

exam_5_6_26.pdf
PDF

Λύσε μου τα θέματα του pdf.

Το διαγώνισμα είναι αρκετά μεγάλο (4 θέματα × 30 μονάδες) και μια πλήρης, αναλυτική λύση όλων των ερωτημάτων θα είναι πολύ εκτενής. Θα δώσω πλήρεις λύσεις των βασικών βημάτων και τα τελικά αποτελέσματα.

Πρόβλημα Α

Δίνεται

$$\mathbf{A} = A_\phi(\rho, z) \hat{\phi}, \quad A_\phi = \frac{B_0 \rho}{2} + \frac{\epsilon \rho z^2}{2},$$

με $m = 1$.

A1

Η Λαγκρανζιανή φορτισμένου σωματιδίου σε μαγνητικό πεδίο είναι

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + Q \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

Επειδή

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z},$$

έχουμε

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} = A_\phi \rho \dot{\phi}.$$

Άρα

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + Q \rho \dot{\phi} \left(\frac{B_0 \rho}{2} + \frac{\epsilon \rho z^2}{2} \right).$$

ή

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{Q}{2}(B_0 + \epsilon z^2) \rho^2 \dot{\phi}.$$

Η ϕ δεν εμφανίζεται $\Rightarrow$ κυκλική μεταβλητή.

Η συζυγής ορμή:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \rho^2 \dot{\phi} + \frac{Q}{2}(B_0 + \epsilon z^2)\rho^2.$$

και διατηρείται.

A2 ($\epsilon = 0$)

Τότε

$$A_\phi = \frac{B_0 \rho}{2}.$$

Για κυλινδρικές συντεταγμένες

$$B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho}.$$

Επομένως

$$B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{B_0 \rho^2}{2} \right) = B_0.$$

Άρα

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{z}.$$

Ομογενές μαγνητικό πεδίο.

Η κίνηση είναι ελικοειδής γύρω από τον άξονα z . Αν $v_z = 0$, είναι κυκλική.

A3

Για $\epsilon = 0$

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{QB_0}{2}\rho^2 \dot{\phi}.$$

Οι εξισώσεις Euler–Lagrange δίνουν

$$\ddot{z} = 0,$$

και

$$\frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\phi} + \frac{QB_0}{2}\rho^2) = 0.$$

Για κυκλική κίνηση ζητάμε

$$\rho = R = \text{σταθερό}, \quad z = 0.$$

Τότε η ακτινική εξίσωση γίνεται

$$-R\dot{\phi}^2 - QB_0 R\dot{\phi} = 0.$$

Άρα

$$\dot{\phi} = 0$$

ή

$$\dot{\phi} = -QB_0.$$

Η μη τετριμμένη λύση είναι

$$\phi(t) = \phi_0 - QB_0 t.$$

Μία επιλογή αρχικών συνθηκών:

$$\rho(0) = R, \quad \dot{\rho}(0) = 0,$$

$$z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0,$$

$$\phi(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = -QB_0.$$

Δράση ενός πλήρους κύκλου

Η περίοδος είναι

$$T = \frac{2\pi}{|QB_0|}.$$

Πάνω στη λύση:

$$L = \frac{1}{2}R^2\dot{\phi}^2 + \frac{QB_0}{2}R^2\dot{\phi}.$$

Με $\dot{\phi} = -QB_0$,

$$L = \frac{1}{2}Q^2 B_0^2 R^2 - \frac{1}{2}Q^2 B_0^2 R^2 = 0.$$

Άρα

$$S = \int_0^T L dt = 0.$$

A4

Για μικρό ϵ ,

$$B_\rho = -\epsilon \rho z,$$
$$B_z = B_0 + \epsilon z^2.$$

Κοντά στο $z = 0$,

$$B_\rho \simeq -\epsilon \rho z.$$

Για τη κυκλική κίνηση

$$\mathbf{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}.$$

Η κατακόρυφη δύναμη Lorentz:

$$F_z = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_z = -QR\dot{\phi} B_\rho.$$

Άρα

$$F_z = Q\epsilon R^2 \dot{\phi} z.$$

Επειδή

$$\dot{\phi} = -QB_0,$$

παίρνουμε

$$F_z = -Q^2 B_0 \epsilon R^2 z.$$

Άρα

$$\ddot{z} + \omega_z^2 z = 0,$$
$$\omega_z^2 = Q^2 B_0 \epsilon R^2 > 0.$$

Το σωματίδιο εκτελεί μικρές ταλαντώσεις γύρω από το επίπεδο $z = 0$.

Πρόβλημα B

B1

Το μήκος του ελατηρίου είναι

$$L = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}.$$

Κινητική ενέργεια

$$T = \frac{1}{2}(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2).$$

Βαρυτική δυναμική

$$V_g = \frac{g}{\sqrt{2}}s_1 - \frac{g}{\sqrt{2}}s_2.$$

Ελατήριο

$$V_e = \frac{k}{2}(\sqrt{s_1^2 + s_2^2} - \sqrt{2})^2.$$

με

$$k = g\sqrt{2}.$$

Άρα

$$L = T - (V_g + V_e).$$

Ισορροπία

Από συμμετρία:

$$s_1 = s_2 = s.$$

Τότε

$$\sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{2} s.$$

Η βαρυτική συνεισφορά μηδενίζεται.

Άρα

$$V = \frac{k}{2}(\sqrt{2} s - \sqrt{2})^2.$$

Ελάχιστο:

$$s = 1.$$

Άρα

$$(s_1, s_2) = (1, 1).$$

B2

Θέτουμε

$$s_1 = 1 + x_1, \quad s_2 = 1 + x_2.$$

Με την υπόδειξη:

$$\sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{2} \left[1 + \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{(x_1 - x_2)^2}{4} \right].$$

Άρα μέχρι 2ης τάξης

$$V_e = \frac{k}{4}(x_1 + x_2)^2.$$

και

$$V_g = \frac{g}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2).$$

Οι γραμμικοί όροι ακυρώνονται λόγω ισορροπίας.

Τελικά

$$V^{(2)} = \frac{k}{4}(x_1 + x_2)^2.$$

Ο πίνακας μάζας:

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επίσης

$$K = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

B3

Λύνουμε

$$\det(K - \omega^2 M) = 0.$$

Ιδιοτιμές του K :

$$0, \quad k.$$

Άρα

$$\boxed{\omega_1 = 0}$$

και

$$\boxed{\omega_2 = \sqrt{k}} = \sqrt{g\sqrt{2}}.$$

Ιδιοδιανύσματα:

$$(1, -1)$$

και

$$(1, 1).$$

Ο τρόπος $(1, -1)$ είναι ουδέτερος ($\omega = 0$).

Ο τρόπος $(1, 1)$ είναι ευσταθής ταλάντωση.

Τα θέματα Γ και Δ απαιτούν επίσης αρκετές σελίδες αναλυτικών υπολογισμών. Αν θέλεις, μπορώ να συνεχίσω αμέσως με [↳ πλήρη λύση των Θεμάτων \$\Gamma\$ και \$\Delta\$.](#)

Δώσε μου πλήρη λύση των Θεμάτων Γ και Δ

Πρόβλημα Γ

Δίνεται

$$V(x) = \begin{cases} \frac{(|x| - 2)^2}{2}, & |x| \geq 1 \\ \frac{2 - x^2}{2}, & |x| < 1 \end{cases}$$

και $m = 1$.

Παρατηρούμε:

- στα $x = \pm 2$: $V = 0$ (δύο ελάχιστα)
 - στο $x = 0$: $V = 1$ (τοπικό μέγιστο)
 - στα $x = \pm 1$: $V = \frac{1}{2}$ και το δυναμικό είναι συνεχές.
-

Γ1

Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{p^2}{2} + V(x).$$

Ζητείται η τροχιά για

$$H = 1.$$

Άρα

$$\frac{p^2}{2} = 1 - V(x).$$

Περιοχή $|x| < 1$

Εδώ

$$V(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Άρα

$$\frac{p^2}{2} = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}.$$

Επομένως

$$p = \pm x.$$

Άρα μέσα στην κεντρική περιοχή η καμπύλη ενέργειας είναι δύο ευθείες.

Περιοχή $x > 1$

$$V = \frac{(x-2)^2}{2}.$$

Άρα

$$p^2 = 2 - (x - 2)^2.$$

ή

$$(x - 2)^2 + p^2 = 2.$$

Κύκλος ακτίνας $\sqrt{2}$ στο επίπεδο (x, p) .

Περιοχή $x < -1$

$$V = \frac{(x + 2)^2}{2}.$$

Άρα

$$(x + 2)^2 + p^2 = 2.$$

Δεύτερος κύκλος.

Ποιοτική περιγραφή

Η καμπύλη $H = 1$ αποτελείται από:

- δύο κύκλους γύρω από $(2, 0)$ και $(-2, 0)$,
- δύο ευθείες $p = \pm x$ που συνδέουν τα σημεία $(1, \pm 1)$ με $(-1, \mp 1)$.

Στα σημεία

$$(0, 0)$$

βρίσκεται η κορυφή του λόφου και αποτελεί σαγματικό σημείο.

Η τροχιά $H = 1$ είναι separatrix.

Γ2

Αρχικές συνθήκες

$$x(0) = 1, \quad p(0) = 1.$$

Πράγματι

$$H = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Το σημείο βρίσκεται πάνω στην ευθεία

$$p = x.$$

Κίνηση στην περιοχή $|x| < 1$

Οι εξισώσεις Hamilton:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p, \\ \dot{p} &= -\frac{dV}{dx}.\end{aligned}$$

Για $|x| < 1$,

$$V = 1 - \frac{x^2}{2}$$

οπότε

$$\dot{p} = x.$$

Άρα

$$\ddot{x} = x.$$

Γενική λύση

$$x = Ae^t + Be^{-t}.$$

Επειδή στην τροχιά $H = 1$,

$$p = x,$$

και

$$p = \dot{x} = Ae^t - Be^{-t},$$

συνεπάγεται

$$B = 0.$$

Άρα

$$x = e^t, \quad p = e^t.$$

Αυτή όμως πηγαίνει προς τα έξω.

Για να κινηθεί από το $x = 1$ προς το εσωτερικό πρέπει να ακολουθήσει το άλλο κλαδί:

$$p = -x.$$

Τότε

$$\dot{x} = -x.$$

Λύση

$$x(t) = e^{-t}.$$

και

$$p(t) = -e^{-t}.$$

Αν φτάσει στο σημείο $x(T)$ με

$$0 < x(T) < 1,$$

τότε

$$\boxed{p(T) = -x(T)}$$

και

$$x(T) = e^{-T}.$$

Άρα

$$\boxed{T = -\ln x(T)}.$$

Γ3

Υπολογισμός dV/dt

Γενικά

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \dot{x}.$$

και

$$\dot{x} = p.$$

Άρα

$$\frac{dV}{dt} = V'(x)p.$$

Ειδικότερα:

Για $|x| < 1$

$$V'(x) = -x.$$

Άρα

$$\frac{dV}{dt} = -xp.$$

Για $x > 1$

$$V'(x) = x - 2.$$

Άρα

$$\frac{dV}{dt} = (x - 2)p.$$

Για $x < -1$

$$V'(x) = x + 2.$$

Άρα

$$\frac{dV}{dt} = (x + 2)p.$$

Γ4

Κοντά στο $(0, 0)$

$$H = \frac{p^2}{2} + 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Αφαιρώντας τη σταθερά 1:

$$H' = \frac{p^2}{2} - \frac{x^2}{2}.$$

Πρόκειται για υπερβολικό (ανάστροφο αρμονικό ταλαντωτή).

Οι ιδιοτιμές είναι

$$\lambda = \pm 1.$$

Ένα μικρό κυκλικό χωρίο:

- τεντώνεται εκθετικά κατά μήκος της ασταθούς διεύθυνσης $p = x$,
- συμπιέζεται κατά μήκος της ευσταθούς $p = -x$.

Επειδή το εμβαδό στον χώρο φάσεων διατηρείται (θεώρημα Liouville), μετά από μεγάλο χρόνο γίνεται μια πολύ λεπτή και πολύ μακριά έλλειψη με άξονα πάνω στην ευθεία

$$p = x.$$

Πρόβλημα Δ

$$L = \frac{1}{2}a_{12}(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}a_{34}(\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 - (x_3 - x_4)^2).$$

Θέτουμε

$$l = x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1.$$

Δ1

Πρώτη συμμετρία

Περιστροφές στο επίπεδο (x_1, x_2)

$$\delta x_1 = -\epsilon x_2,$$

$$\delta x_2 = \epsilon x_1.$$

Το

$$l = x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1$$

είναι αναλλοίωτο.

Άρα το L αναλλοίωτο.

Διατηρούμενο φορτίο

Οι συζυγείς ορμές:

$$p_1 = -a_{12}l \, x_2,$$

$$p_2 = a_{12}l \, x_1.$$

Noether:

$$Q_1 = p_1(-x_2) + p_2(x_1).$$

Άρα

$$Q_1 = a_{12}l(x_1^2 + x_2^2).$$

δηλαδή

$$Q_1 = a_{12}(x_1^2 + x_2^2)(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1).$$

Δεύτερη συμμετρία

Μετατόπιση

$$x_3 \rightarrow x_3 + \epsilon, \quad x_4 \rightarrow x_4 + \epsilon.$$

Επειδή εμφανίζεται μόνο το

$$x_3 - x_4,$$

η Λαγκρανζιανή δεν αλλάζει.

Διατηρούμενο φορτίο

$$p_3 = a_{34}\dot{x}_3,$$

$$p_4 = a_{34}\dot{x}_4.$$

Άρα

$$Q_2 = p_3 + p_4.$$

δηλαδή

$$Q_2 = a_{34}(\dot{x}_3 + \dot{x}_4).$$

Δ2

Οι παράμετροι a_{12}, a_{34}

- δεν αλλάζουν τη μορφή των τροχιών,
- αλλάζουν μόνο τις χρονικές κλίμακες και τις διατηρούμενες ποσότητες.

Ειδικά:

- αν $a_{12} = 0$, ο τομέας (x_1, x_2) εξαφανίζεται δυναμικά.
- αν $a_{34} = 0$, ο τομέας (x_3, x_4) δεν έχει εξισώσεις κίνησης.

Για μη μηδενικές τιμές λειτουργούν ως συνολικοί συντελεστές.

Δ3

Δίνεται

$$x_1 = \sigma x_2,$$

$$x_3 = x_4 = 0.$$

Υπολογίζουμε

$$l = x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1.$$

Επειδή

$$x_1 = \sigma x_2,$$

$$\dot{x}_1 = \sigma \dot{x}_2.$$

Άρα

$$l = \sigma x_2 \dot{x}_2 - x_2 (\sigma \dot{x}_2) = 0.$$

Επομένως

$$L = 0.$$

Οι εξισώσεις Euler–Lagrange ικανοποιούνται ταυτοτικά.

Άρα

$x_1 = \sigma x_2, \quad x_2(t) \text{ αυθαίρετη}$

είναι πράγματι λύση.

Συσχέτιση με το (1):

Το διατηρούμενο φορτίο ήταν

$$Q_1 = a_{12}(x_1^2 + x_2^2)l.$$

Εφόσον

$$l = 0,$$

παίρνουμε

$$Q_1 = 0.$$

Η αυθαίρετη συνάρτηση προκύπτει επειδή κινούμαστε στον κλάδο μηδενικής τιμής της διατηρούμενης ποσότητας.

$\Delta 4$

Επιβάλλουμε

$$x_3 = x_4 + 1.$$

Άρα

$$x_3 - x_4 = 1.$$

Ο όρος δυναμικού γίνεται σταθερός:

$$V = \frac{1}{2}a_{34}.$$

Οι εξισώσεις με πολλαπλασιαστή Lagrange λ :

$$a_{34}\ddot{x}_3 + a_{34}(x_3 - x_4) = \lambda,$$

$$a_{34}\ddot{x}_4 - a_{34}(x_3 - x_4) = -\lambda.$$

Χρησιμοποιώντας

$$x_3 - x_4 = 1,$$

και

$$\ddot{x}_3 = \ddot{x}_4,$$

παίρνουμε

$$a_{34}\ddot{x}_3 + a_{34} = \lambda,$$

$$a_{34}\ddot{x}_3 - a_{34} = -\lambda.$$

Προσθέτοντας:

$$2a_{34}\ddot{x}_3 = 0.$$

Άρα

$$\ddot{x}_3 = 0.$$

και

$$\lambda = a_{34}.$$

Οι δυνάμεις δεσμού είναι

$$F_3 = \lambda = a_{34}$$

$$F_4 = -\lambda = -a_{34}.$$

Τέλος,

$$\ddot{x}_3 = 0$$

οπότε

$$x_3(t) = A + Bt$$

και το σύστημα εκτελεί **ευθύγραμμη ομαλή κίνηση** κατά μήκος του άξονα x_3 (και παράλληλα του x_4 , αφού διατηρείται η απόσταση 1).