



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Μηχανικής II
24 Σεπτεμβρίου 2025

Απαντήστε στα ακόλουθα 4 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα.
Σύνολο μονάδων 110. Καλή σας επιτυχία.

Πρόβλημα Α [35 μονάδες]

- (α) Ένας αρμονικός ταλαντωτής σε μία διάσταση ξεκινά από την θέση ισορροπίας και ξανακαταλήγει σε αυτή για πρώτη φορά μετά από χρόνο $t = \pi$. Ποια η τιμή της δράσης γι' αυτή την κίνηση; Χρειάστηκε η γνώση της αρχικής ταχύτητας; Μπορούν δύο διαφορετικές διαδρομές που συνδέουν αρχική και τελική κατάσταση να αντιστοιχούν στην ίδια δράση σύμφωνα με την αρχή του Hamilton;
- (β) Ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου q κινείται (1) μέσα σε ανυσματικό δυναμικό της μορφής $\mathbf{A}_1(\mathbf{r}, t) = t \hat{\mathbf{z}}$ και βαθμωτό δυναμικό $\phi_1(\mathbf{r}, t) = 0$ και (2) μέσα σε ανυσματικό δυναμικό της μορφής $\mathbf{A}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$ και βαθμωτό δυναμικό $\phi_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{z}}$. Αφού γράψετε τη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου και εξάγετε τις αντίστοιχες εξισώσεις Euler-Lagrange, εξηγήστε γιατί το σύστημα των εξισώσεων κίνησης είναι ίδιο.
- (γ) Ένα φυσικό σύστημα 2 αλληλεπιδρώντων σωματιδίων που κινούνται σε 1 διάσταση περιγράφεται από τη Λαγκρανζιανή $L = m_1 u_1^2/2 + m_2 u_2^2/2 - V(x_1, x_2)$. Παρατηρούμε ότι η στασιμοποιημένη δράση του συστήματος για δοσμένες αρχικές (στο χρόνο $t = 0$) και τελικές (μετά από χρόνο $t = 1$) θέσεις αυτού είναι $S[x_1(0), x_2(0), x_1(1), x_2(1)]$. Παρατηρούμε ότι αν αλλάξουμε τις συντεταγμένες των θέσεων σύμφωνα με τον συνεχή μετασχηματισμό $x_1(t) \rightarrow x'_1(t) = x_1(t) + 2\epsilon$ και $x_2(t) \rightarrow x'_2(t) = x_2(t) + 3\epsilon$ η δράση του συστήματος $S[x'_1(0), x'_2(0), x'_1(1), x'_2(1)]$ δεν διαφοροποιείται από την προηγούμενη τιμή αυτής (προ του μετασχηματισμού). Μπορείτε να βρείτε μια πιθανή μορφή της V που να μην εξαρτάται από το καθένα από τα x_1, x_2 ανεξάρτητα, αλλά από κάποιο συνδυασμό αυτών;
- (δ) Ένα φυσικό σύστημα κινείται υπό τον δεσμό $f(\mathbf{r}) = 0$ και η φυσική του κίνηση είναι η $\mathbf{r}(t)$, οπότε η στασιμοποιημένη του δράση από $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ έως $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$ είναι $S[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2] = S_0$. Υπολογίστε τη δράση του συστήματος όταν λείπει ο δεσμός, αλλά ο υπολογισμός της δράσης γίνεται επί της ίδιας διαδρομής $\mathbf{r}(t)$ η οποία είναι αφύσικη αφού τώρα ο δεσμός δεν δεσμεύει το σύστημα.
- (ε) Έστω η Λαγκρανζιανή $L(x, u) = \alpha u^2 + \beta u x + \gamma x^2$. Κατασκευάστε τη Χαμιλτονιανή και επιβεβαιώστε ότι η επιτάχυνση $\ddot{x}$ είναι ίδια, είτε την υπολογίσετε από την εξίσωση Euler-Lagrange, είτε από τις εξισώσεις Hamilton.

Πρόβλημα Β [25 μονάδες]

Πάνω σε 2 οριζόντια σύρματα, το ένα στη θέση ($y = 0, z = 0$) και το δεύτερο στη θέση ($x = 0, z = H$) μπορούν να ολισθαίνουν χωρίς τριβή 2 σωματίδια με αντίστοιχες μάζες m και λm , όπου λ κάποιος θετικός αριθμός. Τα 2 σωματίδια συνδέονται με ελατήριο σταθεράς k και μηδενικού φυσικού μήκους. Το σύστημα βρίσκεται εντός του ομογενούς, παράλληλα στη διεύθυνση z , βαρυτικού πεδίου g .

- (α) Να γραφεί η Λαγκρανζιανή L του συστήματος. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι απαραίτητο να συμπεριληφθεί στην L ;
- (β) Βρείτε τη θέση ισορροπίας του συστήματος των 2 μαζών.
- (γ) Χρησιμοποιώντας αποκλίσεις των μαζών από τη θέση ισορροπίας τους γραμμικοποιήστε τη Λαγκρανζιανή.
- (δ) Βρείτε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος και τις ιδιοσυχνότητες αυτού. Τι συμβαίνει αν $\lambda = 1$;

Πρόβλημα Γ [25 μονάδες]

Ένα σωματίδιο μάζας m μπορεί να ολισθαίνει ελεύθερα πάνω σε κυκλικό δακτύλιο που κινείται και μεγαλώνει. Το επίπεδο του δακτυλίου είναι οριζόντιο και το κέντρο του βρίσκεται σε κάθε χρονική στιγμή στη θέση $(0, 0, Z(t))$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες, ενώ η ακτίνα του μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο $R(t)$. Το σύστημα βρίσκεται εντός του ομογενούς βαρυτικού πεδίου g .

- (α) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή σε κυλινδρικές συντεταγμένες χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές Lagrange για να πετύχετε τη δέσμευση της κίνησης του σωματιδίου πάνω στον μεταβλητό δακτύλιο.
- (β) Λύστε τις εξισώσεις κίνησης και υπολογίστε γι' αυτές τις δυνάμεις αντίδρασης των δεσμών.
- (γ) Αν η αρχική περιστροφική ταχύτητα του σωματιδίου $R_0 \dot{\phi}(0)$ πάνω στο δακτύλιο (δηλαδή αγνοώντας τη z -κίνηση του δακτυλίου) είναι v_0 και η ακτίνα του δακτυλίου R περιγράφεται από την αύξουσα συνάρτηση $R(t) = R_0 + \alpha t$, υπολογίστε την τιμή του συντελεστή α ώστε το σωματίδιο να μην καταφέρει ποτέ να ολοκληρώσει μια πλήρη περιστροφή στον δακτύλιο.

Πρόβλημα Δ [25 μονάδες]

Η Χαμιλτονιανή ενός σχετικιστικού σωματιδίου στις 3 διαστάσεις δίνεται από την έκφραση $H = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ όπου $\mathbf{p}$ η ορμή του σωματιδίου, m η μάζα του και c η ταχύτητα του φωτός.

- (α) Γράψτε τις εξισώσεις Hamilton και λύστε τις.
- (β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σωματιδίου $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ με χρήση των αγκυλών Poisson, αν γνωρίζετε την αρχική του ορμή $\mathbf{p}(0)$.
- (γ) Να υπολογιστεί η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου και από αυτήν η δράση του σωματιδίου όταν αυτό μεταβαίνει από τη θέση $\mathbf{r}(0)$ στη θέση $\mathbf{r}(T)$ (μετά από χρόνο T).

Λύσεις

Πρόβλημα Α

α. $T = 2\pi \Rightarrow \omega = 1$. Η κίνηση δίνεται από την έκφραση $x(t) = A \sin t$.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}m \int_0^\pi dt [\dot{x}^2 - x^2] \\ &= \frac{1}{2}mA^2 \int_0^\pi dt [\cos^2 t - \sin^2 t] = 0 . \end{aligned}$$

Η δράση είναι ανεξάρτητη από την παράμετρο A που συνδέεται με το πλάτος και την αρχική ταχύτητα της ταλάντωσης. Μπορούν δύο τέτοιες φυσικές διαδρομές να έχουν ίδια δράση. Αυτό επιτρέπει στο ότι κάθε άλλη παρεκκλίνουσα διαδρομή διαφοροποιείται ως προς τη δράση από εκείνη μιας φυσικής διαδρομής κατά όρους τάξης ϵ^2 όπου ϵ μετρά την παρέκλιση. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η μεταβολή της δράσης από μια φυσική διαδρομή σε μια άλλη παραπλήσια φυσική διαδρομή έχει τιμή του όρου $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ακριβώς ίση με 0.

β.

$$L_1 = \frac{1}{2}mv^2 + q\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}mv^2 + qt\dot{z}$$

και

$$L_2 = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi_2 = \frac{1}{2}mv^2 - qz$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις Euler-Lagrange είναι ακριβώς ίδιες όσον αφορά αυτές που αντιστοιχούν στις συνιστώσες x, y . Ως προς το z :

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}_1 + qt) = 0 \Rightarrow m\ddot{z}_1 = -q$$

και

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}_2) - (-q) = 0 \Rightarrow m\ddot{z}_2 = -q .$$

γ. Ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός αποτελεί συμμετρία της Λαγκρανζιανής, οπότε θα πρέπει

$$V(x_1 + 2\epsilon, x_2 + 3\epsilon) = V(x_1, x_2) .$$

Μια τέτοια συνάρτηση είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση f της μορφής $V(x_1, x_2) = f(3x_1 - 2x_2)$.

δ.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt [L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \lambda f(\mathbf{r})] = S_0$$

Οπότε

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = S_0 + \int_{t_1}^{t_2} dt \lambda f(\mathbf{r}) .$$

Όμως $f(\mathbf{r}) = 0$ επί της φυσικής κίνησης, οπότε $S' = S_0$.

ε.

$$= pu(x, p) - L(x, u(x, p))$$

με $p = \partial L / \partial u = 2\alpha u + \beta x$, οπότε $u(x, p) = (p - \beta x) / (2\alpha)$ και

$$\begin{aligned} H &= p \left(\frac{p - \beta x}{2\alpha} \right) - \alpha \left(\frac{p - \beta x}{2\alpha} \right)^2 - \beta x \left(\frac{p - \beta x}{2\alpha} \right) - \gamma x^2 \\ &= \alpha \left(\frac{p - \beta x}{2\alpha} \right)^2 - \gamma x^2 \end{aligned}$$

Μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}(2\alpha u + \beta x) = \beta u + 2\gamma x \Rightarrow 2\alpha \ddot{x} = 2\gamma x \Rightarrow \ddot{x} = (\gamma/\alpha)x .$$

Από τις εξισώσεις Hamilton

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \{\dot{x}, H\} = \{u, H\} = \{(p - \beta x)/(2\alpha), \alpha[(p - \beta x)/(2\alpha)]^2 - \gamma x^2\} \\ &= -\gamma/(2\alpha)\{(p - \beta x), x^2\} = \gamma/(2\alpha)\{x^2, p\} = (\gamma/\alpha)x. \end{aligned}$$

Πρόβλημα B

α. Η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\lambda m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + H^2) - \lambda mgH$$

που με απαλλοιφή σταθερών όρων και διαίρεση με m απλοποιείται στην

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\lambda\dot{y}^2 - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) ,$$

με $\omega^2 = k/m$. Όχι δεν χρειάζεται, όντας σταθερή.

β. Από την απαίτηση $\partial V / \partial x = \partial V / \partial y = 0$ βρίσκουμε το σημείο ισορροπίας $x_e = y_e = 0$ (το ένα σωματίδιο πάνω από το άλλο με ο ελατήριο να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος H).

γ. Η Λαγκρανζιανή είναι ήδη γραμμικοποιημένη.

δ. Από $\det(\mathbf{K} - \mathbf{M}\Omega^2) = 0$ βρίσκουμε

$$(\omega^2 - \lambda\Omega^2)(\omega^2 - \Omega^2) = 0$$

οπότε $\Omega_1 = \sqrt{\lambda}\omega, \Omega_2 = \omega$. Οι αντίστοιχοι τρόποι ταλάντωσης είναι οι $(1, 0)^\top, (0, 1)^\top$. Αν $\lambda = 1$ έχουμε εκφυλισμό και κάθε ζευγάρι $(x, y)^\top$ είναι τρόπος ταλάντωσης με συχνότητα ω .

Πρόβλημα Γ

α.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz - \lambda(\rho - R(t)) - \mu(z - Z(t)) .$$

β. Οι εξισώσεις Euler-Lagrange θα μας δώσουν

$$\begin{aligned}\rho &= R(t) \\ z &= Z(t) \\ m\ddot{\rho} &= m\rho\dot{\phi}^2 - \lambda \\ m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) &= 0 \\ m\ddot{z} &= -mg - \mu\end{aligned}$$

Από την 4η (και 1η) έχουμε $\dot{\phi} = R_0^2\omega_0/\rho^2 = (R_0/R(t))^2\omega_0$, με $\omega_0 = \dot{\phi}(0)$ και $R_0 = R(0)$. Εισάγοντας αυτήν στην 3η βρίσκουμε

$$\lambda = m \left(R(t)\omega_0^2(R_0/R(t))^4 - \ddot{R}(t) \right) = m \left(\frac{\omega_0^2 R_0^4}{R(t)^3} - \ddot{R}(t) \right)$$

Όμοια, εισάγοντας την 2η στην 5η βρίσκουμε

$$\mu = m \left(-g - \ddot{Z}(t) \right) .$$

Η συνολική αντίδραση λοιπόν θα είναι $F_\rho = -\lambda$ (κεντρομόλος), $F_z = -\mu$ (κατακόρυφη δύναμη).

γ. Αντικαθιστώντας στην έκφραση για το $\dot{\phi}$ θα έχουμε $\dot{\phi} = (u_0/R_0)(1 + \alpha t/R_0)^{-2}$, οπότε

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \int_0^T \dot{\phi} dt \\ &= (u_0/R_0) \int_0^T \frac{dt}{(1 + \alpha t/R_0)^2} \\ &= (u_0/R_0)(R_0/\alpha) \int_0^X \frac{dx}{(1 + x)^2} \\ &= (u_0/\alpha)[-1/(1 + X) + 1]\end{aligned}\tag{1}$$

με $X = \alpha T/R_0$. Για να είναι $\phi(T \rightarrow \infty) < 2\pi$ θα πρέπει $u_0/\alpha < 2\pi$.

Πρόβλημα Δ

α. $H = c\sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + m^2c^2}.$

$$\begin{aligned}\dot{x} = \partial H / \partial p_x &= \frac{cp_x}{\sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + m^2c^2}} \\ \dot{y} = \partial H / \partial p_y &= \frac{cp_y}{\sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + m^2c^2}} \\ \dot{z} = \partial H / \partial p_z &= \frac{cp_z}{\sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + m^2c^2}} \\ \dot{p}_x = -\partial H / \partial x &= 0 \Rightarrow p_x = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \dot{x} = \sigma\tau\alpha\theta \\ \dot{p}_y = -\partial H / \partial y &= 0 \Rightarrow p_y = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \dot{y} = \sigma\tau\alpha\theta \\ \dot{p}_z = -\partial H / \partial z &= 0 \Rightarrow p_z = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \dot{z} = \sigma\tau\alpha\theta\end{aligned}$$

(2)

με λύση

$$\begin{aligned}p_x(t) &= p_x(0), p_y(t) = p_y(0), p_z(t) = p_z(0), \\ E &= c\sqrt{p_x(0)^2 + p_y(0)^2 + p_z(0)^2 + (mc)^2} \\ x(t) &= x(0) + c^2 p_x(0)t/E, y(t) = y(0) + c^2 p_y(0)t/E, z(t) = z(0) + c^2 p_z(0)t/E.\end{aligned}$$

β.

$$\mathbf{v} = \{\mathbf{r}, H\} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial H}{\partial p_x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial H}{\partial p_y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{c^2 \mathbf{p}(0)}{E}$$

γ.

$$L = \mathbf{p}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - H(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{v}))$$

με $\mathbf{v} = c^2 \mathbf{p}/E$. Οπότε

$$L = \mathbf{v}^2(E/c^2) - E = -E(1 - (\mathbf{v}/c)^2).$$

Ταυτόχρονα $E^2 = c^2(\mathbf{p}^2 + (mc)^2) = c^2((E\mathbf{v}/c^2)^2 + (mc)^2)$ και λύνοντας ως προς E :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}/c)^2}}.$$

Συνολικά λοιπόν θα είναι

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - (\mathbf{v}/c)^2}$$

και η αντίστοιχη δράση

$$S = \int_0^T L dt = -mc^2 T \sqrt{1 - |\mathbf{r}(T) - \mathbf{r}(0)|^2 / (Tc)^2}$$

αφού η ταχύτητα είναι σταθερή ($\partial L / \partial \mathbf{r} = \mathbf{0}$) και ίση με $\mathbf{v} = (\mathbf{r}(T) - \mathbf{r}(0)) / T$.