “στρίβουμε” τα διανύσματά μας, ξεκινώντας από τη μηδενική “στροφή”.

**Άσκηση 6.24.** Ξεκινώντας από τον πίνακα  $\mathbf{O}_4$  και θεωρώντας διανύσματα με καθαρά φανταστική πρώτη συνιστώσα, δείξτε ότι, αν θεωρήσει κανείς καθαρά φανταστική γωνία στον πίνακα  $\mathbf{O}_4$ , τότε επέρχεται ισορροπία μεταξύ φανταστικών και πραγματικών μεγεθών στις σχέσεις μετασχηματισμού ενός διανύσματος με ευκλείδεια στροφή· δηλαδή, η πρώτη συνιστώσα του διανύσματος προ και μετά το μετασχηματισμό είναι φανταστική, ενώ η δεύτερη είναι πραγματική. Υπολογίζοντας στη συνέχεια τα ημίτονα και τα συνημίτονα φανταστικής γωνίας (μετατρέπονται σε υπερβολικά ημίτονα και συνημίτονα), δείξτε ότι οι σχέσεις μετασχηματισμού για τα  $T, x$  είναι αυτές που δίνονται απευθείας μέσω του πίνακα  $\mathbf{L}_4$ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ας υποθέσουμε, στη συνέχεια, ότι ο περιέργος αυτός μετασχηματισμός στροφής

$$T' = T \cosh \theta - x \sinh \theta \quad (6.52)$$

$$x' = x \cosh \theta - T \sinh \theta, \quad (6.53)$$

είναι τέτοιος, ώστε η γωνία του μετασχηματισμού  $\theta$  να είναι πάρα πολύ μικρή και ταυτόχρονα να υπάρχει μία πολύ μεγάλης τιμής σταθερά  $c$  τέτοια ώστε το  $\theta c$  να είναι τάξης μονάδας. Αν διαιρέσουμε την (6.52) με τη σταθερά  $c$  και ξαναγράψουμε τις σχέσεις μετασχηματισμού, ορίζοντας μια νέα συντεταγμένη  $t \equiv T/c$  και  $t' \equiv T'/c$ , θα καταλήξουμε στις ακόλουθες πολύ γνώριμες προσεγγιστικές σχέσεις

$$t' = t [1 + \mathcal{O}(\theta^2)] - x[\mathcal{O}(\theta/c)] \simeq t \quad (6.54)$$

$$x' = x [1 + \mathcal{O}(\theta^2)] - t [c\theta + \mathcal{O}(c\theta^3)] \simeq x - (c\theta)t. \quad (6.55)$$

Αγνοώντας<sup>19</sup> τους όρους τάξης  $\theta^2$ ,  $\theta/c$ ,  $\theta^3 c$ , διαπιστώνουμε ότι οι σχέσεις αυτές εκφράζουν έναν γαλιλαϊκό μετασχηματισμό με ταχύτητα

$$u = \theta c, \quad (6.56)$$

στην περιορισμένη περίπτωση ενός μονοδιάστατου κόσμου. Ο ιδιόμορφος, λοιπόν, αυτός χώρος θα μπορούσε να είναι ο χωρόχρονος ή πιο σωστά η περιορισμένη του μορφή με μία χωρική διάσταση, ενώ οι στροφές δεν θα ήταν τίποτε άλλο παρά οι γαλιλαϊκοί –κατά προσέγγιση– μετασχηματισμοί. Τα διανύσματα που θεωρήσαμε θα είχαν τη μορφή

$$\vec{r} = (c t, x), \quad (6.57)$$

όπου  $x, t$  είναι η χωρική και η χρονική ταυτότητα, αντίστοιχα, ενός γεγονότος, ενώ η “γωνία στροφής” θα ήταν

$$\theta = \frac{u}{c} + \mathcal{O}(\theta^3),$$

<sup>19</sup>Και οι τρεις είναι όροι τάξης  $\theta^2$  από τη στιγμή που θεωρούμε ότι το  $\theta c$  είναι τάξης μονάδας.

Μα ... αυτός είναι ο γαλιλαϊκός μετασχηματισμός

Η μετάβαση σε άλλο σύστημα αναφοράς είναι μια στροφή στον περιέργο αυτό χώρο

όπου  $u$  είναι η ταχύτητα του νέου συστήματος αναφοράς σε σχέση με το παλαιό. Και η σταθερά  $c$ ; Ποια είναι η φυσική της σημασία; Πρόκειται προφανώς για μία ποσότητα με διαστάσεις ταχύτητας, αφού η  $\theta$  είναι αδιάστατη ποσότητα. Για να εξετάσουμε το ρόλο αυτής της ποσότητας, ας επανέλθουμε στον ορισμό του μέτρου του διάνυσματος με το οποίο ξεκινήσαμε όλη τη συζήτηση για τον ιδιόμορφο αυτό χώρο. Ένα διάνυσμα με μηδενικό μέτρο, θα μετασχηματιστεί σε διάνυσμα και πάλι μηδενικού μέτρου. Βάσει αυτής της ιδιότητας εξάλλου κατασκευάστηκε ο μετασχηματισμός  $\mathbf{L}$ . Έτσι, αν σε κάποιο αδρανειακό σύστημα ισχύει ότι

$$x = c t ,$$

σε οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα θα ισχύει επίσης ότι

$$x' = c t' .$$

Με άλλα λόγια κάτι που κινείται με ταχύτητα  $c$  στο ένα σύστημα θα κινείται με ταχύτητα  $c$  και στο άλλο σύστημα. Η τελευταία αυτή παρατήρηση είναι φυσικά απαράδεκτη υπό τη γαλιλαϊκή έννοια της κίνησης αλλά απόλυτα σύμφωνη με τα πειράματα που έγιναν το 1887 από τους Albert Abraham Michelson [1852-1931] και Edward Williams Morley [1838-1923] όσον αφορά στην ταχύτητα διάδοσης του φωτός, καθώς επίσης και με τη θεωρητική πρόβλεψη των εξισώσεων του Maxwell σύμφωνα με την οποία τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται με μια παγκόσμια ταχύτητα ανεξάρτητη του συστήματος αναφοράς. Θα ήταν, λοιπόν, λογικό να θεωρήσουμε ότι η σταθερά  $c$  που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω είναι η ταχύτητα του φωτός και το διάνυσμα μηδενικού μήκους είναι αυτό που διανύει το φως στο χωρόχρονο, λαμβάνοντας ως χρονική συντεταγμένη του διανύσματος το μήκος φωτός  $c t$  που αντιστοιχεί στο χρόνο κίνησης του φωτός.

Πώς μπορούμε, όμως, να συμβιβάσουμε τη γαλιλαϊκή μας καθημερινή εμπειρία με την παγκοσμιότητα της ταχύτητας του φωτός; Απλώς, θα πρέπει να δεχτούμε και να επιβεβαιώσουμε με κατάλληλα πειράματα ότι ο σωστός μετασχηματισμός προώθησης από ένα αδρανειακό σύστημα σε ένα άλλο είναι ο  $\mathbf{L}$ , ο οποίος για τις ταχύτητες της καθημερινής μας εμπειρίας είναι ταυτόσημος με το γαλιλαϊκό μετασχηματισμό, τουλάχιστον με ακρίβεια τάξης  $\theta^2$ , δηλαδή  $(u/c)^2$ .

Ας ξαναγράψουμε, τώρα, το γενικό μετασχηματισμό, που καλείται *μετασχηματισμός Lorentz*,<sup>20</sup>

<sup>20</sup> Αν και οι φερώνυμοι μετασχηματισμοί πρωτοχρησιμοποιήθηκαν το 1895 από τον ολλανδό φυσικό Hendrik Antoon Lorentz [1853-1928] και το 1892 από τον ιρλανδό φυσικό George Francis FitzGerald [1851-1901] πριν από τη διατύπωση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας, προκειμένου να εξηγήσουν τα αποτελέσματα του πειράματος Michelson-Morley και να συμβιβάσουν κάπως τεχνητά τον ηλεκτρομαγνητισμό με τη νευτώνεια μηχανική, κατασκευάστηκαν για πρώτη φορά από πρώτες αρχές το 1905 από τον Einstein με το σημερινό τους χωροχρονικό περιεχόμενο. Οι μετασχηματισμοί αυτοί, ελαφρώς παραλλαγμένοι, πρωτοχρησιμοποιήθηκαν ακόμη νωρίτερα, το 1887, από τον Woldemar Voigt [1850-1919] ως μαθηματικοί μετασχηματισμοί που διατηρούν αναλλοίωτη την ταχύτητα μιας κυματικής εξίσωσης. Επίσης, το 1906 και ανεξάρτητα από τον Einstein, ο γάλλος μαθηματικός Henri Poincaré [1854-1912] σε μελέτη του για τη κίνηση των ηλεκτρονίων κατέληξε στο μετασχηματισμό Lorentz και στα περισσότερα στοιχεία της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.

$$t' = \cosh \theta \left( t - \frac{x}{c} \tanh \theta \right), \quad (6.58)$$

$$x' = \cosh \theta (x - ct \tanh \theta). \quad (6.59)$$

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι  $\tanh \theta \simeq \theta \simeq u/c$ , όταν η ταχύτητα  $u$  με την οποία κινείται το τονούμενο σύστημα ως προς το άτονο είναι  $u/c \ll 1$ . Ας θεωρήσουμε, τώρα, έναν παρατηρητή που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων του τονούμενου συστήματος που κινείται με σταθερή ταχύτητα  $u$  ως προς το άτονο. Οι συντεταγμένες της θέσης αυτού του παρατηρητή θα είναι  $x' = 0$  ως προς το τονούμενο σύστημα και  $x = ut$  ως προς το άτονο σύστημα αναφοράς. Επομένως, από την (6.59) βρίσκουμε ότι για να είναι συνεπής ο μετασχηματισμός αυτός με την κινηματική ερμηνεία που του αποδίδουμε θα πρέπει να ισχύει

$$\tanh \theta = \frac{u}{c}. \quad (6.60)$$

Η συσχέτιση της παραμέτρου  $\theta$  με την ταχύτητα του ενός συστήματος αναφοράς ως προς το άλλο οδηγεί σε ένα σημαντικό συμπέρασμα. Επειδή η συνάρτηση  $\tanh \theta$  είναι φραγμένη ( $-1 \leq \tanh \theta \leq 1$ ), είναι φραγμένη και η  $u/c$  που σημαίνει ότι δεν είναι δυνατόν η ταχύτητα  $u$  να γίνει μεγαλύτερη από τη  $c$ .<sup>21</sup> Κατόπιν αυτής της αντιστοίχισης μεταξύ γωνίας και ταχύτητας, ο μετασχηματισμός Lorentz μπορεί να γραφεί με φυσικές μεταβλητές και να ελεγχθεί πειραματικά με τη μελέτη της κίνησης στοιχειωδών σωματιδίων που κινούνται με ταχύτητες παραπλήσιες με αυτή του φωτός.

Έτσι, εφόσον ισχύει η (6.60) είναι

$$\cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \quad (6.61)$$

και ο μετασχηματισμός Lorentz λαμβάνει τη μορφή

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \left( t - \frac{ux}{c^2} \right), \quad (6.62)$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} (x - ut). \quad (6.63)$$

Έχοντας κατασκευάσει το σωστό μετασχηματισμό προώθησης για έναν μονοδιάστατο χωρικά κόσμο, θα επικαλεστούμε τώρα την ισοτροπία του τρισδιάστατου χώρου (του χωρικού μέρους του χωρόχρονου) για να επεκτείνουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό στον τετραδιάστατο χωρόχρονο. Αυτό που πρέπει να μένει αναλλοίωτο είναι η ποσότητα

$$-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

<sup>21</sup> Αν η ταχύτητα ενός συστήματος αναφοράς υπερέβαινε αυτήν του φωτός, θα μπορούσαμε βάσει της σχέσης (6.58) να αντιστρέψουμε τη χρονολογική σειρά αιτίου και αποτελέσματος, θέτοντας σε αμφισβήτηση την αρχή της αιτιότητας που αποτελεί θεμελιώδη αρχή της φυσικής επιστήμης.

αν χρησιμοποιήσουμε καρτεσιανές συντεταγμένες για την περιγραφή του τρισδιάστατου χώρου. Ταυτόχρονα, αφού ο μετασχηματισμός που κατασκευάσαμε (σχέσεις (6.62) και (6.63)), θεωρώντας ότι η σχετική κίνηση των συστημάτων αναφοράς συμβαίνει κατά τον άξονα  $x$ , κρατά αναλλοίωτο το

$$-(ct)^2 + x^2,$$

οι συντεταγμένες  $y$  και  $z$  δεν πρέπει να αλλάζουν καθόλου, διότι, αν άλλαζαν, λόγω της ισοτροπίας στο επίπεδο το κάθετο στη διεύθυνση της σχετικής κίνησης των δύο συστημάτων<sup>22</sup>, θα άλλαζαν και οι δύο ακριβώς κατά τον ίδιο τρόπο. Ο μοναδικός επιτρεπτός μετασχηματισμός για τα  $y$  και  $z$ , ώστε να μένει αναλλοίωτο το  $y^2 + z^2$  είναι ένας μετασχηματισμός στροφής του επιπέδου  $y - z$ , ο οποίος θα εξαρτάται από τη σχετική ταχύτητα κίνησης των δύο συστημάτων. Κάτι τέτοιο όμως θα παραβίαζε την ισοτροπία του χώρου, αφού κάποια ταχύτητα κατά τον άξονα  $x$  θα έστρεφε το επίπεδο  $y - z$  είτε δεξιόστροφα είτε αριστερόστροφα, επομένως ούτε αυτός ο μετασχηματισμός είναι επιτρεπτός. Τα  $y$  και τα  $z$ , λοιπόν, θα πρέπει να παραμένουν αμετάβλητα

$$y' = y, \quad z' = z.$$

Έτσι, το γενικό μετασχηματισμό προώθησης θα μπορούσαμε να τον κατασκευάσουμε μέσω της δράσης του πίνακα

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} & \frac{-u/c}{\sqrt{1-(u/c)^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-u/c}{\sqrt{1-(u/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.64)$$

στο μονόστηλο διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Οι ορθογώνιοι πίνακες στροφής<sup>23</sup> που είδαμε στην αρχή του παρόντος εδαφίου θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για τη κατασκευή του αντίστοιχου μετασχηματισμού, αν η σχετική κίνηση δεν πραγματοποιούνταν κατά τον άξονα  $x$  αλλά κατά μήκος κάποιου άλλου άξονα.

<sup>22</sup> Δεν υπάρχει καμία προεξάρχουσα διεύθυνση σε αυτό το επίπεδο.

<sup>23</sup> Στον τετραδιάστατο χώρο μπορούμε να εκτελέσουμε έξι ανεξάρτητες στροφές: τρεις προωθήσεις και τρεις στροφές των χωρικών αξόνων. Γενικά, σε ένα χώρο  $N$  διαστάσεων δεν έχει νόημα να μιλάμε για στροφή γύρω από κάποιον άξονα, όπως συνηθίζουμε να αναφέρουμε στον τρισδιάστατο χώρο. Οι στροφές νοούνται ως στροφές ενός επιπέδου. Επομένως, οι δυνατές στροφές είναι τόσες όσα τα διαφορετικά επίπεδα, δηλαδή  $\binom{N}{2}$ . Απλώς, συμπτωματικά, στο χώρο των τριών διαστάσεων οι δυνατές στροφές είναι τόσες όσοι και οι κάθετοι μεταξύ τους άξονες, γι' αυτό και κατά λάθος παρασυρόμαστε και χρησιμοποιούμε την έννοια της στροφής γύρω από κάποιον άξονα.

**Άσκηση 6.25.** Γράψτε τον πίνακα μετασχηματισμού προώθησης κατά τον άξονα  $y$ . Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμά σας ακολουθώντας την εξής κατασκευή: στρίψτε αρχικά τις χωρικές συντεταγμένες έτσι ώστε ο άξονας  $x$  να συμπέσει με τον άξονα  $y$ . Εφαρμόστε κατόπιν το μετασχηματισμό προώθησης της σχέσης (6.64), και ξαναστρίψτε αντίστροφα τις τελικές χωρικές συντεταγμένες ώστε ο άξονας  $x'$  να συμπέσει με τον  $x$ . Είναι ο τελικός μετασχηματισμός αυτός που γράψατε προηγουμένως; Αν ναι, τότε εκτελέσατε τις πράξεις σωστά!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη διαδοχική δράση μετασχηματισμών Lorentz σε μη παράλληλους άξονες κατ' αντιστοιχία με τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς στροφής σε μη παράλληλους άξονες. Προκειμένου να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς θα θεωρήσουμε τέσσερις μετασχηματισμούς Lorentz που εκτελούνται σε κάθετες διευθύνσεις ο καθένας σε σχέση με τον προηγούμενο, αλλά με την ίδια μικρή ταχύτητα  $u$ . Θεωρούμε, λοιπόν, το μετασχηματισμό

$$\mathbf{L}(-u\hat{y})\mathbf{L}(-u\hat{x})\mathbf{L}(u\hat{y})\mathbf{L}(u\hat{x}), \quad (6.65)$$

ο οποίος αποτελείται από μία προώθηση με ταχύτητα  $u$  κατά τον άξονα  $\hat{x}$  που ακολουθείται από μία ιδίου μέτρου προώθηση κατά τον άξονα  $\hat{y}$  και έπειτα διαδοχικά από προωθήσεις με ταχύτητα  $-u$  στους άξονες  $\hat{x}$  και  $\hat{y}$ . Αναπτύσσοντας τους αντίστοιχους πίνακες μετασχηματισμού και κρατώντας όρους μέχρι τάξης  $(u/c)^2$  έχουμε

$$\mathbf{L}(\pm u\hat{x}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(u/c)^2 & \mp(u/c) & 0 & 0 \\ \mp(u/c) & 1 + \frac{1}{2}(u/c)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.66)$$

$$\mathbf{L}(\pm u\hat{y}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(u/c)^2 & 0 & \mp(u/c) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mp(u/c) & 0 & 1 + \frac{1}{2}(u/c)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.67)$$

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες αυτούς με τη σειρά που εμφανίζονται στη σχέση (6.65) καταλήγουμε στο ακόλουθο μη μοναδιαίο αποτέλεσμα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -(u/c)^2 & 0 \\ 0 & (u/c)^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}((u/c)^3).$$

Η μη μεταθετικότητα των μετασχηματισμών Lorentz σε τυχαίες κατευθύνσεις, η οποία κρύβεται πίσω από το μη μοναδιαίο τελικό αποτέλεσμα των τεσσάρων, αλληλοεξουδετερούμενων κλασικά, προωθήσεων που γράψαμε παραπάνω –κατ' απόλυτη αναλογία με τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς στροφής– οδήγησε σε ένα εντυπωσιακό αποτέλεσμα. Ο τελικός

Οι προωθήσεις σε διαφορετικούς άξονες δεν μετατίθενται

Η μετάπτωση Thomas ως αποτέλεσμα της μη μεταθετικότητας των μετασχηματισμών Lorentz

μετασχηματισμός, στον οποίο καταλήξαμε, είναι στην ουσία ένας πίνακας που περιγράφει μια μικρή στροφή του επιπέδου  $x - y$ . Με άλλα λόγια, αν εκτελέσουμε όλες αυτές τις προωθήσεις, αντί να καταλήξουμε στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων, οι άξονες  $x_\tau, y_\tau$  του τελικού συστήματος θα έχουν στραφεί κατά γωνία  $(u/c)^2$  σε σχέση με τους αρχικούς άξονες  $x_\alpha, y_\alpha$ . Το αμιγώς σχετικιστικό αυτό φαινόμενο της στροφής, το οποίο υπολόγισε το 1927 πρώτος ο Llewellyn Hilleth Thomas [1903-1992], ονομάζεται *μετάπτωση Thomas*, παρατηρείται στο σπιν του ηλεκτρονίου των ατόμων και έχει άμεσες επιπτώσεις στο ενεργειακό φάσμα τους. Ο λόγος που το φαινόμενο Thomas παρατηρήθηκε για πρώτη φορά στο άτομο είναι επειδή η κίνηση του ηλεκτρονίου πραγματοποιείται με αρκετά μεγάλη ταχύτητα συγκριτικά με την ταχύτητα του φωτός. Ύστερα από αυτή την ανάλυση είναι εμφανής η σύνδεση της μετάπτωσης της σφούρας και της μετάπτωσης Thomas με τη μη αβελιανότητα των αντίστοιχων μετασχηματισμών που διέπουν τις δύο κινήσεις.

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 6.26.** Εκτιμήστε τη στροφή που εκτελεί ο άξονας της Γης (τάξη μεγέθους), όταν η Γη ολοκληρώσει μια περιφορά γύρω από τον Ήλιο, και συγκρίνετέ τη με τη μετάπτωση που γνωρίζουμε ότι εκτελεί ο άξονας της Γης με περίοδο 26000 χρόνια εξαιτίας της αλληλεπίδρασης του πεπλατυσμένου σχήματός της με το βαρυντικό πεδίο του Ήλιου. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το προηγούμενο αναλυτικό αποτέλεσμα θεωρώντας πως η Γη εκτελεί ... τετράγωνη τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Το αποτέλεσμα στο οποίο θα καταλήξετε ίσως εξηγήσει με μεγαλύτερη σαφήνεια για ποιο λόγο η μετάπτωση Thomas ανιχνεύθηκε για πρώτη φορά στο μικρόκοσμο και όχι στο μακρόκοσμο.

## 6.13 Η Λαγκρανζιανή ελεύθερου σχετικιστικού σωματιδίου

Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας η κίνηση ενός σωματιδίου διαγράφεται όχι σε έναν τρισδιάστατο αλλά σε έναν τετραδιάστατο χώρο, το *χωρόχρονο του Minkowski*,<sup>24</sup> αφού αυτό που διατηρείται αναλλοίωτο δεν είναι το μήκος της τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο (θυμηθείτε τη σχετικιστική συστολή μήκους κατά μήκος της σχετικής κίνησης του σωματιδίου), αλλά το ιδιόμορφο χωροχρονικό μήκος που ορίσαμε πρωτίτερα (βλ. σχέση (6.12)). Έτσι, η λαγκρανζιανή συνάρτηση του σωματιδίου πρέπει να είναι συνάρτηση των τεσσάρων συντεταγμένων της θέσης του στο χωρόχρονο, των αντίστοιχων τεσσάρων ταχυτήτων και μιας απόλυτης παραμέτρου κατά μήκος της τροχιάς. Στη νευτώνεια μηχανική, εξάλλου, δεν παίζει ο χρόνος το ρόλο μιας τέτοιας απόλυτης παραμέτρου,<sup>25</sup> Γεννάται,

<sup>24</sup>Ο Hermann Minkowski [1864-1909] καθηγητής του Einstein στο ETH της Ζυρίχης ήταν ο πρώτος που συνέλαβε την ιδέα του τετραδιάστατου χωρόχρονου και συνέγραψε ένα καταπληκτικό σχετικό άρθρο το 1907 (βλ. το άρθρο του στο βιβλίο *The Principle of Relativity*).

<sup>25</sup>Ο νευτώνειος χρόνος είναι μέγεθος απόλυτο και αποτελεί ουσιαστικά ένα είδος παραμετροποίησης της τροχιάς.

λοιπόν, το εξής ερώτημα: ποια πρέπει να είναι αυτή η παράμετρος και τι εννοούμε, όταν λέμε ταχύτητα μεταβολής των τεσσάρων συντεταγμένων και ειδικότερα ταχύτητα μεταβολής του χρόνου; Έχουμε, ήδη, έτοιμη μία ποσότητα, η οποία είναι απόλυτη, με την έννοια ότι το μέγεθός της είναι σταθερό και δεν αλλάζει αν εκτελέσουμε οποιαδήποτε στροφή<sup>26</sup> του συστήματος των συντεταγμένων. Πρόκειται για το χωροχρονικό μήκος της τροχιάς του σωματιδίου στο χωρόχρονο

$$s_{\text{ολ}} = \int ds = \int \sqrt{-(c dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (6.68)$$

Επειδή, όμως, το χωρικό μέρος  $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  της τροχιάς του σωματιδίου είναι μικρότερο από το αντίστοιχο χρονικό μήκος του  $c dt$  (αφού  $u < c$ ), θα ήταν προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε την επίσης αναλλοίωτη ποσότητα

$$\tau_{\text{ολ}} = \int d\tau = \int \sqrt{(c dt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}, \quad (6.69)$$

η οποία είναι πραγματική και όχι φανταστική όπως η  $s_{\text{ολ}}$ . Πρόκειται για τον αποκαλούμενο *ιδιόχρονο*<sup>27</sup> του σωματιδίου, δηλαδή το συνολικό χρονικό μήκος της καμπύλης όπως αυτό καταγράφεται από το σύστημα αναφοράς του ίδιου του σωματιδίου.<sup>28</sup>

Από τη στιγμή που διαθέτουμε μια απόλυτη παράμετρο της τροχιάς, όλες οι συντεταγμένες που περιγράφουν την τροχιά μπορούν να θεωρηθούν ως συναρτήσεις αυτής της παραμέτρου

$$t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau),$$

οπότε είναι φυσικό να θεωρήσουμε ως ταχύτητες μεταβολής των συντεταγμένων τους ρυθμούς μεταβολής τους ως προς την παράμετρο αυτή. Η Λαγκρανζιανή, επομένως, ενός σχετικιστικού σωματιδίου θα έχει γενικά τη μορφή

$$L_{\text{σχετ}} = L \left( c t, x, y, z, \frac{c dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, \tau \right).$$

<sup>26</sup>Η έννοια της στροφής στην περίπτωση του τετραδιάστατου χωρόχρονου είναι ευρύτερη από την έννοια της στροφής του τρισδιάστατου ευκλείδειου χώρου και συμπεριλαμβάνει όλους τους μετασχηματισμούς που αφήνουν αναλλοίωτο το χωροχρονικό μήκος.

<sup>27</sup>Συνήθως ιδιόχρονος καλείται η ποσότητα  $\tau/c$ , η οποία δεν έχει διαστάσεις μήκους, όπως η ποσότητα της σχέσης (6.69), αλλά διαστάσεις χρόνου. Η επιλογή στο κείμενο έγινε για καθαρά λόγους οικονομίας στη χρήση του συντελεστή  $c$ . Βέβαια, εξαιτίας της παγκοσμιοτητας της ταχύτητας του φωτός θα μπορούσε να πει κανείς ότι οι διαστάσεις μήκους και χρόνου είναι απόλυτα συνδεδεμένες μεταξύ τους και να θεωρήσει ότι και τα δύο μέγεθη μετρώνται ως μήκη.

<sup>28</sup>Το σύστημα αναφοράς του σωματιδίου από τη στιγμή που μεταβάλλεται η ταχύτητά του, όντας μη αδρανειακό, είναι ακατάλληλο για την καταμέτρηση των χωροχρονικών συντεταγμένων. Αντ' αυτού μπορούμε να θεωρήσουμε μια σειρά αδρανειακών παρατηρητών που ο καθένας κινείται όπως κινείται και το σωματίδιο στιγμιαία, σε διαδοχικές στιγμές της ζωής του. Οι συντεταγμένες που μετράνε οι αδρανειακοί αυτοί παρατηρητές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των χωροχρονικών διαστημάτων στο ιδιόσύστημα του σωματιδίου.

Ο απόλυτος  
ιδιόχρονος στη  
θέση του νευτώνειου  
χρόνου

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 6.27.** Υποθέστε ότι ένα ελεύθερο σωματίδιο κινείται στο νευτώνειο κόσμο επάνω σε ένα επίπεδο. Υπάρχουν δύο επιλογές για την απόλυτη παράμετρο που θα χρησιμοποιήσουμε για να παραμετροποιήσουμε την τροχιά του σωματιδίου: η μία είναι ο νευτώνειος παγκόσμιος χρόνος και η άλλη είναι το μήκος της τροχιάς, το οποίο δεν εξαρτάται από το πώς θα τοποθετήσουμε τους άξονες για να καταγράψουμε την κίνηση του σωματιδίου. Έως αυτό το σημείο στο βιβλίο ακολουθήσαμε την πρώτη επιλογή. Ας δοκιμάσουμε, τώρα, να χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη επιλογή. Σε αυτή την περίπτωση η Λαγκρανζιανή θα είναι της μορφής

$$L(x, y, dx/ds, dy/ds, s),$$

όπου

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},$$

και  $s = \int ds$ . Το ενδιαφέρον εδώ είναι ότι με βάση αυτή τη νέα επιλογή της απόλυτης παραμέτρου της κίνησης οι “ταχύτητες” είναι στην πραγματικότητα οι τριγωνομετρικοί αριθμοί που αντιστοιχούν στην κλίση της τροχιάς, οπότε

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1.$$

Λόγω της ομογένειας και της ισοτροπίας του χώρου για το ελεύθερο σωματίδιο η  $L$  δεν πρέπει να εξαρτάται ούτε από τις θέσεις ούτε από τις “ταχύτητες”-κατευθύνσεις της κίνησης. Αυτό σημαίνει ότι δεν εξαρτάται από τίποτε; Φυσικά δεν είναι δυνατόν να συμβαίνει κάτι τέτοιο, επειδή, αν συνέβαινε, δεν θα μπορούσαμε να εξαγάγουμε εξισώσεις κίνησης. Δεν μένει, λοιπόν, τίποτε άλλο από το να είναι η Λαγκρανζιανή μια σταθερά, γραμμένη όμως σε τέτοια μορφή, ώστε να εμπεριέχει τη θέση ή/και την “ταχύτητα”. Η προηγούμενη έκφραση για την “ταχύτητα” είναι ακριβώς ό,τι χρειάζεται. Χρησιμοποιήστε, λοιπόν, ως Λαγκρανζιανή τη μονάδα εκπεφρασμένη ως συνάρτηση των “ταχυτήτων” και λύστε τις αντίστοιχες εξισώσεις Euler - Lagrange. Οι λύσεις αυτών των εξισώσεων δείχνουν απλώς ότι το ελεύθερο σωματίδιο κινείται σε μια ευθεία, αλλά δεν μας πληροφορούν για το ότι η κίνηση είναι ισοταχής. Τι θα απαντούσατε σχετικά με την αδυναμία μας να επιβεβαιώσουμε με τη νέα αυτή λαγκρανζιανή συνάρτηση ότι η κίνηση είναι ισοταχής; Μήπως ο χρόνος δεν είναι τίποτε άλλο από παράγωγο μέγεθος της κίνησης του ελεύθερου σωματιδίου;

Οι συμμετρίες που επικαλεστήκαμε στο Κεφάλαιο 5, όταν προσπαθήσαμε να κατασκευάσουμε τη Λαγκρανζιανή του ελεύθερου κλασικού σωματιδίου, δηλαδή η ομογένεια και η ισοτροπία του χώρου καθώς και η ομογένεια του χρόνου, μπορούν κάλλιστα να χρησιμοποιηθούν και για τη Λαγκρανζιανή του σχετικιστικού ελεύθερου σωματιδίου. Όντας, μάλιστα, ο χώρος και ο χρόνος αλληλένδετοι, οι διάφορες αυτές συμμετρίες συνδυάζονται στην απλούστερη ομογένεια και ισοτροπία του ενιαίου χωρόχρονου.<sup>29</sup> Είναι ενδιαφέρον ότι η ισοτροπία του χωρόχρονου περικλείει

<sup>29</sup>Θα μπορούσε ίσως κάποιος να εγείρει την ακόλουθη ένσταση σχετικά με την παραδοχή ισοτροπίας του χωρόχρονου: αφού ο τρόπος με τον οποίο λαμβάνουμε το χρονικό μήκος είναι διαφορετικός από αυτόν με τον οποίο μετράμε το χωρικό μήκος, υπάρχει κάποια ξεχωριστή διεύθυνση στο χωρόχρονο (αυτή του χρόνου) και συνεπώς θα πρέπει να είμαστε κάπως επιφυλακτικοί στο να θεωρούμε το χωρόχρονο ισότροπο. Η απάντηση είναι ότι η ιδιαίτερη συμπεριφορά του χρόνου έχει ήδη ληφθεί υπόψη στον τρόπο με τον οποίο εκτελούμε τις στροφές σε χωρο-χρονικά επίπεδα και κατόπιν αυτού τίποτε το ξεχωριστό δεν συμβαίνει με τη διεύθυνση του χρόνου. Εξάλλου, αν καταφύγουμε σε φανταστικό χρόνο  $t \rightarrow it$ , ο χωρόχρονος μετατρέπεται σε έναν ευκλείδειο χώρο τεσσάρων διαστάσεων, στον οποίο μπορούμε να εκτελούμε οποιαδήποτε στροφή (που έχει τη μία συντεταγμένη καθαρά φανταστική) και έτσι καμιά διεύθυνση δεν φαίνεται να ξεχωρίζει.

εκτός της ισοτροπίας του χώρου και άλλη μια συμμετρία, τη γαλιλαϊκή, αφού οι στροφές σε ένα χωρο-χρονικό επίπεδο, για παράδειγμα στο επίπεδο  $x - t$ , δεν είναι τίποτε άλλο, όπως δείξαμε παραπάνω, από μετασχηματισμούς προώθησης, δηλαδή αλλαγές αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Η συμμετρία, λοιπόν, αυτή του χωρόχρονου (η ομογένεια και η ισοτροπία) περικλείει όλες τις επί μέρους συμμετρίες του χώρου και του χρόνου της νευτώνειας φυσικής.

Ύστερα από αυτή την ανάλυση, αντιλαμβανόμαστε ότι η Λαγκρανζιανή του ελεύθερου σχετικιστικού σωματιδίου δεν πρέπει να εξαρτάται ούτε από τις συντεταγμένες του σωματιδίου  $c t, x, y, z$ , ούτε από τη διεύθυνση κίνησης του σωματιδίου μέσα στο χωρόχρονο, αλλά ίσως μόνο από το μέτρο της “ταχύτητας” κίνησης του σωματιδίου στο χωρόχρονο, το τετράγωνο του οποίου, όμως, είναι σταθερό και ίσο με  $-1$  (βλ. Άσκηση 6.28)!

**Άσκηση 6.28.** Δείξτε ότι

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$-\left(\frac{c dt}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = -1.$$

Δεν απομένει, λοιπόν, τίποτε άλλο από το να είναι η Λαγκρανζιανή μια συνάρτηση του  $\tau$ ,  $L(\tau)$ . Ας μην ξεχνάμε, ωστόσο, ότι ο ιδιόχρονος  $\tau$  χρησιμοποιήθηκε ως παράμετρος της τροχιάς ακριβώς επειδή είναι μια αναλλοίωτη ποσότητα που δεν εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς το οποίο θα επιλέξουμε για να περιγράψουμε την κίνηση του ελεύθερου σωματιδίου. Σε αυτό το σημείο θα ισχυριζόταν κανείς ότι κάθε συνάρτηση του ιδιόχρονου θα μπορούσε να παίξει εξίσου καλά το ρόλο του  $\tau$ , καθώς επίσης και κάθε συνάρτηση στη θέση της Λαγκρανζιανής  $L$  θα ήταν αποδεκτή. Πράγματι, αυτή η ελευθερία υπάρχει αλλά δεν έχει ιδιαίτερη φυσική σημασία. Έστω, για παράδειγμα, ότι η δράση του ελεύθερου σωματιδίου είναι

$$S[\gamma] = \int_{\gamma} L(f(\tau')) d\tau' = S(\tau),$$

όπου η  $f(\tau)$  παίζει το ρόλο της νέας αναλλοίωτης παραμέτρου που αντικαθιστά τον ιδιόχρονο. Αν αυτή η συνάρτηση της δράσης είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση του ιδιόχρονου

$$\tau = \int_{\gamma} d\tau'$$

κατά μήκος της καμπύλης που συνδέει το αρχικό με το τελικό γεγονός, τότε η καμπύλη  $\gamma$  που καθιστά στάσιμη τη γενική δράση  $S$  θα καθιστά στάσιμο και τον ιδιόχρονο  $\tau$  κατά μήκος αυτής της καμπύλης. Αυτό είναι σε θέση να το αντιληφθεί κανείς παρατηρώντας ότι, αν η διαδρομή αλλάξει έτσι ώστε να αλλάξει ο ιδιόχρονος, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο θα

αλλάζει και η γενική συνάρτηση  $S$ . Επομένως, η στασιμότητα του ιδιόχρονου προκαλεί και στασιμότητα της  $S$ . Αν όμως η γενική δράση  $S$  δεν είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση του  $\tau$ , τότε δεν έχει νόημα να μιλάμε για στάσιμες τιμές της  $S$ . Για παράδειγμα, αν  $S(\tau) = 2\tau - \tau^2$ , τότε κάθε διαδρομή στο χωρόχρονο με συνολικό ιδιόχρονο  $\tau_{ολ} = 1$  θα είναι στάσιμη, αφού οι μεταβολές της διαδρομής που θα προκαλέσουν μεταβολή του  $\tau$  σε πρώτη τάξη, θα μεταβάλλουν την  $S$  σε δεύτερη τάξη. Συνάγουμε, λοιπόν, ότι οι μόνες λογικές δράσεις που μπορεί να κατασκευάσει κανείς είναι γνησίως μονότονες συναρτήσεις του ιδιόχρονου και μάλιστα όλες οι γνησίως μονότονες συναρτήσεις του ιδιόχρονου στασιμοποιούνται για τις ίδιες διαδρομές που στασιμοποιείται και η απλούστερη δυνατή έκφραση για τη δράση

$$S = \int d\tau . \quad (6.70)$$

Σε αυτή την περίπτωση είναι σαν να θεωρούμε τη Λαγκρανζιανή ίση με μία σταθερά,

$$L = \text{σταθερά} .$$

Φυσικά, για να έχουμε τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε εξισώσεις κίνησης, η σταθερά αυτή θα πρέπει να γραφεί εκπεφρασμένα ως το σταθερό μέτρο της “ταχύτητας”, δηλαδή ως το τετράγωνο της “ταχύτητας”.<sup>30</sup> Το συμπέρασμα, λοιπόν, στο οποίο καταλήγουμε είναι ότι η Λαγκρανζιανή του ελεύθερου σχετικιστικού σωματιδίου θα πρέπει να έχει τη μορφή

$$L = \kappa \left[ \left( \frac{cdt}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 \right]^{1/2} . \quad (6.71)$$

Η σταθερά  $\kappa$  μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα έτσι ώστε η Λαγκρανζιανή να έχει διαστάσεις ενέργειας όπως και η αντίστοιχη νευτώνεια Λαγκρανζιανή, αλλά επιπλέον πρέπει να έχει και αρνητικό πρόσημο αν θέλουμε η φυσική διαδρομή να καθιστά όχι απλώς στάσιμη, αλλά ελάχιστη τη δράση. Συνάγουμε, επομένως, ότι η Λαγκρανζιανή του ελεύθερου σωματιδίου πρέπει να έχει τη μορφή

$$L = -m_0 c \left[ \left( \frac{c dt}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 \right]^{1/2} , \quad (6.72)$$

όπου  $c$  η μοναδική παγκόσμια σταθερά με διαστάσεις ταχύτητας και  $m_0$  η μάζα του σωματιδίου, όπως αυτή μετράται στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου. Η μάζα αυτή είναι μία αναλλοίωτη ποσότητα. Η επιλογή των σταθερών για το ελεύθερο σωματίδιο είναι κάπως αυθαίρετη αφού οι εξισώσεις κίνησης δεν επηρεάζονται από την πολλαπλασιαστική σταθερά της Λαγκρανζιανής. Στη συνέχεια, όταν προσπαθήσουμε να ανακτήσουμε τη γνωστή μας Λαγκρανζιανή του νευτώνειου ελεύθερου σωματιδίου, θα αντιληφθούμε γιατί η παραπάνω επιλογή είναι επιβεδλημένη.

<sup>30</sup> Οποιαδήποτε, βέβαια, συνάρτηση του τετραγώνου της “ταχύτητας” οδηγεί στις ίδιες εξισώσεις κίνησης.

Οι συμμετρίες  
οδηγούν σε  
Λαγκρανζιανή  
ίση με μια σταθερά

Η πλήρης μορφή της  
Λαγκρανζιανής

**Άσκηση 6.29.** Δείξτε ότι από όλες τις καμπύλες που συνδέουν δύο σημεία (γεγονότα) του χωρόχρονου με χρονική απόσταση  $\Delta t$  μεγαλύτερη της χωρικής τους απόστασης  $|\Delta \vec{x}|$  η ευθεία είναι αυτή που αντιστοιχεί σε μέγιστη τιμή του ιδιόχρονου. Προκειμένου, λοιπόν, να καταστήσουμε ελάχιστη τη δράση, θεωρούμε ότι η Λαγκρανζιανή είναι μία αρνητική σταθερά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 6.30.** Δείξτε ότι οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από την παραπάνω Λαγκρανζιανή αντιστοιχούν σε ομαλή κίνηση, δηλαδή

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \text{σταθερά} .$$

**Άσκηση 6.31.** Ένας εναλλακτικός τρόπος γραφής της δράσης, ο οποίος αναγνωρίζει βέβαια ότι η δράση είναι ο ιδιόχρονος, αλλά παρακάμπτει το πρόβλημα αντικατάστασης της σταθερής Λαγκρανζιανής με το σταθερό μέτρο της “ταχύτητας”, είναι να χρησιμοποιήσουμε πολλαπλασιαστή Lagrange για να επιβάλουμε τη σύνδεση μεταξύ των συντεταγμένων και του ιδιόχρονου. Έτσι, ως δράση την

$$S = \kappa \int d\tau \left( 1 - \lambda \left[ \left( \frac{c dt}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 - 1 \right] \right) . \quad (6.73)$$

Η εξίσωση Euler - Lagrange για τη νέα αυτή Λαγκρανζιανή ως προς  $\lambda$  δημιουργεί τη σωστή συσχέτιση των  $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$  και  $\tau$ , ενώ οι υπόλοιπες εξισώσεις Euler - Lagrange οδηγούν στη σωστή “κίνηση” στο χωρόχρονο του ελεύθερου σωματιδίου. Υπολογίστε αυτή την “κίνηση”.

Στη γενική θεωρία της σχετικότητας, όπου η γεωμετρία του χώρου αλλάζει από σημείο σε σημείο και δεν περιγράφεται μέσω της επίπεδης μετρικής του Minkowski, η αντίστοιχη εξίσωση συνδέσμου που πολλαπλασιάζεται με τον πολλαπλασιαστή Lagrange (η ποσότητα εντός της αγκύλης [...]) είναι η ακόλουθη

$$-g_{\mu\nu}(x_\alpha) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - 1 ,$$

όπου οι δείκτες  $\mu, \nu$  παίρνουν όλες τις τιμές 0, 1, 2, 3 και υπονοείται άθροιση σε όλες τις τιμές των ζευγών δεικτών. Η μόνη διαφορά από την έκφραση (6.73) είναι ότι αντικαταστήσαμε τη μετρική του Minkowski

$$n_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

από τη γενική μετρική  $g_{\mu\nu}$  η οποία θεωρούμε τώρα ότι είναι συνάρτηση της θέσης. Δείξτε ότι η νέα Λαγκρανζιανή οδηγεί στη λεγόμενη γεωδαισιακή εξίσωση

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial g_{\sigma\kappa}}{\partial x^\nu} \right) \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} . \quad (6.74)$$

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την υποτιθέμενη συμμετρικότητα της μετρικής ( $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ) και το γεγονός ότι ο  $g^{\mu\nu}$  είναι ο αντίστροφος πίνακας της  $g_{\mu\nu}$ , δηλαδή,  $g_{\mu\nu} g^{\nu\kappa} = \delta_\mu^\kappa$ , και αγνοήστε οποιαδήποτε άλλη σημασία της θέσης των δεικτών, επάνω ή κάτω.] Η νευτώνεια προσέγγιση της παραπάνω έκφρασης είναι η

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{g}(\vec{x}) , \quad (6.75)$$

όπου  $\vec{g}$  είναι η τοπική επιτάχυνση της βαρύτητας. Θεωρώντας ότι οι τέσσερις ποσότητες  $dx^k/d\tau$  για κλασικές ταχύτητες είναι με πολύ καλή προσέγγιση  $(1, 0, 0, 0)$  και ότι η μετρική δεν εξαρτάται από το χρόνο  $t$  ώστε να οδηγεί σε σταθερό βαρυτικό πεδίο, υπολογίστε τη μορφή του στοιχείου  $g_{00}(\vec{x})$  της μετρικής ώστε η έκφραση (6.75) να συμπίπτει με την (6.74). [Υπόδειξη: Θεωρήστε ότι η μετρική  $g_{\mu\nu}$  διαφέρει ελάχιστα από την  $\eta_{\mu\nu}$ .]

Αν θέλουμε να επανέλθουμε στις φυσικές συντεταγμένες, οι οποίες συνδέονται περισσότερο με την καθημερινή μας εμπειρία, διαπιστώνουμε ότι το ολοκλήρωμα της δράσης λαμβάνει τη μορφή

$$S = -m_0 c^2 \int \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{u}}{c}\right)^2} dt. \quad (6.76)$$

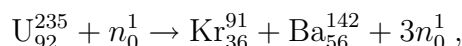
Αναπτύσσοντας την παραπάνω έκφραση ως προς τη μικρή, για κλασικές κινήσεις, ποσότητα

$$\left(\frac{\vec{u}}{c}\right)^2,$$

διαπιστώνουμε ότι η δράση λαμβάνει τη μορφή

$$S = \int \left[ \frac{1}{2} m_0 \vec{u}^2 - m_0 c^2 + \mathcal{O}((\vec{u}^2/c^2)^2) \right] dt. \quad (6.77)$$

Η πασίγνωστη ποσότητα  $m_0 c^2$  είναι κάτι σαν μια εσωτερική δυναμική ενέργεια των σωματιδίων, η οποία μπορεί να εκδηλώσει την παρουσία της, αν επιτρέψουμε στα σωματίδια να μην διατηρούν τη μάζα τους. Αυτό ακριβώς συμβαίνει κατά την πυρηνική αντίδραση της σχάσης του ραδιοϊσότοπου του ουρανίου



όπου το πλεόνασμα της μάζας των αντιδρώντων έναντι των προϊόντων άφησε ανεξίτηλα τα ίχνη του στην παγκόσμια ιστορία του δεύτερου μισού του εικοστού αιώνα.

## 6.14 Συμμετρίες και διατηρούμενες ποσότητες συστήματος ελεύθερων σωματιδίων στη σχετικότητα

Η δράση που αναφέρεται στην κίνηση  $N$  σωματιδίων, τα οποία δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, είναι το άθροισμα των επί μέρους δρά-

σεων<sup>31</sup>

$$S = \sum_{j=1}^N \int \left[ (-m_0^{(j)} c \sqrt{\left(\frac{c dt}{d\tau_j}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{x}^{(j)}}{d\tau_j}\right)^2} \right] d\tau_j. \quad (6.78)$$

Εκ κατασκευής η δράση αυτή είναι αναλλοίωτη σε μεταθέσεις χωρικές και χρονικές (ομογένεια του χωρόχρονου) καθώς και σε στροφές χωρικές και χωροχρονικές (ισοτροπία του χωρόχρονου). Κατ' αναλογία με τα όσα είδαμε στο Κεφάλαιο 5 περί συμμετριών οι αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες είναι τα γινόμενα των γεννητόρων των συμμετριών με τις αντίστοιχες ορμές.

Κατ' αρχάς η τετράδα<sup>32</sup> των συνιστωσών της ορμής του συστήματος που αναφέρεται στο  $j$ -στό σωματίδιο είναι η

$$p_t^{(j)} = \frac{\partial L}{\partial[(c dt/d\tau_j)]} = -m_0^{(j)} c \frac{d(c t)}{d\tau_j}, \quad (6.79)$$

$$\vec{p}^{(j)} = \frac{\partial L}{\partial[d\vec{x}^{(j)}/d\tau_j]} = m_0^{(j)} c \frac{d\vec{x}^{(j)}}{d\tau_j}. \quad (6.80)$$

Η υπόρριζος ποσότητα στην (6.78) είναι μονάδα, οπότε μπορούμε να τη σθήσουμε, αφότου εκτελέσουμε τις παραγωγίσεις. Οι ορμές αυτές είναι, στην ουσία, οι συνιστώσες της λεγόμενης *τετραορμής* του κάθε σωματιδίου και ακριβέστερα οι συναλλοίωτες συνιστώσες αυτής, που αποτελούν το σχετικιστικό ανάλογο των συνιστωσών της κλασικής ορμής. Λαμβάνοντας το όριο των ποσοτήτων αυτών για μικρές ταχύτητες, διαπιστώνουμε ότι μπορεί κανείς δικαιολογημένα να αποκαλεί τις τέσσερις αυτές συνιστώσες αντίστοιχα ενέργεια (εδώ εμφανίζεται με αρνητικό πρόσημο εξαιτίας του ιδιόμορφου μέτρου του χωρόχρονου) και οι τρεις συνιστώσες της χωρικής ορμής του συστήματος. Οι συνιστώσες της τετραορμής θα μπορούσαν επίσης να γραφούν πιο απλά, χωρίς να εμπλέκεται ο ιδιόχρονος του κάθε σωματιδίου, τον οποίο δεν μπορούμε εξάλλου να συνειδητοποιήσουμε αφού ζούμε σε έναν κόσμο όπου η παγκοσμιότητα του χρόνου φαίνεται να είναι αδιαμφισβήτητη. Εφόσον

$$\begin{aligned} d\tau_j &= \sqrt{(c dt)^2 - (d\vec{x}^{(j)})^2} \\ &= c dt \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{u}^{(j)}}{c}\right)^2} \\ &= \frac{c dt}{\gamma_j}, \end{aligned}$$

<sup>31</sup>Στις ακόλουθες σχέσεις η χρονική συνιστώσα  $t$  εμφανίζεται κοινή για όλα τα σωματίδια, αφού θεωρούμε ότι παρατηρούμε τη θέση και την ταχύτητα του κάθε σωματιδίου σε κάποιο σύστημα αναφοράς σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Αν αλλάξουμε σύστημα αναφοράς, πάλι θα μετράμε τις θέσεις και τις ταχύτητες σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή του νέου συστήματος. Ωστόσο, η ατομική ροή του χρόνου για το κάθε σωματίδιο, δηλαδή ο ιδιόχρονός του, θα διαφέρει από σωματίδιο σε σωματίδιο.

<sup>32</sup>Λόγω τετραδιάστατου χώρου.

όπου ορίσαμε ως

$$\gamma_j \equiv (1 - (\vec{u}^{(j)}/c)^2)^{-1/2},$$

οι συνιστώσες της τετραορμής μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$p_t^{(j)} = -\frac{E^{(j)}}{c} = -\gamma_j m_0^{(j)} c, \quad (6.81)$$

$$\vec{p}^{(j)} = \gamma_j m_0^{(j)} \vec{u}^{(j)} c. \quad (6.82)$$

Η συμμετρία της ομογένειας του χωρόχρονου

Από τη στιγμή που οι γεννήτορες των χρονικών και των χωρικών μεταθέσεων για κάθε σωματίδιο είναι οι

$$\begin{aligned} K_t^{(j)} &= (1, 0, 0, 0), & K_x^{(j)} &= (0, 1, 0, 0), \\ K_y^{(j)} &= (0, 0, 1, 0), & K_z^{(j)} &= (0, 0, 0, 1), \end{aligned} \quad (6.83)$$

όπου η τετράδα των αριθμών αντιστοιχεί στις  $t, x, y, z$  συνιστώσες του τετρανύσματος του γεννήτορα, αυτό που τελικά διατηρείται εξαιτίας των συμμετριών μετάθεσης είναι οι τέσσερις συνιστώσες της ορμής των σχέσεων (6.79) και (6.80) αθροιζόμενες για όλα τα σωματίδια, δηλαδή η συνολική ενέργεια και οι τρεις συνιστώσες της ολικής χωρικής ορμής του συστήματος

$$E_{\text{ολ}} = \sum_{j=1}^N E_j, \quad \vec{P}_{\text{ολ}} = \sum_{j=1}^N \vec{p}^{(j)}. \quad (6.84)$$

Ας δούμε, τώρα, τι συμβαίνει και με τις στροφές. Όταν οι στροφές σχετίζονται αποκλειστικά με τον τρισδιάστατο χώρο, οι γεννήτορες για κάθε σωματίδιο είναι της μορφής

$$\begin{aligned} K_{xy}^{(j)} &= (0, -y^{(j)}, x^{(j)}, 0), \\ K_{yz}^{(j)} &= (0, 0, -z^{(j)}, y^{(j)}), \\ K_{xz}^{(j)} &= (0, z^{(j)}, 0, -x^{(j)}), \end{aligned} \quad (6.85)$$

(βλ. Κεφάλαιο 5). Αντίστοιχα, οι γεννήτορες των στροφών στα τρία χωροχρονικά επίπεδα έχουν συνιστώσες

Οι γεννήτορες των στροφών στο χωρόχρονο...

$$\begin{aligned} K_{tx}^{(j)} &= (-x^{(j)}, -ct, 0, 0), \\ K_{ty}^{(j)} &= (-y^{(j)}, 0, -ct, 0), \\ K_{tz}^{(j)} &= (-z^{(j)}, 0, 0, -ct). \end{aligned} \quad (6.86)$$

Το γιατί οι γεννήτορες αυτοί έχουν τούτη τη μορφή μπορεί κανείς να το καταλάβει αν θεωρήσει τον πίνακα στροφής  $\mathbf{L}_4$  της σχέσης (6.64), καθώς και τους αντίστοιχους πίνακες για προώθηση στον  $y$  και  $z$  άξονα, για μικρές τιμές της παραμέτρου  $u/c$  και πολλαπλασιάσει με τον πίνακα αυτό το διάνυσμα της θέσης του κάθε σωματιδίου στον τετραδιάστατο χώρο. Την ίδια εξάλλου διαδικασία είχαμε ακολουθήσει για την κατασκευή των γεννητόρων της κλασικής χωρικής στροφής. Μέσω του θεωρήματος της Noether, μπορούμε για άλλη μια φορά να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες

διατηρούμενες ποσότητες ως εξής:

$$l_{xy} = \sum_{j=1}^N (x^{(j)} p_y^{(j)} - y^{(j)} p_x^{(j)}) = \sum_{j=1}^N (\vec{x}^{(j)} \times \vec{p}^{(j)})_z \quad (6.87)$$

$$l_{yz} = \sum_{j=1}^N (y^{(j)} p_z^{(j)} - z^{(j)} p_y^{(j)}) = \sum_{j=1}^N (\vec{x}^{(j)} \times \vec{p}^{(j)})_x \quad (6.88)$$

$$l_{zx} = \sum_{j=1}^N (z^{(j)} p_x^{(j)} - x^{(j)} p_z^{(j)}) = \sum_{j=1}^N (\vec{x}^{(j)} \times \vec{p}^{(j)})_y \quad (6.89)$$

$$l_{tx} = - \sum_{j=1}^N (c t p_x^{(j)} + x^{(j)} p_t^{(j)}) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{E^{(j)}}{c} \vec{x}^{(j)} - c t \vec{p}^{(j)} \right)_x \quad (6.90)$$

$$l_{ty} = - \sum_{j=1}^N (c t p_y^{(j)} + y^{(j)} p_t^{(j)}) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{E^{(j)}}{c} \vec{x}^{(j)} - c t \vec{p}^{(j)} \right)_y \quad (6.91)$$

$$l_{tz} = - \sum_{j=1}^N (c t p_z^{(j)} + z^{(j)} p_t^{(j)}) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{E^{(j)}}{c} \vec{x}^{(j)} - c t \vec{p}^{(j)} \right)_z \quad (6.92)$$

Οι ορμές  $\vec{p}^{(j)}$  που εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις δεν είναι οι κλασικές ορμές των σωματιδίων, αλλά οι γενικευμένες σχετικιστικές ορμές που ορίστηκαν μέσω της σχέσης (6.80). Ας δούμε στη συνέχεια ποιο είναι το φυσικό νόημα των διατηρούμενων αυτών ποσοτήτων. Οι τρεις πρώτες διατηρούμενες ποσότητες έχουν, τουλάχιστον τυπικά, τη μορφή των τριών συνιστωσών της κλασικής στροφορμής, ενώ οι τρεις νέες ποσότητες είναι, στο όριο των πολύ μικρών ταχυτήτων, οι τρεις διατηρούμενες ποσότητες στις οποίες είχαμε οδηγηθεί από τη γαλιλαϊκή συμμετρία της Λαγκρανζιανής συστήματος νευτώνειων σωματιδίων. Το νέο στοιχείο που εμφανίζεται εδώ είναι ότι η σταθερότητα της ταχύτητας που κρύβεται πίσω από τις τρεις διατηρούμενες αυτές ποσότητες δεν αφορά στο κέντρο μάζας, όπως στην κλασική περίπτωση, αλλά στο λεγόμενο *κέντρο ορμής*. Πιο συγκεκριμένα, το σημείο που βρίσκεται κάθε στιγμή στη θέση

$$\vec{X}_{KO}(t) = \frac{\sum_{j=1}^N \vec{x}^{(j)}(t) E^{(j)}}{\sum_{j=1}^N E^{(j)}}, \quad (6.93)$$

η οποία δεν συμπίπτει με τη θέση του κέντρου μάζας εξαιτίας των διαφορετικών μεταξύ τους παραγόντων  $\gamma_j$ , κινείται με ταχύτητα

$$\vec{V}_{KO} = \frac{\sum_{j=1}^N \vec{u}^{(j)} E^{(j)}}{\sum_{j=1}^N E^{(j)}} = \frac{\sum_{j=1}^N c \vec{p}^{(j)}(t)}{\sum_{j=1}^N E^{(j)}} c.$$

Η τελευταία αυτή ποσότητα είναι σταθερή, αφού διατηρείται η συνολική

...και οι έξι  
διατηρούμενες  
στροφορμές στο  
χωρόχρονο

τετραορμή του συστήματος. Με απλές πράξεις μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\vec{X}_{KO} = \vec{X}_0 + \vec{V}_{KO}t, \quad (6.94)$$

όπου  $\vec{X}_0$  είναι ένα σταθερό διάνυσμα, το

$$\vec{X}_0 = c \frac{(l_{tx}, l_{ty}, l_{tz})}{\sum_{j=1}^N E^{(j)}}. \quad (6.95)$$

Το σύστημα που κινείται με ταχύτητα  $\vec{V}_{KO}$  είναι αυτό στο οποίο η συνολική γενικευμένη ορμή του συστήματος είναι μηδέν. Επομένως, σε αυτό το σύστημα είναι ευκολότερη η μελέτη των αντιδράσεων μεταξύ σωματιδίων, όπως για παράδειγμα της σύγκρουσης σωματιδίων σε επιταχυντές με στόχο την παραγωγή νέων σωματιδίων.

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 6.32.** Δείξτε ότι για ταχύτητες πολύ μικρές, συγκριτικά με την ταχύτητα του φωτός, οι τρεις ποσότητες  $l_{tx}, l_{ty}, l_{tz}$  είναι ανάλογες με τις τρεις διατηρούμενες ποσότητες που προκύπτουν μέσω του θεωρήματος της Noether από τη γαλιλαϊκή συμμετρία.

**Άσκηση 6.33.** Υπολογίστε σε πρώτη προσέγγιση ως προς τα τετράγωνα των ταχυτήτων των σωματιδίων την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται το κέντρο ορμής από το κέντρο μάζας δύο σωματιδίων που κινούνται με αντίθετες ορμές.

Η σχετικιστική εικόνα για τον κόσμο είναι πιο απλή από τη νευτώνεια

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο, αξίζει να σημειώσουμε ότι η σχετικιστική μελέτη της κίνησης κρύβει στα θεμέλιά της πολύ μεγαλύτερη απλότητα από τη νευτώνεια αφού (i) αντιμετωπίζει το χρόνο απλώς ως μια νέα διάσταση του υποβάθρου στο οποίο διαδραματίζονται όλα τα φυσικά φαινόμενα, (ii) οι ομαλές κινήσεις που στη γαλιλαϊκή σχετικότητα εμφανίζονταν ως ιδιόμορφες κινήσεις παρατηρητών για τις οποίες δεν άλλαζαν οι φυσικοί νόμοι, στην ειδική σχετικότητα δεν έχουν τίποτε το ξεχωριστό· αποτελούν απλώς εκδήλωση της ισοτροπίας του χωρόχρονου σε κάθε δυνατή στροφή του συστήματος των συντεταγμένων και (iii) τα γαλιλαϊκά αναλλοίωτα δεν είναι απλώς επαναγραφή της διατήρησης της ορμής, αλλά διατηρούμενες στροφορμές στον ισότροπο τετραδιάστατο χωρόχρονο.

## 6.15 Προβλήματα

1. Κατασκευάστε τον πίνακα στροφής κατά  $\pi/2$  γύρω από τον άξονα  $x$  και τον άξονα  $y$  και στη συνέχεια δείξτε ότι η σειρά με την οποία εκτελούνται οι στροφές αυτές είναι καθοριστική για το τελικό αποτέλεσμα. Υπολογίστε τη γωνία στροφής και τον άξονα γύρω από τον οποίο εκτελείται η στροφή αυτή που ισοδυναμεί με το αποτέλεσμα των παραπάνω διαδοχικών στροφών.
2. Υπολογίστε το μεταθέτη  $[\hat{n} \cdot \vec{S}, \hat{m} \cdot \vec{S}]$ .
3. Δείξτε ότι η παραβολοειδής επιφάνεια του νερού σε ένα περιστρεφόμενο δοχείο είναι αυτή που ελαχιστοποιεί τη συνολική δυναμική ενέργεια του νερού (συμπεριλαμβανομένης και της φυγοκεντρικής δυναμικής ενέργειας) στο περιστρεφόμενο σύστημα του δοχείου. Αυτή εξάλλου είναι και η ολική ενέργεια του νερού στο περιστρεφόμενο σύστημα. Μέχρι ποιο ύψος πρέπει να γεμίσουμε με νερό ένα κυλινδρικό δοχείο έτσι ώστε, αν θέσουμε σε περιστροφή το δοχείο, να αρχίσει το νερό να ξεχειλίζει τη στιγμή ακριβώς που θα αρχίσει να διακρίνεται ο πυθμένας του δοχείου;
4. Θεωρήστε τους δύο πίνακες  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  και τη συνάρτηση του  $\lambda$ :  $f(\lambda) = e^{\lambda \mathbf{A}} \mathbf{B} e^{-\lambda \mathbf{A}}$ . Αποδείξτε ότι  $f'(\lambda) = [\mathbf{A}, f(\lambda)]$ ,  $f''(\lambda) = [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, f(\lambda)]]$ , κ.ο.κ. και συνεπώς

$$f(\lambda) = \mathbf{B} + \lambda[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \frac{\lambda^2}{2!}[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + \dots$$

Αποδείξτε τώρα ότι, αν ο πίνακας  $\mathbf{A}$  μετατίθεται με τον μεταθέτη  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ , τότε

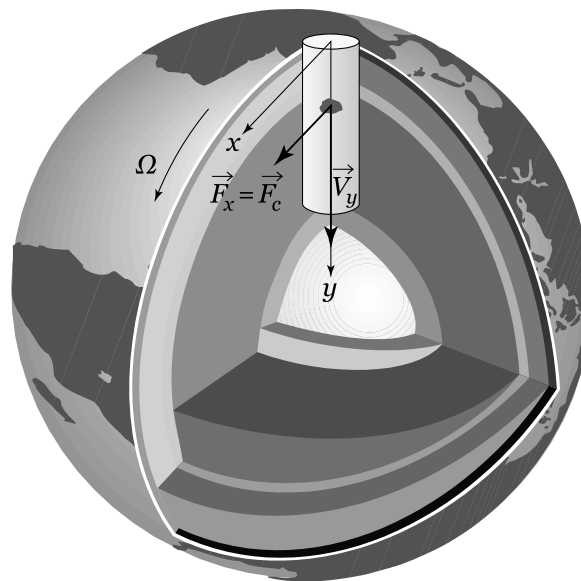
$$\exp(\mathbf{A}) \exp(\mathbf{B}) = \exp\left(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\right).$$

5. Κατά το πασχαλινό ψήσιμο του αρνιού εκτελείται για κάθε αρνί ένας μετασχηματισμός στροφής γύρω από κάποιο σταθερό άξονα. Να υπολογιστεί ο μέσος πίνακας όλων των μετασχηματισμών στροφής που θα εκτελεστούν στην Ελλάδα την ημέρα του Πάσχα. Η μέση τιμή να ληφθεί και ως προς το χρόνο ψησίματος και ως προς την κατεύθυνση της σούβλας. Υπολογίστε, επίσης, την τυπική απόκλιση αυτού του πίνακα.
6. Ένα αντικείμενο στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα η οποία εξαρτάται από το χρόνο όπως ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{\Omega}(t) = \frac{\pi}{4} |\sin t| \times \begin{cases} \hat{x}, & \text{αν } 2k\pi \leq t < (2k+1)\pi \\ \hat{y}, & \text{αν } (2k+1)\pi \leq t < (2k+2)\pi \end{cases}$$

όπου  $k$  φυσικός αριθμός. Υπολογίστε τον αντίστοιχο πίνακα στροφής για κάθε χρονικό διάστημα σταθερής κατεύθυνσης και στη συνέχεια υπολογίστε ύστερα από πόσο χρόνο το αντικείμενο θα επιστρέψει στην αρχική του θέση.

7. (i) *Στα (λανθασμένα) βήματα του Νεύτωνα:* Επαναλάβετε τον υπολογισμό του Νεύτωνα όσον αφορά στο πρόβλημα ρίψης μιας πέτρας χωρίς αρχική ταχύτητα από το άνοιγμα ενός πηγαδιού βάθους  $H$  που βρίσκεται στον Ισημερινό. (α) Με τι ταχύτητα ως προς κάποιον αδρανειακό παρατηρητή, που βρίσκεται στο κέντρο της Γης, εκτοξεύεται η πέτρα από τα χέρια αυτού που την πετά; (β) Λύστε το πρόβλημα της βολής της πέτρας μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο με την αρχική ταχύτητα που υπολογίσατε προηγουμένως, λαμβάνοντας υπόψη σας ότι το πηγάδι δεν είναι τόσο βαθύ ώστε να αλλάξει σημαντικά η βαρύτητα. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να φτάσει η πέτρα στον πυθμένα του πηγαδιού; Έως ότου φτάσει η πέτρα στον πυθμένα του πηγαδιού, υπολογίστε πόσο θα έχει μετακινηθεί η πέτρα οριζόντια ως προς τον αδρανειακό παρατηρητή. (γ) Καθ' όλη τη διάρκεια της πτώσης της πέτρας μέσα στο πηγάδι, ο πυθμένας του πηγαδιού μετακινήθηκε και αυτός λόγω της περιστροφής της Γης. Πόσο συνολικά; (δ) Πόσο μακρύτερα τελικά θα πέσει η πέτρα από το σημείο που θα έπεφτε, αν δεν περιστρεφόταν η Γη; Η ακτίνα της Γης είναι  $R$  και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της  $\Omega$ . [Απάντηση:  $\Delta x = \Omega(2H^3/g)^{1/2}$ . Αυτό ακριβώς υπολόγισε και ο Νεύτων.]



- (ii) *Διορθώνοντας τον Νεύτωνα:* Ίσως σκεφτείτε ότι η λύση που έδωσε ο Νεύτων είναι λίγο απλοϊκή, αφού δεν έλαβε υπόψη του τη σφαιρικότητα της Γης. Δεν θα συμφωνούσατε, όμως, μαζί του αν το πηγάδι είχε για παράδειγμα βάθος μόλις 1 χιλιοστό; Σε αυτή την περίπτωση είναι φυσικό να αγνοήσει κανείς την καμπυλότητα της Γης όπως αγνοεί και τη μεταβολή του  $g$  αναμένοντας μια τέτοια θεώρηση να επιφέρει διορθώσεις ανώτερης τάξης στο αποτέλεσμα. Είναι σωστή, όμως, τούτη η θεώρηση; Ας την εξετάσουμε ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα: (α) Η πέτρα, καθώς εκτελεί την οριζόντια βολή που περιγράψαμε στο ερώτημα (i) του προβλήματος, απο-

μακρύνεται από την αρχική κατακόρυφο που διέρχεται από το κέντρο της Γης. Μην ξεχνάτε ότι το κέντρο της Γης δεν κινείται ως προς τον παρατηρητή μας! Πόσο θα έχει απομακρυνθεί η πέτρα από την κατακόρυφο ύστερα από χρόνο  $t$  από την αρχή της πτώσης της; (β) Κατά την πτώση της πέτρας εμφανίζεται μια συνιστώσα της βαρυτικής έλξης που ασκείται στην πέτρα με οριζόντια προς τα πίσω κατεύθυνση. Δείξτε ότι η εξίσωση οριζόντιας κίνησης, αν λάβει κανείς υπόψη του τη συνιστώσα αυτή του βάρους είναι  $\ddot{x} = -g\Omega t$ . Ολοκληρώστε τη σχέση αυτή δύο φορές με τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες ώστε να υπολογίσετε την οριζόντια μετατόπιση της πέτρας που προκαλεί αυτή η δύναμη κατά το συνολικό χρόνο πτώσης. (γ) Αφαιρέστε τη μετατόπιση του πυθμένα του πηγαδιού που υπολογίσατε στο βήμα (γ) του ερωτήματος (i) για να υπολογίσετε τη θέση πτώσης της πέτρας σχετικά με τη θέση στην οποία θα κατέληγε η πέτρα, αν δεν περιστρεφόταν η Γη. Συμφωνεί το αποτέλεσμα αυτό με το αποτέλεσμα του Νεύτωνα; [Απάντηση:  $\Delta x = \frac{2}{3}\Omega(2H^3/g)^{1/2}$ . Το αποτέλεσμα διαφέρει κατά 1/3 από αυτό του Νεύτωνα.]

(iii) Μήπως αναρωτιέστε αν όλα αυτά είναι απλώς τεχνάσματα με μοναδικό στόχο να επιτευχθεί το σωστό αποτέλεσμα; Στο ερώτημα (ii), στο βήμα (α), υπολογίσαμε την οριζόντια απομάκρυνση της πέτρας υποθέτοντας ότι η πέτρα εκτελεί ομαλή κίνηση οριζόντια και στη συνέχεια, στο βήμα (β), υπολογίσαμε την οριζόντια συνιστώσα της βαρυτικής δύναμης που ασκείται στην πέτρα και επιβάλαμε επιτάχυνση στη δήθεν ομαλή κίνηση. Ας είμαστε, λοιπόν, περισσότερο συνεπείς στις θεωρήσεις μας. (α) Αποδείξτε ότι η οριζόντια συνιστώσα της βαρυτικής δύναμης που ασκείται στην πέτρα, όταν η πέτρα θα έχει μετακινηθεί οριζόντια κατά  $x$ , θα είναι  $F_x = -mgx/R$  (θεωρούμε ότι η απόσταση από το κέντρο της Γης παραμένει σταθερή αφού το πηγάδι δεν είναι πολύ βαθύ και επομένως  $g = \text{σταθερό}$ ). Γράψτε την εξίσωση κίνησης στον άξονα  $x$  και, αντικαθιστώντας τις σωστές αρχικές συνθήκες που υπολογίσατε στο ερώτημα (i), αποδείξτε ότι η λύση είναι

$$x(t) = \Omega \sqrt{\frac{R^3}{g}} \sin(t\sqrt{g/R}).$$

(β) Θέστε στη θέση του χρόνου το συνολικό χρόνο πτώσης της πέτρας που υπολογίσατε στο βήμα (i-β), αφαιρέστε, όπως πάντα, τη μετατόπιση του πυθμένα και θα λάβετε το αποτέλεσμα της ζητούμενης συνολικής μετατόπισης της πέτρας από την κατακόρυφο. Προς μεγάλη σας έκπληξη θα διαπιστώσετε ότι το αποτέλεσμα φαίνεται να είναι πολύ διαφορετικό από όλα τα προηγούμενα! Παρατηρήστε ότι η γωνία μέσα στο ημίτονο είναι πάρα πολύ μικρή, οπότε μπορείτε να αναπτύξετε το ημίτονο. (γ) Αρχικά κρατήστε μόνο τον πρώτο όρο. Το αποτέλεσμα συμφωνεί με αυτό του Νεύτωνα. Κρατήστε, τώρα, και το δεύτερο όρο του αναπτύγματος. Η απάντηση (αυτή του ερωτήματος (ii)) είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το προηγού-

μενο αποτέλεσμα. Τώρα που αρχίσατε να γίνεστε καχύποπτοι δοκιμάστε μήπως θα έπρεπε να κρατήσετε και τον τρίτο όρο στο ανάπτυγμα. Είναι χρήσιμος ή μήπως είναι ανώτερης τάξης; Ποιο είναι, λοιπόν, το σωστό αποτέλεσμα σε πρώτη προσέγγιση;

(iv) Η ενασχόλησή σας με το παραπάνω πρόβλημα μάλλον άρχισε να κλονίζει την εμπιστοσύνη σας στο τι θα πρέπει να θεωρούμε μικρό και αμελητέο και τι μεγάλο και υπολογίσιμο. Δεν είστε εξαρχής σίγουροι με τι ακρίβεια πρέπει να λάβετε τα διάφορα μεγέθη. Όσο για τη μεταβολή του  $g$  που αισθάνεται η πέτρα καθώς πέφτει δεν χρειάζεται να τη συμπεριλάβουμε, αφού, όπως αποδεικνύεται, οδηγεί σε διορθώσεις ανώτερης τάξης. Ας ξεφύγουμε, λοιπόν, από τη θεώρηση του Νεύτωνα και ας λύσουμε το πρόβλημά μας στο μη αδρανειακό περιστρεφόμενο σύστημα της Γης. Άλλωστε, γιατί να μην αξιοποιήσουμε τις γνώσεις μας σχετικά με τα μη αδρανειακά συστήματα; (α) Δείξτε ότι η δύναμη Coriolis που ασκείται στην πέτρα, καθώς αυτή κατευθύνεται προς τα κάτω, ενώ το πηγάδι μαζί με τη Γη στρέφονται από τα αριστερά προς τα δεξιά όπως στο παραπάνω σχήμα, έχει τη φορά που φαίνεται στο σχήμα και μέτρο  $F_C = 2m\Omega v_y$ . Υπολογίστε την κατακόρυφη ταχύτητα της πέτρας  $v_y$  σαν να επρόκειτο για απλή κατακόρυφη πτώση και στη συνέχεια ολοκληρώστε την εξίσωση κίνησης για την οριζόντια κίνηση (διπλή ολοκλήρωση) ώστε να υπολογίσετε την οριζόντια μετατόπιση της πέτρας συναρτήσει του χρόνου. Προσέξτε ότι οι αρχικές συνθήκες εδώ είναι διαφορετικές. Στο σύστημα της Γης η πέτρα είναι αρχικά ακίνητη. Τέλος, θέστε το συνολικό χρόνο πτώσης της πέτρας στη συνάρτηση της οριζόντιας θέσης και ιδού η ζητούμενη μετατόπιση! Όπως διαπιστώνετε είναι ίδια με εκείνη του ερωτήματος (ii) και (iii) (όταν κρατήσατε και το δεύτερο όρο στο ανάπτυγμα).

(v) *Ανεξάρτητα από το Νεύτωνα και τα μη αδρανειακά συστήματα:* Ας ξεκινήσουμε κάπως διαφορετικά. Ας αποφύγουμε τη θεώρηση του Νεύτωνα που όπως είδαμε μας προκάλεσε σύγχυση και μας δημιούργησε ανασφάλεια σχετικά με το ποιοι όροι είναι σημαντικοί και ποιοι δεν είναι. Ας ξεχάσουμε και τα μη αδρανειακά συστήματα που, όπως γνωρίζουμε, περιγράφουν τη συμπεριφορά των μηχανικών συστημάτων βάσει ψευδοδυνάμεων. Υπάρχει τελικά καμιά διατηρούμενη ποσότητα για την πέτρα; Φυσικά και υπάρχει· είναι η στροφορμή της, αφού η πέτρα κινείται σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων. (α) Δείξτε ότι η διατήρηση της στροφορμής της πέτρας επιβάλλει  $\Omega R^2 = \omega(R - y)^2$ , όπου  $\omega$  η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της πέτρας γύρω από το κέντρο της Γης και  $\Omega$  η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης. Η πτώση κατά  $y$  της πέτρας μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης δίνεται με απόλυτη ορθότητα για μικρά βάθη από τη γνωστή σας από το σχολείο σχέση  $y = \frac{1}{2}gt^2$ . (β) Ολοκληρώστε τη γωνιακή ταχύτητα  $\int \omega dt$ , αφού αναπτύξετε την  $\omega$  σε όρους τάξης  $(y/R)^k$ , για να βρείτε τη γωνιακή μετατόπιση που θα έχει υποστεί η πέτρα μέχρι να φθάσει στον πυθμένα του πηγαδιού.

(γ) Υπολογίστε και τη γωνιακή μετατόπιση του πυθμένα του πηγαδιού καθ' όλο αυτό το χρονικό διάστημα. (δ) Η διαφορά των δύο γωνιακών μετατοπίσεων πολλαπλασιασμένη με την ακτινική θέση του πυθμένα  $R - H$  θα δώσει την πολυσυζητημένη μετατόπιση της πέτρας. Αποφασίστε μέχρι ποιας τάξης όρους πρέπει να κρατήσετε και γράψτε το αποτέλεσμα. Τώρα θα πρέπει να νιώθετε περισσότερο σιγουριά για το σωστό αποτέλεσμα!

8. *Υπολογισμός του σχήματος της επιφάνειας της Γης*: Θεωρήστε ότι στην επιφάνεια του πλανήτη το βαρυτικό πεδίο είναι

$$-GM \frac{\vec{r}}{r^3} .$$

Αποδείξτε ότι

$$R_I - R_{\Pi} = \frac{\Omega^2 R_I^3 R_{\Pi}}{2GM} ,$$

όπου  $R_I$  η απόσταση του Ισημερινού από το κέντρο του πλανήτη και  $R_{\Pi}$  η απόσταση των Πόλων από το κέντρο του πλανήτη. Εκτιμήστε τη διαφορά  $R_I - R_{\Pi}$  για τη Γη, θεωρώντας ότι  $R_I \approx R_{\Pi} = 6400$  km. Δίνεται η μάζα της Γης  $M = 6 \times 10^{24}$  kg,  $G = 6.67 \times 10^{-11}$  N · m<sup>2</sup> · kg<sup>-2</sup> και  $\Omega = 2\pi/86400$  s<sup>-1</sup>.

9. *Υπολογισμός της πίεσης στο κέντρο ανεμοστρόβιλου*: Οι ανεμοστρόβιλοι είναι ισχυρότατοι, σχεδόν κατακόρυφοι, στρόβιλοι, οι οποίοι κατά το χρονικό διάστημα των 30 min, που είναι η τυπική διάρκεια ζωής τους, προκαλούν τεράστιες καταστροφές. Η διαδικασία δημιουργίας τους δεν έχει εξηγηθεί έως σήμερα πλήρως. Αποδείξτε ότι η πίεση στο έδαφος στο κέντρο του ανεμοστρόβιλου είναι

$$p = p_0 \exp \left( -\frac{\omega^2 r_0^2}{2R_* T} \right) ,$$

όπου  $p_0$  η πίεση στο έδαφος εκτός του ανεμοστρόβιλου,  $r_0$  η ακτίνα του ανεμοστρόβιλου,  $\omega$  η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του και  $T$  η θερμοκρασία του αέρα. Ο ανεμοστρόβιλος θεωρείται ισόθερμος. Εάν η θερμοκρασία είναι 288 K και ο ανεμοστρόβιλος έχει ακτίνα  $r_0$ , ενώ η πίεση στο έδαφος είναι 1000 mb και η ταχύτητα του ανέμου 100 m · s<sup>-1</sup>, πόση είναι η κεντρική πίεση; (Για τον αέρα η τιμή της σταθεράς του αερίου είναι  $R_* = R/MB = 287$  J · K<sup>-1</sup> · kg<sup>-1</sup>, όπου MB η γραμμομοριακή μάζα του αέρα).

10. Γνωρίζουμε ότι, όταν στρέφεται το σύστημα συντεταγμένων, δύο διανύσματα του ευκλείδειου χώρου αλλάζουν συνιστώσες, ενώ το εσωτερικό τους γινόμενο παραμένει αναλλοίωτο. Το ίδιο ισχύει και για το χωρόχρονο και τα τετρανύσματα που κατασκευάζει κανείς σε αυτόν. Η μόνη διαφορά από τον ευκλείδειο χώρο είναι ότι το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως

$$A^\mu \cdot B^\nu \equiv A^\mu B^\nu \eta_{\mu\nu} = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3$$

κατ' αναλογίαν με το μέτρο του τετρανύσματος της θέσης. Παράλληλα, η κλίση του τετρανύσματος της τετραταχύτητας με το χρονικό άξονα είναι η ταχύτητα κίνησης του σωματιδίου στο οποίο αναφέρεται η τετραταχύτητα. Υπολογίστε, λοιπόν, το εσωτερικό γινόμενο των τετραταχυτήτων δύο σωματιδίων και συνάγετε από αυτό το μέτρο της σχετικής ταχύτητας των δύο σωματιδίων. Σκεφτείτε γιατί αυτό το αναλλοίωτο μέγεθος είναι η μοναδική ποσότητα που θα μπορούσε να σχετίζεται με τη σχετική ταχύτητα των σωματιδίων.

11. Ξεκινώντας από τη μορφή του πίνακα μετασχηματισμού  $L_4$  της σχέσης (6.51) στον δισδιάστατο χώρο των  $t, x$ , υπολογίστε το γεννήτορα του αντίστοιχου μετασχηματισμού προώθησης, όπως κάναμε και με τις στροφές στο εδάφιο 6.9. Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο που ακολουθήσαμε στις ευκλείδειες στροφές, οικοδομήστε το μετασχηματισμό πεπερασμένης προώθησης από το γεννήτορα του μετασχηματισμού. Περνώντας, τώρα, στον τετραδιάστατο χώρο του Minkowski υπολογίστε τους μεταθέτες μεταξύ όλων των μετασχηματισμών προώθησης και τους μεταθέτες μεταξύ των μετασχηματισμών προώθησης και των ευκλείδειων στροφών.